巴斯卡三角形的推廣求任何自然數的n次方

國中學生組數學科第三名

高雄市立德國中

作　　者：陳執中、蘇源拓

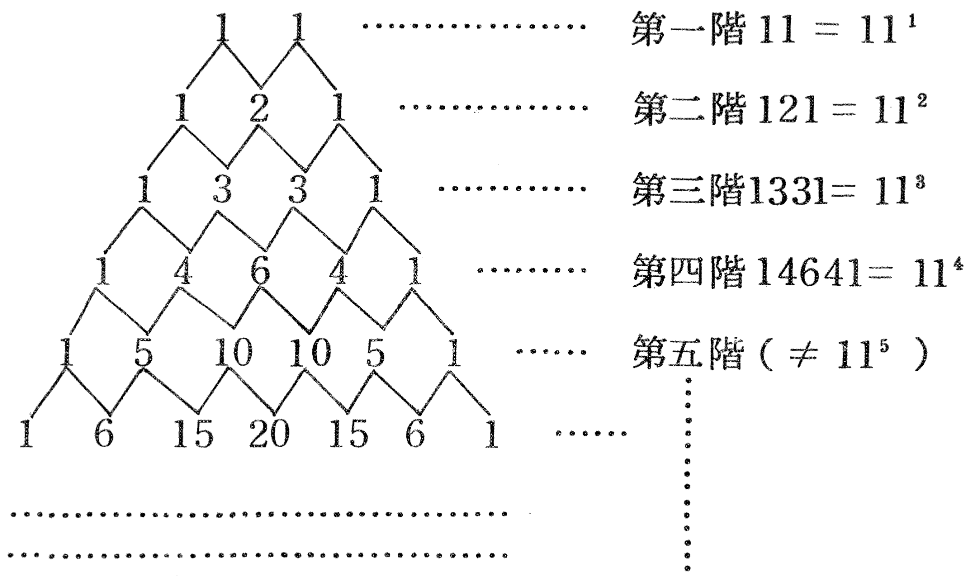
指導教師：謝春源

一、動　　機

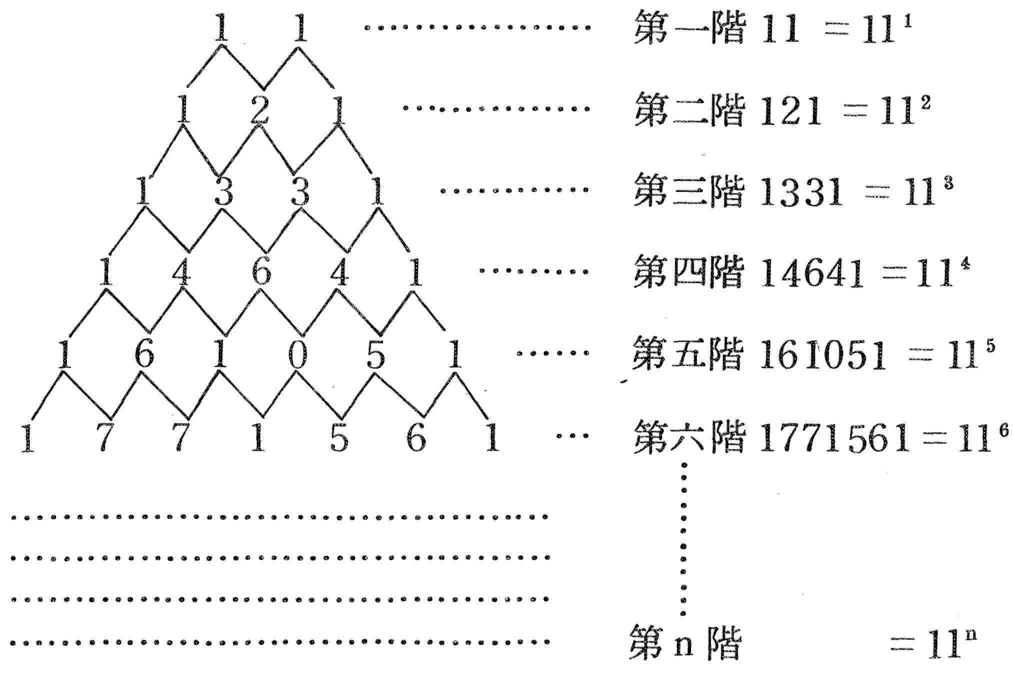
本學期，在一個偶然的機會裏，閒逛書局時，看到一本書名叫“楊輝三角”的書，隨便閱覽了一下，也看不出所以然來，只覺得有一堆數字，恰好堆積成一個三角形，似乎蠻有趣的，而且其中第一階為 11，第二階為 121（恰為 11^2），第三階為1331（又恰為 11^3）………直到第五階（1，5，10，10，5，1）才不等於 11^5，但是如果經過加法所運用的十進位以後，第五階即變為（1，6，1，0，5，1）即又可等於 11^5 了，其餘各階類推都如此，心想，這是否有種微妙的關係存在呢？如果我們把第一階變成其他任何自然數時，是否也有這種關係存在呢？基於好奇心的驅使，且在老師的指導下，總算研究出一些新方法及數字遊戲，一般人只要熟練九九乘法表，及加法運算，就可以利用此種方法，將任何自然數的n次方皆求出來了，以下即是我們的研究過程，供大家參考。

二、研究過程及內容

1.楊輝三角又名（巴斯卡三角形），其圖形為



而上列圖形第五階以後，我們如果經過加法的十進位以後，即變成下圖：



2.從上面的兩個圖形中，我們能看出什麼呢？就已經寫出的一些數目字來看，很容易發現這兩個三角形的兩個斜邊（最靠邊）都是由數字 1 組成的，而其餘的數，都等於它肩上的兩個數相加，例 $2=1+1$ ，$3=1+2$ ，$4=1+3$ ，$6=3+3$ ，………其實巴斯卡三角形也就是利用這種規則作成的，但是若當第一階爲 a （ $a\in N$ ，$a\neq 11$ ）時，那是否也可仿照這種規則，求出其 n 次方呢？

3.雖然巴斯卡三角形構成的規則已知前述，但我們如果換另外一種方法去觀察研究，也可以發覺其中的奧妙，甚至連第一階不爲 11 的任何自然數，亦可利用巴斯卡三角形，全部推算出它的 n 次方，在此須分幾個階段說明如后：

(1)例 1

1 3 ……………… 第一階 13 $=13^1$

1 6 9 …………… 第二階 169 $=13^2$

2 1 9 7 ………… 第三階 2197 $=13^3$

2 8 5 6 1 ……… 第四階 28561 $=13^4$

3 7 1 2 9 3 …… 第五階 371293 $=13^5$

……………………………………………

……………………………………………

第 n 階 $=13^n$

〔註釋〕

①上面例 1 中，若第一階爲任何二位數時，我們在兩數相加之前，先將右邊的數字乘十位數—→ 1，左邊的數字乘個位數字—→ 3，而後再相加，（同前所述，須按十進位法）。

②例 1 中，第二階爲 169 是如何得到的，我們一一說明如下：

$9=(0\times1)+(3\times3)$

$6=(3\times1)+(1\times3)$

$1=(1\times1)+(0\times3)$

而第三階 2197，其中

$7=(0\times1)+(9\times3)=27$ 寫 7 進 2

$9=(9\times1)+(6\times3)=27+2$（進位）$=29$
寫 9 進 2

$1=(6\times1)+(1\times3)=9+2$（進位）$=11$
寫 1 進 1

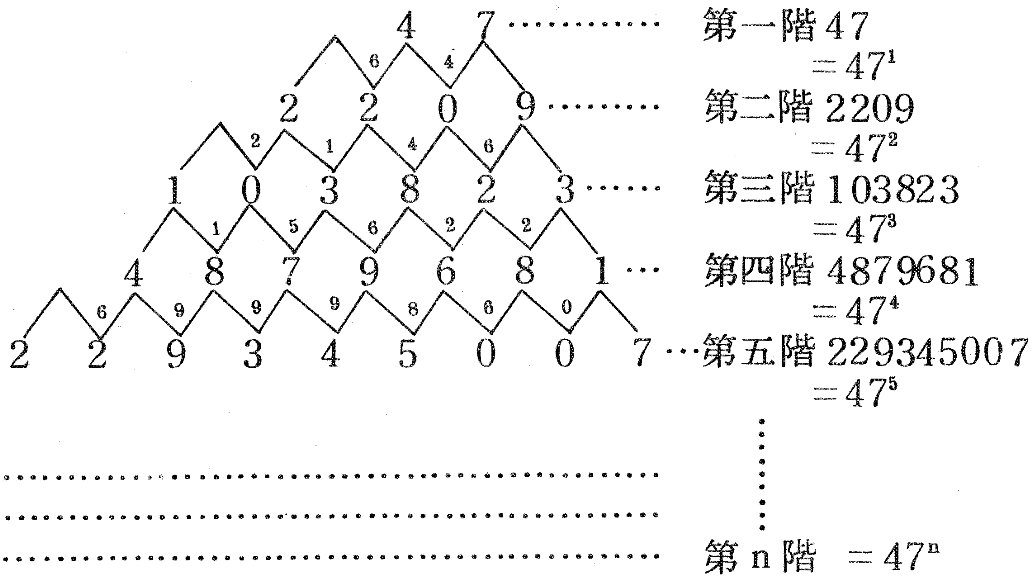
$2=(1\times1)+(0\times3)=1+1$（進位）$=2$

其餘各階均按此法類推

③於第三階2197，其中9與1上面的數字2乃表示前一位所進位的數目字。

④於運算時，各階須視作有一個“零”存在。

例2



〔註釋〕

①例2中，第一階亦為二位數47，所以我們在兩數相加之前，先將右邊數字乘十位數—→4，左邊的數字乘個位數字—→7，而後再相加（同前所述，須按十進位法）。

②例2中，第二階為2209，如何得到的我們一一說明如下：

$9=(0\times 4)+(7\times 7)=49$ 寫9進4

$0=(7\times 4)+(4\times 7)=56+4$（進位）$=60$

寫0進6

$2=(4\times 4)+(0\times 7)=16+6$（進位）$=22$

寫2進2

$2=2$（進位）

而第三階103823，其中

$3=(0\times 4)+(9\times 7)=63$ 寫3進6

$2=(9\times 4)+(0\times 7)=36+6$（進位）$=42$

寫2進4

$8=(0\times 4)+(2\times 7)=14+4$（進位）$=18$

寫8進1

3＝（2×4）＋（2×7）＝22＋1（進位）＝23

寫3進2

0＝（2×4）＋（0×7）＝8＋2（進位）＝10

寫0進1

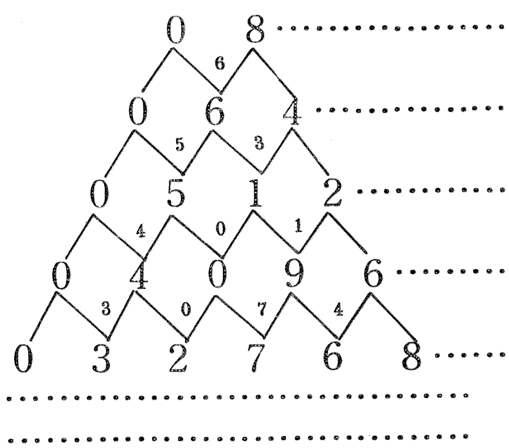
1＝1（進位）

其餘各階亦按此方法推算。

③例2中，第二階與第三階、第五階，最左邊數字應爲22，10，22 ，都已達十進位了，所以按常規，亦須向前推進一位。

(2)當第一階爲個位數（一位數）時，那我們可於此數的前面補個零（8 ─→ 08，3 ─→ 03，9 ─→ 09）如此即可按二位數的算法，推出其n次方了（第n階）

例1：



第一階 08 $=8^1$

第二階 064 $=8^2$

第三階 0512 $=8^3$

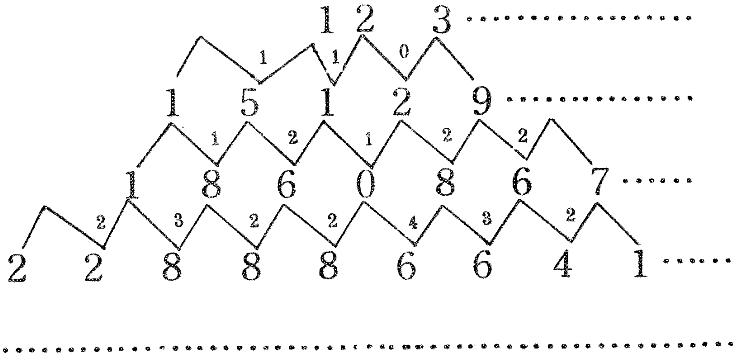
第四階 04096 $=8^4$

第五階 032768 $=8^5$

第n階 $=8^n$

(3)當第一階推廣到三位數時，則看下面例題：

例1：



第一階 123 $=123^1$

第二階 15129 $=123^2$

第三階 1860867 $=123^3$

第四階 228886641 $=123^4$

第n階 $=123^n$

〔註釋〕

①上例中，第一階變爲三位數123時那麼其算法也應由二數相加，推廣到三數相加，而於相加之前，最右邊的數字乘百位數──→1，中間的數乘十位數──→2最左邊的數字乘個位數──→3，乘完後，再將三個乘積相加（須按十進位法）如此即可推算第n階的數等於其n次方的數值。

②第二階15129 如何推算出的，我們一一說明如下：

9＝（0×1）＋（0×2）＋（3×3）＝9

2＝（0×1）＋（3＋2）＋（2×3）＝12

寫2進1

1＝（3×1）＋（2×2）＋（1×3）

＝10＋1（進位）＝11寫1進1

5＝（2×1）＋（1×2）＋（0×3）

＝4＋1（進位）＝5

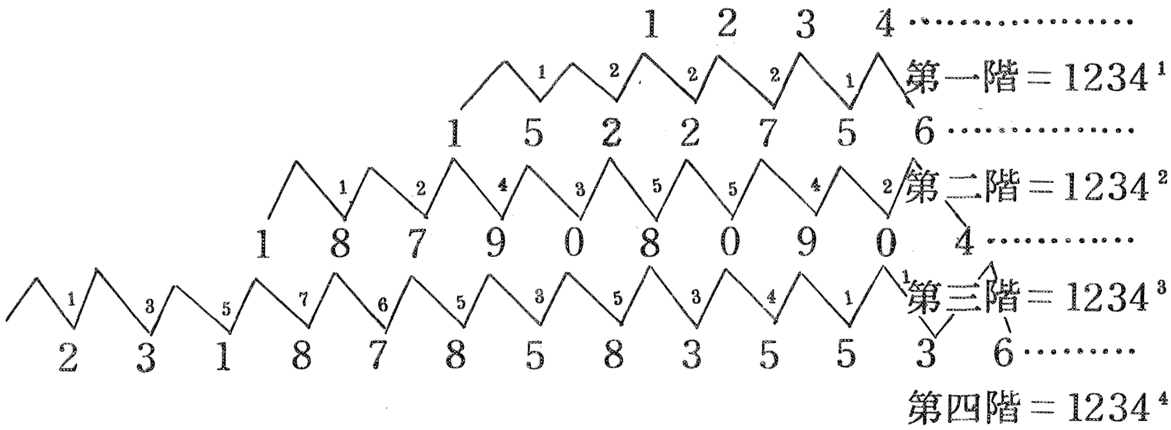
1＝（1×1）＋（0×2）＋（0×3）＝1

其餘各階亦按此方法推算。

③於運算時，各階前後，皆視作有兩個“零”存在。

⑷當第一階推廣到四位數時，則看下面例題：

例



……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

…………………………………………………………… 第n階＝1234^n

〔註釋〕

①上例中，第一階變為四位數1234 時，那麼其算法也應推廣到四數相加，而於相加之前，最右邊的數乘千位數——→1，右邊第二位數乘百位數——→2 右邊第三位數乘十位數——→3，最左邊的數乘個位數——→4，乘完後，再將四個乘積相加（須按十進位法）如此即可推算第n階的數，等於其n次方的數位。

②第二階1522756 ，如何推算出的，我們一一說明如下：

$6=(0\times1)+(0\times2)+(0\times3)+(4\times4)$
$=16$　寫6進1

$5=(0\times1)+(0\times2)+(4\times3)+(3\times4)$
$=24+1$（進位）$=25$　寫5進2

$7=(0\times1)+(4\times2)+(3\times3)+(2\times4)$
$=25+2$（進位）$=27$　寫7進2

$2=(4\times1)+(3\times2)+(2\times3)+(1\times4)$
$=20+2$（進位）$=22$　寫2進2

$2=(3\times1)+(2\times2)+(1\times3)+(0\times4)$
$=10+2$（進位）$=12$　寫2進1

$5=(2\times1)+(1\times2)+(0\times3)+(0\times4)$
$=4+1$（進位）$=5$

$1=(1\times1)+(0\times2)+(0\times3)+(0\times4)$
$=1$

其餘各階亦按此方法推算。

③於運算時，各階前後，皆視作有三個“零”存在。

三、結　　語

1.巴斯卡三角形原本是利用很廣泛的，但在此，我們特將其稍作改造一番，使其亦能求出所有自然數a（$a\in N$，$a\neq 11$）的n次方（第n階即為n次方）而且原來的巴斯卡三角形第一階為11 亦可循此方法而求出其n次方，這或許是一般人所忽

略的一項用途。

2.我們所運用的方法，是將所有自然數區分為一位數、二位數、三位數、四位數……直到n位數好幾種分別，但是其所循的規則方法却是一定的，即一位數、二位數皆是用兩數相加，而三位數時，則須三數相加，四位數時是四數相加……而於相加之前，皆須先作逆向相前（如前述）再將其積相加，如此便可找出所有自然數的n次方了。

3.由於篇幅所限，在此只能寫出四位數的推算實例，至於五位數、六位數……煩請各位按照同一方法，即可推算出我們所需之數。

4.綜上所述，雖然這種方法未必會較其正統的算法為快，但其優點乃在於一般人只要懂九九乘法及加法等運算，就可推算出任何自然數的n次方了，我們僅在此，憑著一份幹勁，總算找出一點頭緒，創造一種新算法，或許有一天，這種算法經過各位先進們加以指正修改後，能將巴斯卡三角形，更創造出另一條門路來，期望各先進能多予賜教與指正，以達拋磚引玉之效。

四、推論與應用

由於巴斯卡三角形的推廣，我們更可以發覺到乘法的奧妙之處，只要是寫出乘式，雖然沒有經過一般的直式計算式，仍然可以直接寫出其標準的乘積出來，如 $2209 \times 47 = 103823$（詳見1的例2中，第二階變至第三階）若是將2209隨便改為另一數3102，則 $3102 \times 47 = ?$ 我們仍然可以把3102循此方法（右邊乘十位數4，左邊乘個位數——→7）而把其眞正的乘積直接寫出來，即 $3102 \times 47 = 145794$，這乃是把巴斯卡三角形的推廣，而所得到的另一應用之處——→（一個乘式，不需要經過直式計算式，而利用巴斯卡三角形推廣的方法，就可以直接寫出其乘積出來。）

請看下面幾個實例：

例1　$326 \times 23 = 7498$

例 2　$465 \times 37 = 17205$

例 3　$74265 \times 21 = 1559565$

例 4　$13548002 \times 103 = 1395444206$

例 5　$20040312 \times 1211 = 24268817832$

評語：1.作者對於所學的巴斯卡三角形作了深入的觀察，並將它推廣成更一般性的結果，進而應用於，任意數的任意次方的計算。

2.本作品的小缺失是完整性稍嫌不夠，若能對於一般的情形加以歸納更佳。