幾何夾心餅—四邊形與圓的內切外接探討

國中學生組數學科第二名

台北縣土城國中

作　　者：周文彬、游章杰
　　　　　簡有明

指導教師：鄭再添

一、研究動機

國中數學第五册第五章最後一節中，談及有關四邊形的外接圓及內切圓部分（P 133～137），提出兩個定理：

1.四邊形中，若一組對角互補，則四邊形有一外接圓。

2.四邊形中，若它的兩組對邊長的和相等，則四邊形有一內切圓。

並推得以下結論：

(1)內角不是直角的菱形，有一內切圓，而沒有外接圓。

(2)長與寬不相等的矩形，有一外接圓，而沒有內切圓。

(3)正方形有一外接圓，也有一內切圓。

由此我們引發了一個問題：

『是否唯有正方形才同時擁有內切圓及外接圓？』它的答案似乎是肯定的，為了證實起見，我們一起去請教老師，老師覺得這問題很有意義，因而鼓勵並指導我們着手探討。

二、研究目的

探討四邊形與圓的內切外接關係，尋求四邊形“夾”在兩圓中間的條件。

三、研究器材

圓規、三角板。

四、研究過程

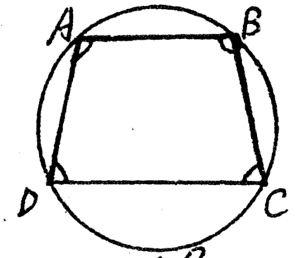
1.(1)我們由兩個定理着手分析，發現它們的逆敍述極易由原證明（課本中）推得，因“四邊形內角和＝360°”若以兩組對角“和相等”代替“互補”的條件，則：

①四邊形有一外接圓 ⟺ 兩組對角和相等。

②四邊形有一內切圓 ⟺ 兩組對邊和相等。

(2)進一步研討非菱形及矩形的四邊形，而有

①等腰梯形必有外接圓。



〔說明〕：

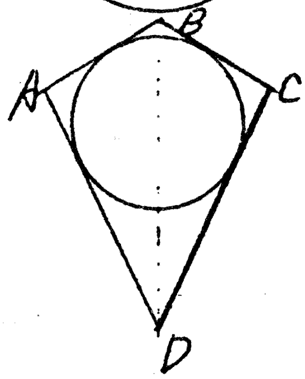
a ABCD 為等腰梯形

$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = \angle D$

b $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$

c 由上之①知，ABCD 有一外接圓。

②箏形必有內切圓。



〔說明〕

a ABCD為箏形

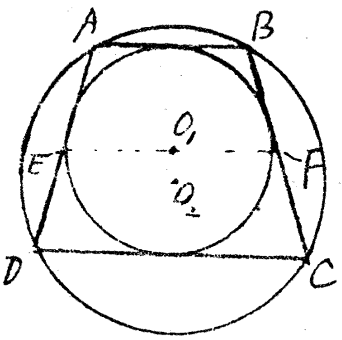
$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC}$，$\overline{AD} = \overline{CD}$

b $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

c 由上之(2)知ABCD有一內切圓。

(3)我們再試圖把上項(2)之條件加到等腰梯形上，而把(1)加到箏形上，發現：

①中線長與腰長相等的等腰梯形同時有內切圓及外接圓。



〔說明〕

a ABCD 為等腰梯形

$\Rightarrow$ 有一外接圓 O_2

b $\overline{EF}$ 為梯形中線 $\Rightarrow$ (E, F為腰的中点, 非切点)

$\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$

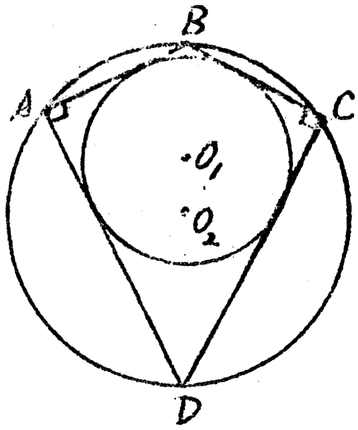
c $\overline{EF} = \overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$

（已知）

d 由上(2)知ABCD有內切圓O_1。

②兩“肩角”爲直角的箏形

同時有內切圓及外接圓。



〔說明〕

a ABCD 爲箏形

$\Rightarrow$有一內切圓O_1。

b $\angle A = \angle C = 90°$（已知）

$\Rightarrow \angle A + \angle C = 180°$

c $\therefore \angle B + \angle D = 180°$

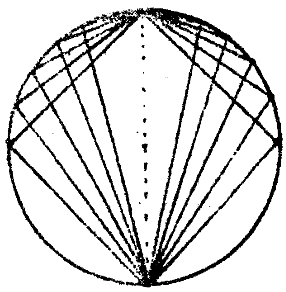
$= \angle A + \angle C$

d 由上之(1)知ABCD有一外接圓O_2。

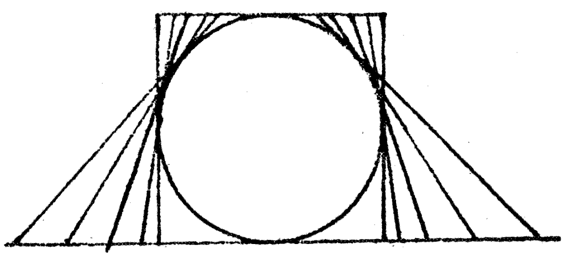
(4)到此爲止，我們可以知道：對四邊形而言，

『同時擁有內切圓及外接圓並不是正方形的專利！』

我們已經找到了特殊的等腰梯形及箏形，它們也能做到，而像這樣的梯形及箏形可以有無限多個！



图(1)



图(2)

圖(1)中圓的每一內接箏形顯然有內切圓，圖(2)中圓的每一外切等腰梯形顯然有外接圓，而正方形只是它們的特殊情形。

2.上項發現給了我們很大的鼓勵，而進一步又想到：

『是否尚有其他的四邊形同時具有內切圓及外接圓？上項箏形

與等腰梯形能否存在於同兩圓之間？』

對此問題，我們也獲得了滿意的結果：

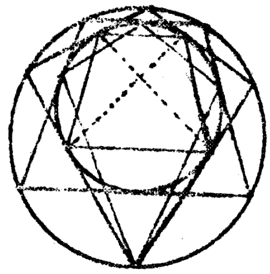
(1) (a″) 順次連接 (a′)中等腰梯形與圓相切的點，得一箏形。

(b″) 順次連接 (b′)中箏形與圓相切的點，得一等腰梯形。

(c) 結合 (a″) 及 (b″)，對相同兩圓作四邊形與圓內接外切，則等腰梯形與箏形可同時存在。

由此可知：

『兩圓間的夾心四邊形不只一個！』

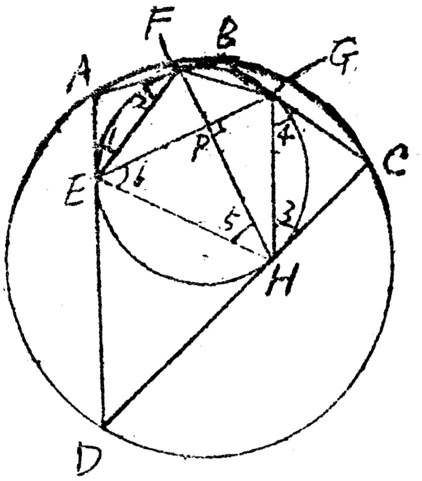


圖(c)

(2)然而，是否尚有第三種？（除箏形，等腰梯形外）我們注意到一件事實，(c)中箏形與內切圓的對邊切點連線似乎互相垂直！爲了印證這性質，我們發現有以下定理

定理：四邊形有一內切圓，則

四邊形同時有外接圓 $\Longleftrightarrow$ 四邊形與內切圓的對邊切點連線互相垂直



〔證明〕

$\Rightarrow$ ABCD 內接於大圓 $\Rightarrow \angle A + \angle C = 180° = \angle B + \angle D$

ABCD 外切於小圓 $\Rightarrow \overline{AE} = \overline{AF}$，$\overline{CG} = \overline{CH}$

ΔAEF、ΔCGH 爲等腰 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$

$\angle 1 = \angle 5$，$\angle 3 = \angle 6$（弦切角性質）

$\angle A + 2\angle 1 = 180°$，

$\angle C + 2\angle 3 = 180°$（三角形內角和）

$\angle A + 2\angle 1 + \angle C + 2\angle 3 = 360°$

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = 90°$（由1，5）

$\therefore \angle 5+\angle 6=90^\circ \Rightarrow \angle EPH=90^\circ$ 即 $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ 得證。

$\Rightarrow$ $\overline{EG} \perp \overline{FH} \Rightarrow \angle 5+\angle 6=90^\circ$

$\because \overline{AF}$，$\overline{AE}$ 爲切線段，$\overline{AF}=\overline{AE}$

$\Rightarrow \angle 1=\angle 2$；同理，$\angle 3=\angle 4$

$\angle 5=\angle 1=\angle 2$，$\angle 6=\angle 3=\angle 4$（弦切角）

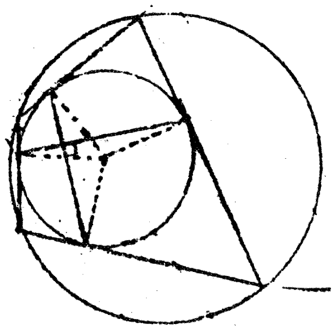
$\angle A+\angle 1+\angle 2=180^\circ=\angle C+\angle 3+\angle 4$（內角和）

$\therefore \angle A+\angle C+2(\angle 5+\angle 6)=360^\circ$

$\Rightarrow \angle A+\angle C=180^\circ \Rightarrow ABCD$ 有外接圓得證。

(3)定理提供我們“製造”同時具有內切圓及外接圓的四邊形的方法：

〔作法〕



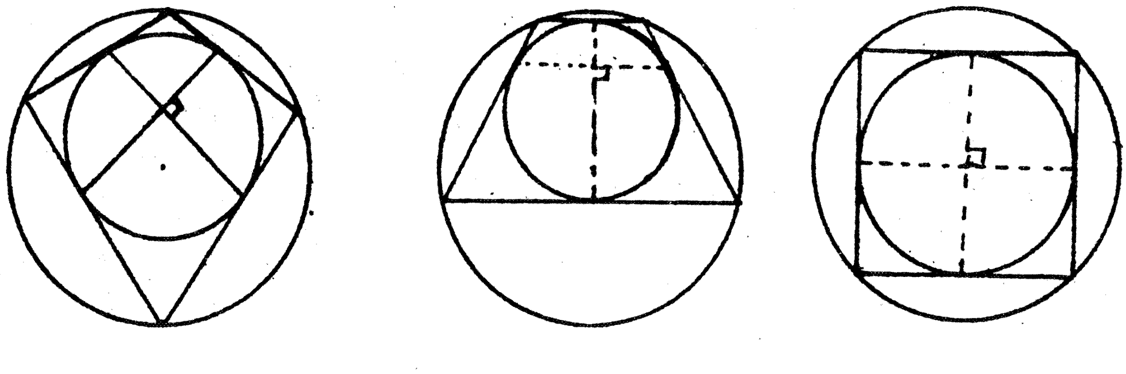
①對一圓任意作垂直相交的兩弦。

②過兩弦的端點對圓作切線，則切線所圍成的四邊形同時有內切圓及外接圓。

我們驚奇的發現，它們幾乎是“不拘形式”的！而知：

『同時擁有內切圓及外接圓的四邊形有無限多，形狀亦無特定』。

箏形與圓的對邊切點連線爲相等兩弦，等腰梯形有一弦恰過圓心（即直徑），而正方形則兩弦皆過圓心視爲特殊情形。

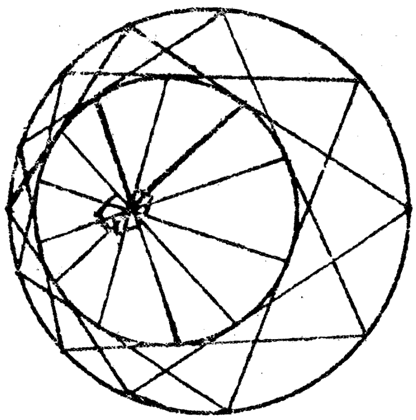


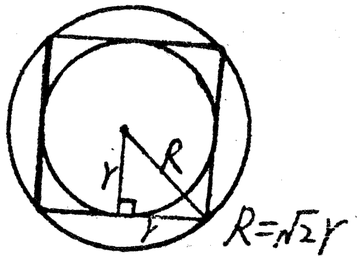
3.(1)讓我們重新回到『兩圓間的夾心四邊形到底可有幾個？』的問題來，一般形狀的四邊形能否與原先發現的箏形，等腰梯形“共存”於兩圓間呢？這是一個更引人入勝的問題。我們

發現，圖(C)中箏形與梯形的對邊切點連線共交於一點，如進一步對一圓作共交於一點的幾組垂直相交的弦，則發現它們所決定的四邊形也共有一外接圓！

於是知道：

『兩圓間的“夾心”四邊形可有無限多個！』

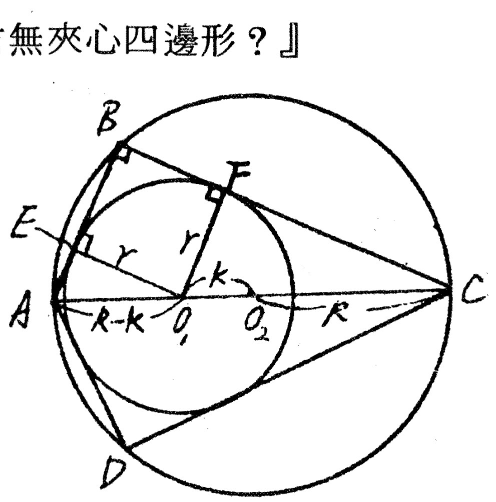




(2)是否任意兩個內離的圓都有“夾心”四邊形存在？當然不是，由同心圓的情況即易得知，唯有當大圓半徑R等於小圓半徑r的$\sqrt{2}$倍時，恰有正方形夾在兩圓間，非同心圓的情況又如何呢？我們發現，問題不全在於半徑的大小，主要的是它們的相關位置！由上1可知，兩圓間可有無限多個“夾心”四邊形，繞小圓一圈。若稍將小圓向大圓圓心或向外移動，就無法存在了！

『什麼條件決定兩圓的有無夾心四邊形？』

我們以連心距界定兩圓的位置關係，以箏形為代表，找出了它們的關係式，使得整個問題變得更有意義：



$\overline{AE} = \sqrt{\overline{A_1O}^2 - \overline{EO_1}^2}$

$= \sqrt{(R-K)^2 - r^2}$

$\Delta AEO_1 \sim \Delta O_1FC$

$\overline{AO_1} : \overline{AE} = \overline{O_1C} : \overline{OF} \Rightarrow$

$$\frac{R-K}{\sqrt{(R-K)^2-r^2}}=\frac{R+K}{r}$$

平方得

$$\frac{(R-K)^2}{(R-K)^2-r^2}=\frac{(R+K)^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow (R-K)^2r^2$$

$$=(R+K)^2(R-K)^2-r^2(R+K)^2$$

展開整理得 $K^4-2(R^2+r^2)K^2-2R^2r^2+R^4=0$

(K之四次方程式)

利用二次方程公式解

$$得K^2=\frac{2(R^2+r^2)\pm\sqrt{4(R^2+r^2)^2-4(R^4-2R^2r^2)}}{2}$$

$$=R^2+r^2\pm r\sqrt{4R^2+r^2}$$

$\because R^2+r^2+r\sqrt{4R^2+r^2}>R^2$ 不合

$\therefore\ K^2=R^2+r^2-r\sqrt{4R^2+r^2}$ ………………(1)式

若K為已知，欲求 r 值，則將④方程式如下處理：

$(R-K)^2r^2+(R+K)^2r^2=(R^2-K^2)^2$

$\Rightarrow\ 2(R^2+r^2)r^2=(R^2-K^2)^2$

$\therefore\ r^2=\dfrac{(R^2-K^2)^2}{2(R^2+K^2)}$ ……………………(2)式

(1)，(2)兩式提供我們已知R，r 或K的值時，如何決定第三個。

(3)我們以$R=\sqrt{2}\,r$印證：

$K^2=(\sqrt{2}\,r)^2+r^2-r\sqrt{4(\sqrt{2}\,r)^2+r^2}$

$=2r^2+r^2-r\sqrt{9r^2}$

$=3r^2-3r^2$

$=0$

即兩圓為同心圓(所夾四邊形為正方形)，恰如所願，又因

$$R^2+r^2-r\sqrt{4R^2+r^2}=K^2\geqslant 0$$
$$\Rightarrow \quad R^2+r^2\geqslant r\sqrt{4R^2+r^2}$$

兩邊平方得

$$R^4+2R^2r^2+r^4\geqslant r^2(4R^2+r^2)=4R^2r^2+r^4$$

整理得 $R^4-2R^2r^2\geqslant 0$ 則 $R^2(R^2-2r^2)\geqslant 0$

$\therefore$ $R^2\geqslant 2r^2$ 即 $R\geqslant\sqrt{2}\,r$（或 $r\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}R$）

故知，$R=\sqrt{2}\,r$ 爲一極限情形。

若 $r>\frac{\sqrt{2}}{2}R$，則無四邊形夾在兩圓中！

又 r 可以是任意小的正數，r 愈趨近於零，則連心距K愈趨近R。總之：

『兩圓半徑R，r，$0<\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}R$，連心距K，在(1)式條件下兩圓有“夾心”四邊形。』

五、結　　論

我們將以上研討主要結論整理如下——

1. 任意等腰梯形有外接圓，任意箏形有內切圓。
2. 同時具有內切圓及外接圓的四邊形與內切圓的對邊切點連線互相垂直。
3. 對一圓作垂直相交（交點在圓內）的兩弦，則過弦的端點作切線，即可得一同時擁有內切圓及外接圓的四邊形。它的形狀非特定的，個數有無限多，等腰梯形、箏形或正方形是它們的特殊情形。
4. 兩內離的圓，若半徑爲R及r，且 $0<r\leq\frac{\sqrt{2}}{2}R$，則在連心距K，$K^2=R^2+r^2-r\sqrt{4R^2+r^2}$，的位置時有無限多四邊形“夾在其中”（與小圓相切、與大圓相接），恰繞

小圓一圈。否則，即無四邊形存在。

5.兩內離圓間的所有夾心四邊形的對邊切點連線共交於一點。

評語：1.作品題裁新穎，結論亦甚為完整。

2.作者對於作品內容甚為瞭解，讓人留下深刻的印象。