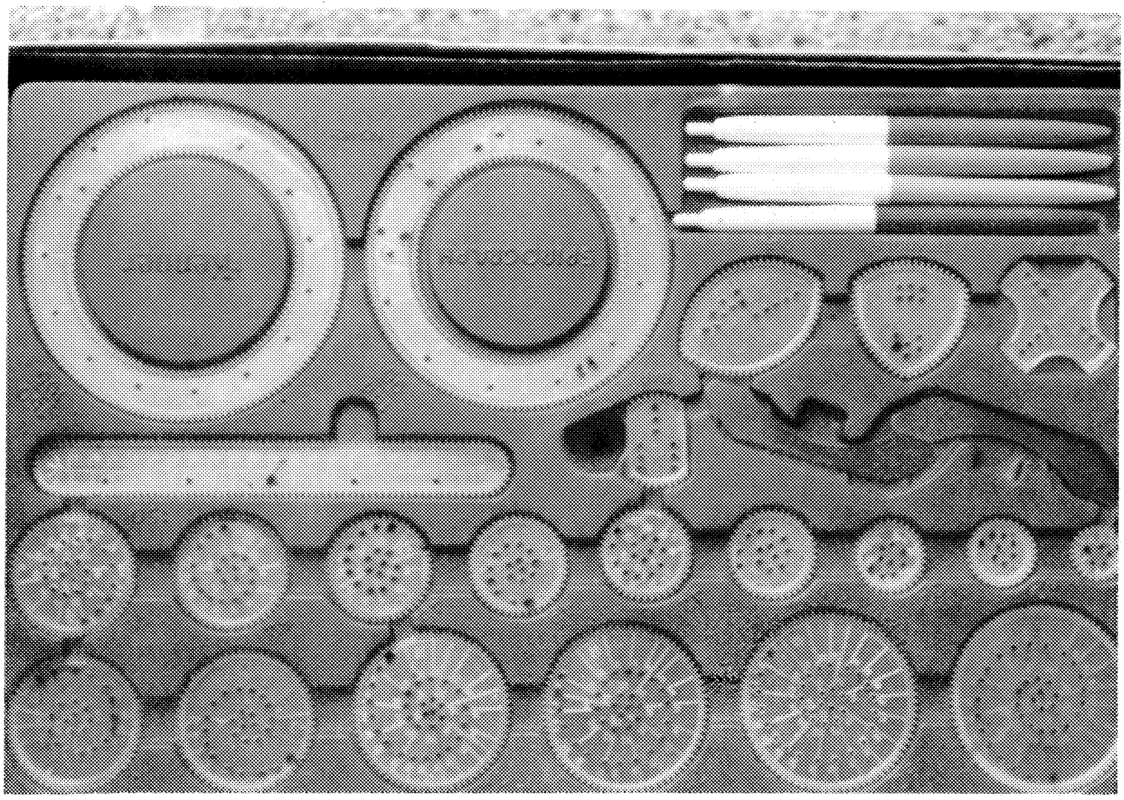
網絡儀作圖的探討
國中學生組數學科第一名

台南市立後甲國中　　作　　者：于如岡
指導教師：許金龍、曾元一



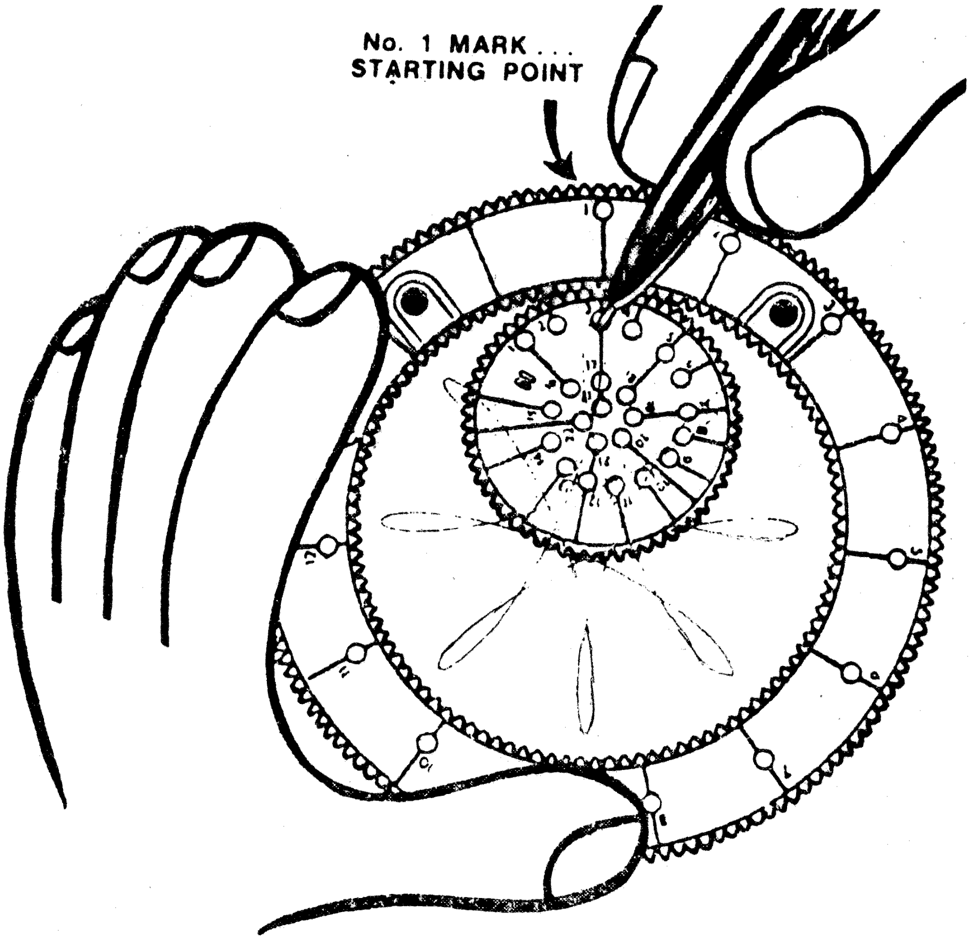
一、研究動機及目的

網絡儀（ Spirograph ）（如相片）的構造是使一小圓在一大圓內部，靠著齒輪囓合，沿著圓周滾動（如圖二）在小圓上（（非僅圓周）一點開個小洞，用筆插入，就可隨著小圓的滾動而描繪出許多美麗的曲線，把玩之際，我們發現這曲線有某些特有的規則性，更有其特殊的數學意義。但一般市面上所見多僅只有一個大圓配合若干個小圓，供人畫圖玩要而已。事實上，在爾後的討論中，我們將發現，若有足夠的大小不同的大圓與小圓（即不同齒數）供我們選擇時，則網絡儀可發揮極大的作圖功用，在

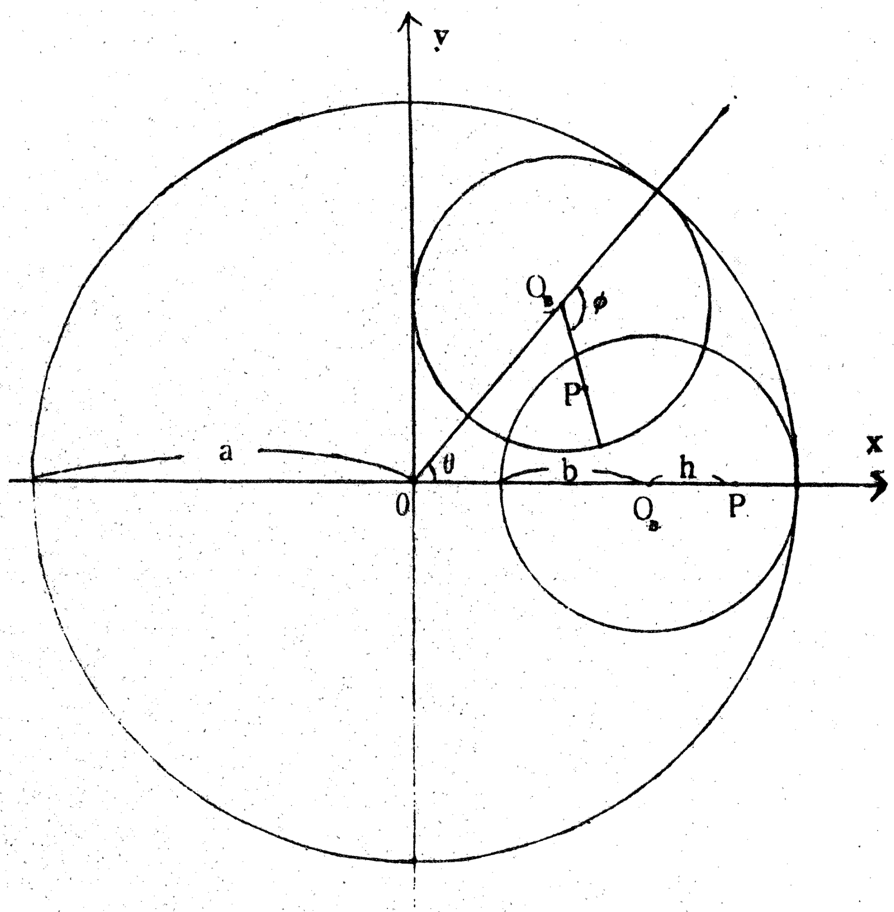
數學上實具有其不可忽視的價值。

二、前　　言

上述網絡儀中所畫出的曲線在數學上稱爲擺線（Cycloid），由此我們定義：「凡一動圓沿一定圓的圓周，作無滑動的滾動，隨動圓作剛性運動的一點P，當動圓運動時所描出的軌跡稱爲擺線」。在這兒，動圓、定圓的半徑大小沒有限制，定圓甚至可以是一條直線（半徑無窮大），動圓、定圓的關係，可以是內切，也可以是外切，網絡儀便是依此而作圖。



圖二



圖三

三、本　　文

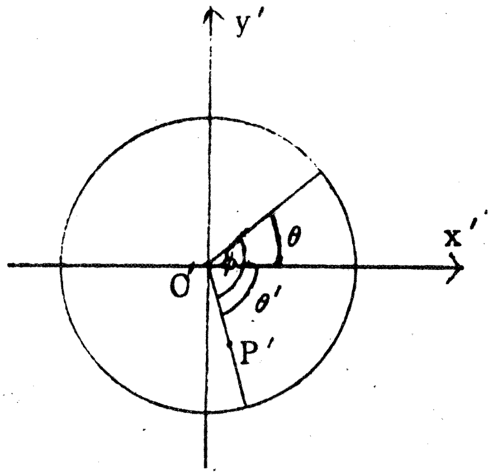
根據以上的定義，我們試著討論擺線的方程式，爲方便起見，分爲三部分討論。

1. 圓內擺線：若動圓、定圓在滾動時保持相內切時，所得到的擺線。（參看圖三）

設定圓半徑 a（$a \geq 0$）動圓半徑 b（$b > 0$）P 點和動圓圓心的距離是定値 h（$h \geq 0$），令定圓圓心爲原點，動圓圓心 O_B 的起點在 x 軸上，O_B（$(a-b)$，0），P 的起點在（$(a-b+h)$，0），現在設動圓滾至 $\overrightarrow{OO_B}$ 和 x 軸正向成 θ 時，動圓圓心 O_B 爲（$(a-b)\cos\theta$，$(a-b)\sin\theta$），設 $\overrightarrow{O_BO}$ 的相反射線和 $\overrightarrow{O_BP}$ 成 ϕ 角，則由滾動路徑長相等，可得 $b\phi = a\theta$

可得 $b\phi = a\theta \Rightarrow \phi = \frac{a}{b}\theta$

，將座標平移至（（$a-b$）$\cos\theta$，（$a-b$）$\sin\theta$）（參看圖四），設 $\overrightarrow{O'P'}$ 和 x 軸正向所成角為 θ'，可看出 $\theta' = \theta - \phi = -\left(\frac{a}{b}-1\right)\theta$，可得出 P' 點座標 $P'\left(h\cos\left(\frac{a}{b}-1\right)\theta,\ -h\sin\left(\frac{a}{b}-1\right)\theta\right)$ 在原座標系中，$P\left((a-b)\cos\theta + h\cos\left(\frac{a}{b}-1\right)\theta,\ (a-b)\sin\theta - h\sin\left(\frac{a}{b}-1\right)\theta\right)$ 上述討論對任一角 θ 恒成立，故得圖內擺線之參數方程式

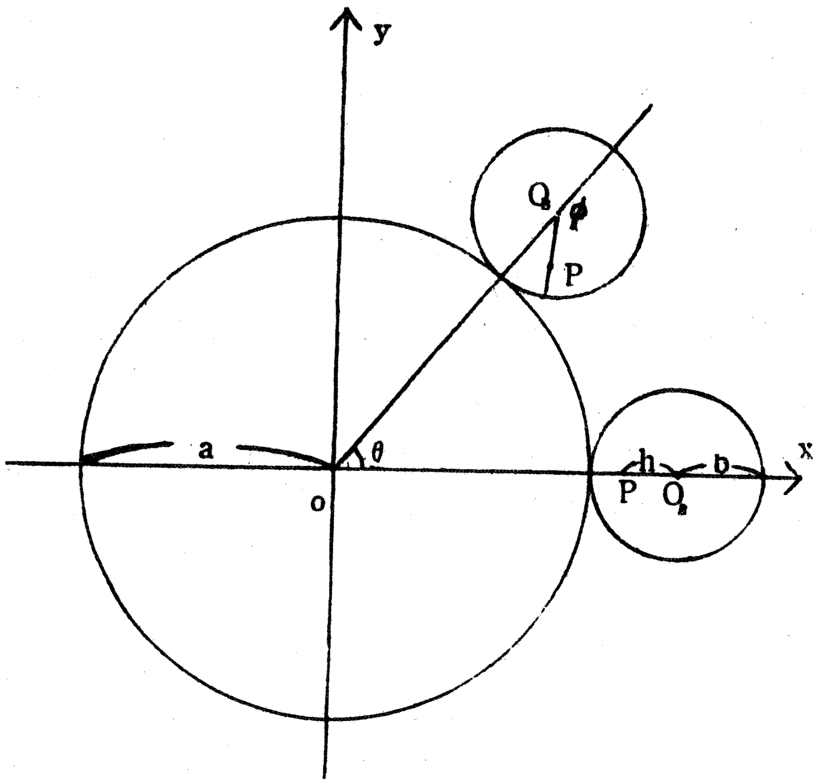


圖四

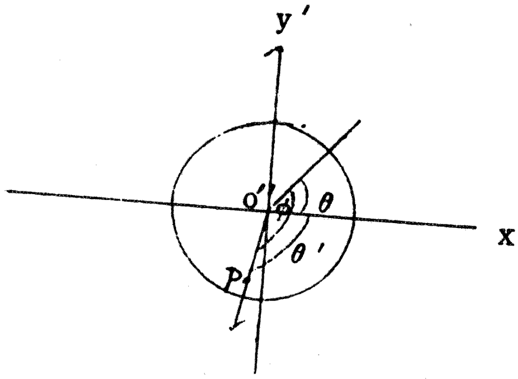
$$\begin{cases} x = (a-b)\cos t + h\cos\left(\frac{a}{b}-1\right)t \\ y = (a-b)\sin t - h\sin\left(\frac{a}{b}-1\right)t \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

2.圓外擺線：定圓、動圓是相外切時所得出的擺線。（參考圖五、圖六），仿上述討論，可得圓外擺線參數方程式：

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - h\cos\left(\frac{a}{b}+1\right)t \\ y = (a+b)\sin t - h\sin\left(\frac{a}{b}+1\right)t \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



圖五



圖六

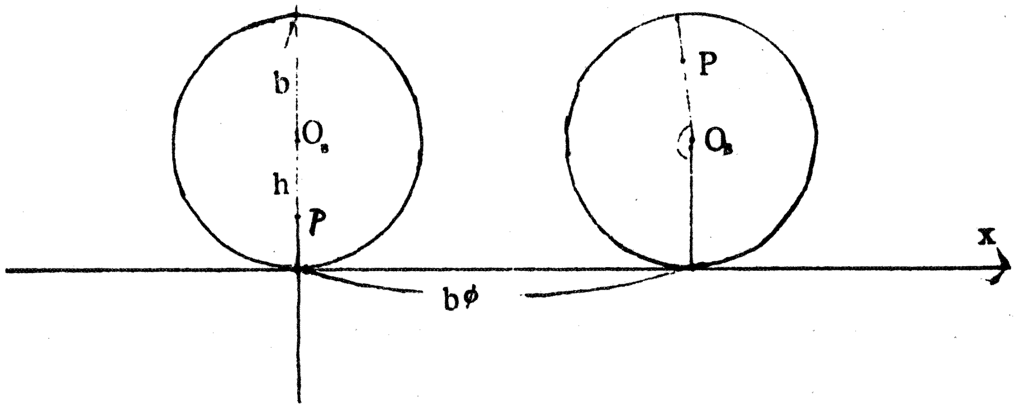
3.若動圓在一直線上滾動，（參考圖七）可得出…數方程式：

$$\begin{cases} x = bt - h\sin t \\ y = b - h\cos t \end{cases} \quad \cdots\cdots(3)$$

爲篇幅所限，我們以下的討論僅就圓內擺線作較詳細的探討。

※註：由書籍中所查到的資料，

料，擺線其實名目繁多，諸如：擺線（Cycloid），餘擺線（Trocloid），內擺線（Hypocycloid），外擺線（Epicycloid）……等等，而實際上，在前述及的三種定義及公式已足夠涵蓋一切擺線，且經研究結果，三者之關係恰如同二次曲線的三種類型（橢圓、拋物線、雙曲線）一般，可由某些極端化的處理而互換。在二



圖七

次曲線中，若 e 表離心率則 $\lim\limits_{e\to 1^-}$ 橢圓＝拋物線，而 $\lim\limits_{e\to 1^+}$ 雙曲線＝拋物線而在擺線中，我們同樣地可以證明，當定圓的半徑→∞時，上面(1)式可證明與(3)式完全相同。

在式(1)中若令 $t=\theta=\frac{b}{a}\phi$，則

$$\begin{cases} x=(a-b)\cos\frac{b}{a}\phi+h\cos\left(1-\frac{b}{a}\right)\phi \\ y=(a-b)\sin\frac{b}{a}\phi-h\sin\left(1-\frac{b}{a}\right)\phi \end{cases}$$

將座標旋轉 $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，再平移至 $(0, a)$

$$\begin{cases} x'=(a-b)\sin\frac{b}{a}\phi-h\sin\left(1-\frac{b}{a}\right)\phi \\ y'=-(a-b)\cos\frac{b}{a}\phi-h\cos\left(1-\frac{b}{a}\right)\phi+a \end{cases}$$

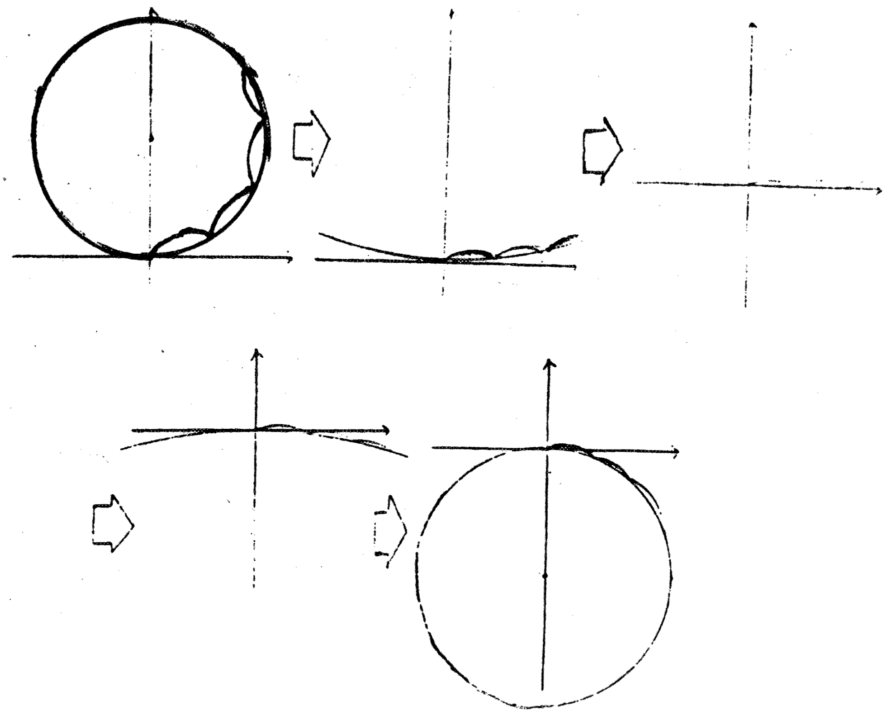
當 a →∞時 $\lim\limits_{a\to\infty}\frac{b}{a}\phi=0$，$\lim\limits_{a\to\infty}\frac{b}{a}=0$

$$\lim_{\frac{b}{a}\phi \to 0} \sin\frac{b}{a}\phi = \frac{b}{a}\phi \ , \quad \lim_{\frac{b}{a}\phi \to 0} \cos\frac{b}{a}\phi = 1$$

得
$$\begin{cases} x' = (a-b)\dfrac{b}{a}\phi - h\sin\phi = b\phi - h\sin\phi \\ y' = -(a-b) - h\cos\phi + a = b - h\cos\phi \end{cases}$$

用類似的方法，也可證明(2)式化爲(3)式，故此三者實爲一體，其變化的情形可想像如（圖八）。

圖八



四、討　　論

利用方程式，我們就可以進行對擺線的探討。

1.不管是圓內擺線，圓外擺線，其圖形範圍都有一定。大致包含在以原點爲圓心的兩同心圓之間，我們可試著求出這個範圍，以圓內擺線爲例，每一點到圓心的距離爲：

$$d = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(a-b)^2+h^2+2(a-b)h}$$

$$\overline{\left[\cos t \cos \left(\frac{a}{b} - 1 \right) t - \right.}$$

$$\overline{\left. - \sin t \sin \left(\frac{a}{b} - 1 \right) t \right]}$$

$$= \sqrt{(a-b)^2 + h^2 + 2(a-b)h \cos\left(\frac{a}{b}\right) t}$$

顯然，當$\frac{a}{b}t = k\pi$（$k \in Z$）時$d = |a-b+h|$ 為一極值，

當$\frac{a}{b}t = 2k\pi$（$k \in Z$）時$d = |a-b-h|$為另一極值，

故可以肯定，圖形在以原點為圓心，$|a-b+h|$，$|a-b-h|$為半徑的兩同心圓之間。

〔註〕：實際上，網絡儀的繪圖，圓內擺線只能繪出$a > b > h$的情形。圓外擺線，動圓在一線上滾動之擺線也只在$b > h \geq 0$的情形下才能作圖，故在看版上我們假設$a > b > 0$。若以電腦畫圖，則沒有這些顧慮。

2. 用網絡儀劃擺線，發現繞過若干圈後，P點會回到原出發點，換句話說，存在某一ω使$t \in [0, \omega]$就足以包括整個圖形，我們現在來試求ω值。在圓內擺線中由週期函數的定義，我們知道W滿足

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos t + h\cos\left(\frac{a}{b}-1\right)t \\ \quad = (a-b)\cos(t+\omega) + h\cos\left(\frac{a}{b}-1\right)(t+\omega) \\ y = (a-b)\sin t - h\sin\left(\frac{a}{b}-1\right)t \\ \quad = (a-b)\sin-(t+\omega) - h\sin\left(\frac{a}{b}-1\right)(t+\omega) \end{cases}$$

顯然 $\begin{cases}(a-b)\cos t=(a-b)\cos(t+\omega)\\(a-b)\sin t=(a-b)\sin(t+\omega)\end{cases}$

$\Rightarrow$可知$\omega=2k\pi$

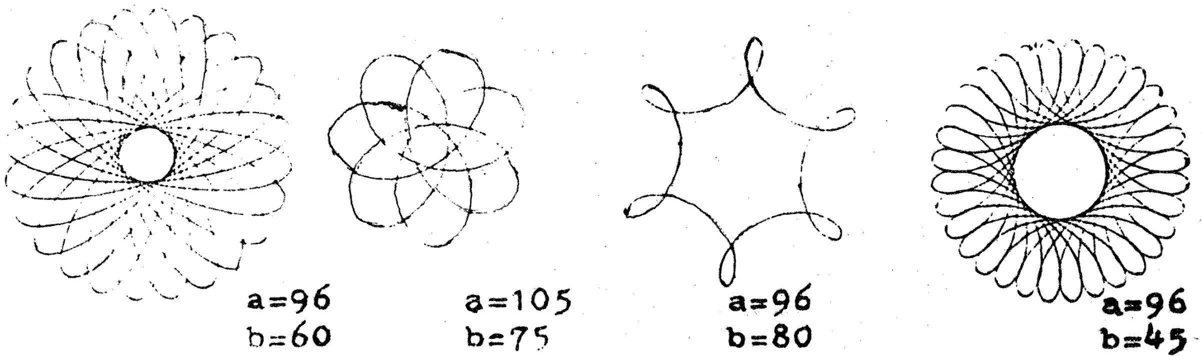
且 $\begin{cases}h\cos\left(\dfrac{a}{b}-1\right)t=h\cos\left(\dfrac{a}{b}-1\right)(t+\omega)\\h\sin\left(\dfrac{a}{b}-1\right)t=h\sin\left(\dfrac{a}{b}-1\right)(t+\omega)\end{cases}$

$\Rightarrow$可知$\left(\dfrac{a}{b}-1\right)\omega=2k\pi$

設$\dfrac{a}{b}-1=\dfrac{r}{P}$（P，$r\in z$，P，r互質）則$\omega=|2P\pi|$ 爲最小正週期解。

我們也可換一種想法，顯然P點只有在小圓“公轉”了整數周，又恰好”自轉“了整數周，P點才可能回到原出發點，由“公轉”角θ和“自轉”角ϕ的關係$\theta=\dfrac{a}{b}\phi$，我們知道滿足上述條件，最少是要公轉$|P|$週才可，故週期是$|2P\pi|$。

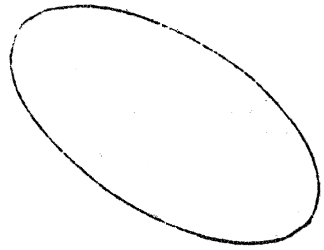
設$\dfrac{a}{b}=\dfrac{q}{p}$（p，q互質p，$q\in Z$）又由討論1.在$|2P\pi|$中，滿足$\dfrac{a}{b}t=2k\pi$，即$\dfrac{q}{p}t=2k\pi$ 的t解有q個，故知離原點最遠的點有q個故曲線爲$|q|$瓣（若d的極大值發生在$\dfrac{a}{b}t=(2k+1)\pi$，瓣數仍爲q瓣）（見圖九）。



圖九

3. 若 $\frac{a-b}{a} \notin Q$，亦即無法以 $\frac{r}{p}$ 表示之，作圖時將發現動圓漫無止境的轉下去，其軌跡幾乎覆蓋了上述以 $|a-b+h|$，$|a-b-h|$ 爲半徑的兩圓之間，而P點仍無法回到原出發點。由此可知，若 $r \notin Q$ 則要把 r 表示成 $r=\frac{q}{p}$ ($p, q \in z$)，其P，Q將→∞，即不可能用有限的兩整數之比表示之。

4. 在以下各種情況下，我們予擺線方程式幾組不同的值，發現它們各具有不同的意義，形成一些我們已熟知的曲線。

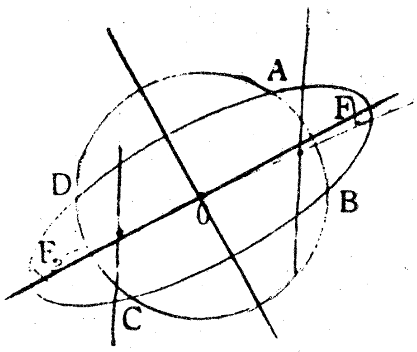


圖十

之一：圓內擺線取 $a=2\lambda$，
$b=\lambda$，$h\neq 0$，
$h\neq\lambda$（如圖十）

得 $\begin{cases} x=(\lambda+h)\cos t \\ y=(\lambda-h)\sin t \end{cases}$

其圖形爲一橢圓，長軸、短軸分別爲 $|\lambda+h|$，$|\lambda-h|$。可見由網絡儀來劃橢圓，實在是一種最不費事，一揮而就的好工具，而其中心，焦點，長短軸均可由幾何作圖輕易得之。作法如下：



圖十一

(1)作兩平行弦，取其中點連線，得一直徑，取直徑中點即爲中心。

(2)以中心爲圓心，適當長度爲半徑，畫圓交橢圓於四點A、B、C、D。

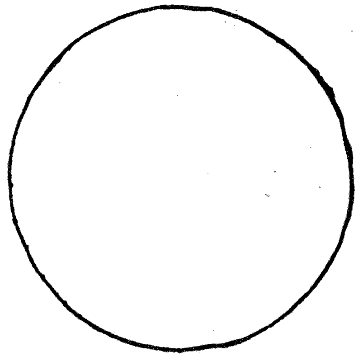
(3)作 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 中垂線即得長軸及短軸。

(4)以短軸一端點爲圓心，長軸爲半徑，畫弧交長軸於 F_1，F_2，即爲焦點（參看圖十一）。

之二：圓內擺線取 $a = 2\lambda$ ， $b = \lambda$ ， $h = 0$ （圖十二）

得 $\begin{cases} x = \lambda \cos t \\ y = \lambda \sin t \end{cases}$

是圓方程式



圖十二

之三：圓外擺線，取

$a = 0$

$\begin{cases} x = (b-h)\cos t \\ y = (b-h)\sin t \end{cases}$

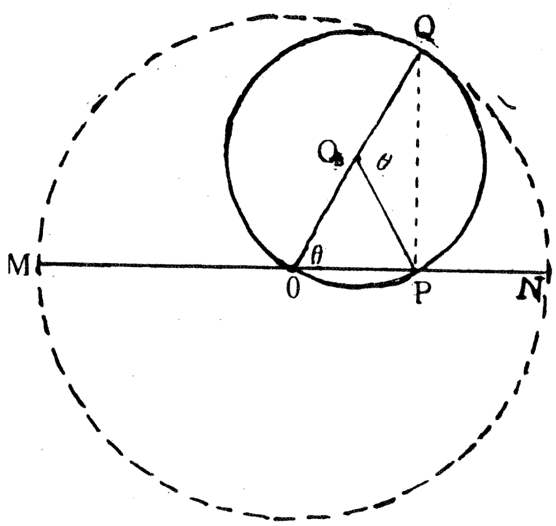
亦為圓方程式。

之四：圓內擺線，

$a = 2\lambda$, $b = \lambda$,

$h = \lambda$ （圖十三）

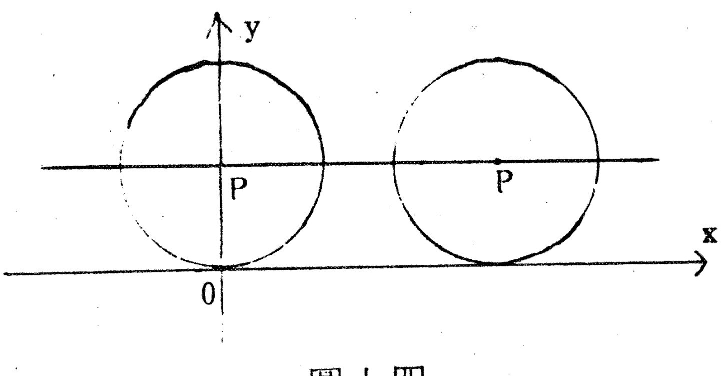
$\begin{cases} x = 2\lambda \cos t \\ y = 0 \end{cases}$



圖十三

其圖形為一長 4λ 的線段，若作圖過程中，動圓是以等速繞著大圓"公轉"，P點正是切點Q在MN上的投影（亦即是一種簡諧運動—S.H.M.）。

之五：動圓在一直線上滾動之擺線，取 $h = 0$ （圖十四）



圖十四

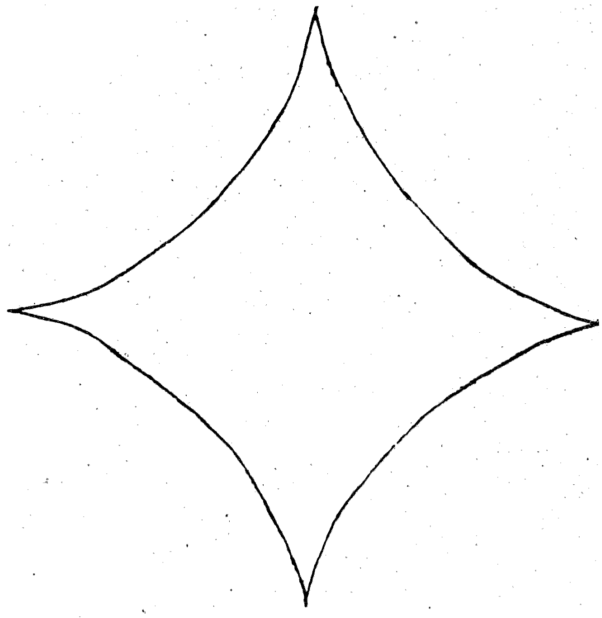
$x = bt$

$y = b$

時一直線 $y = b$

之六：取 $a = \lambda$，$b = \dfrac{\lambda}{4}$，

$h = \dfrac{\lambda}{4}$（圖十五）



圖十五

得 $\begin{cases} x = \dfrac{3}{4}\lambda\cos t + \dfrac{1}{4}\lambda\cos 3t \\ y = \dfrac{3}{4}\lambda\sin t - \dfrac{1}{4}\lambda\sin 3t \end{cases}$

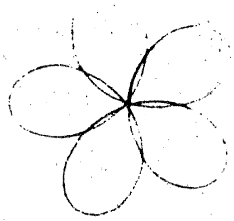
以倍角公式化開，得 $\begin{cases} x = \lambda\cos^3 t \\ y = \lambda\sin^3 t \end{cases}$

此式恰爲星形線（即四尖內擺線）之方程式，由圖形觀察，果如其然。

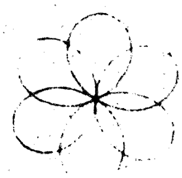
5.在圓內擺線中，當 $a > b$ 時若我們使 $|a-b-h| = 0$，即 $h = a-b$ 可得到一些如花般的美麗曲線，其方程式爲（如圖十六）

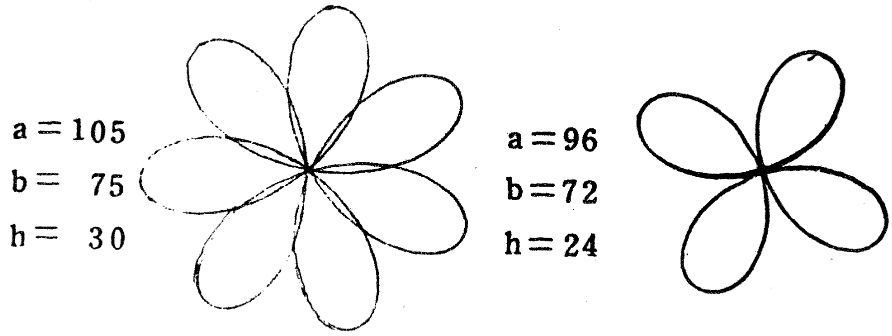
$$\begin{cases} x = (a-b)\left[\cos t + \cos\left(\dfrac{a}{b}-1\right)t\right] \\ y = (a-b)\left[\sin t - \sin\left(\dfrac{a}{b}-1\right)t\right] \end{cases}$$

$a = 105$
$b = 84$
$h = 21$



$a = 96$
$b = 80$
$h = 16$





圖十六

我們發現，某些此類曲線非常像玫瑰線，為深入探討，我們引入極座標和直角座標的轉換式

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$ 代入上式

$$\begin{cases} r\cos\theta = (a-b)\left[\cos t + \cos\left(\frac{a}{b}-1\right)t\right] \\ r\sin\theta = (a-b)\left[\sin t - \sin\left(\frac{a}{b}-1\right)t\right] \end{cases}$$

用和差化積運算得

$$\begin{cases} r\cos\theta = 2(a-b)\cos\frac{a}{2b}t\cos\left(1-\frac{a}{2b}\right)t \cdots (4) \\ r\sin\theta = 2(a-b)\cos\frac{a}{2b}t\sin\left(1-\frac{a}{2b}\right)t \end{cases}$$

....

$$\frac{r}{2(a-b)\cos\frac{a}{2b}t} = \frac{\cos\left(1-\frac{a}{2b}\right)t}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\left(1-\frac{a}{2b}\right)t}{\sin\theta}$$

展開右端的等式

$$\sin\theta\cos\frac{2b-a}{2b}t-\cos\theta\sin\frac{2b-a}{2b}t=0$$

$$\sin\left(\theta-\frac{2b-a}{2b}t\right)=0$$

$$\theta-\frac{2b-a}{2b}t=2k\pi$$

$$t=(\theta+2k\pi)\frac{2b}{2b-a}$$ 代入(4)式

$$r\cos\theta=2(a-b)\cos\frac{a}{2b-a}\theta\cos\theta$$

即 $r=2(a-b)\cos\frac{a}{2b-a}\theta$

延用前面的假設 $\frac{a}{b}=\frac{q}{q}$

$$r=2(a-b)\cos\frac{q}{2p-q}\theta$$

這可分爲兩種情況

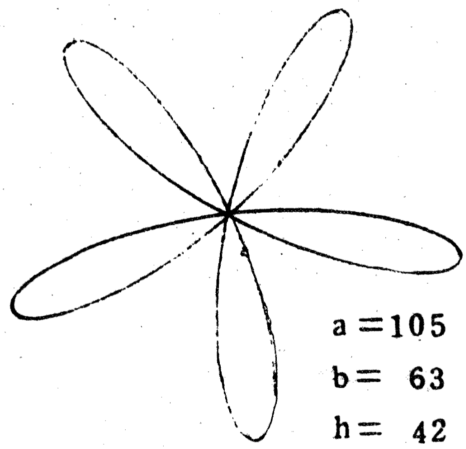
(1) q爲奇數，令 $q\doteq 2m+1$，我們取 $P=m$ 或 $m+1$ 得

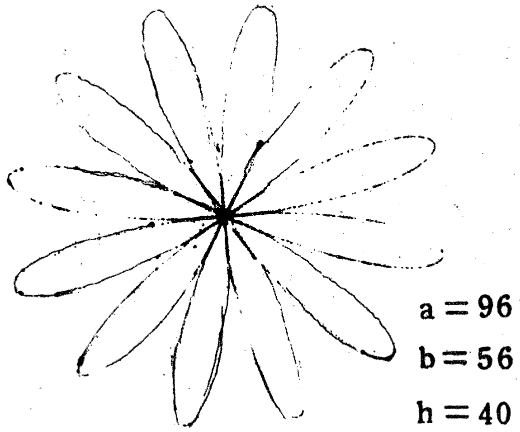
$r=2(a-b)\cos(2m+1)\theta$ 是（2m+1）瓣玫瑰線。

(2) q爲偶數，令 $q=2m$，我們取 $P=m\pm1$（因2m，m±1互質，m必爲偶數）。

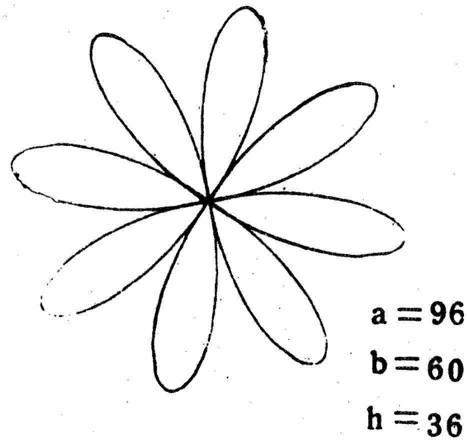
得 $r=2(a-b)\cos m\theta$，是2m瓣玫瑰線。

由以上之討論，我們可迅速地選擇適當的a，b，h 值以畫出5瓣及8瓣，12 瓣玫瑰線。（如圖十七）

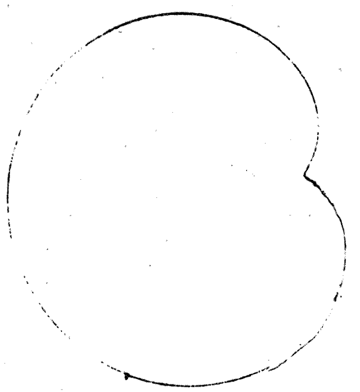




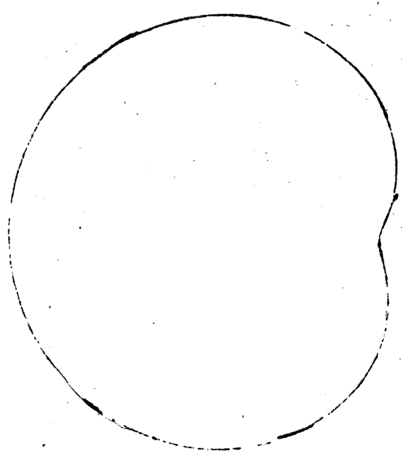
6.在定義中我們曾說，a，b，h 大小沒有限制，現在我們取 a：b ＝ 1：2 來試試看，結果發現這圖形極似蚶線（圖十八、圖十九），蚶線的極座標方程式 $r = m + n \cos\theta$，此處再度引入極座標，但我們發現到，以網絡儀作圖中的蚶線在所取直角座標的原點並非蚶線所取極



圖十七



圖十八（心臟線）



圖十九

座標系的極點，故必先平移，設平移至（ℓ，0），此處ℓ爲一待定值。取 $a=\lambda$，$b=2\lambda$

$$\begin{cases} x=-\lambda\cos t+h\cos\dfrac{t}{2}-\ell & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5) \\ y=-\lambda\sin t+h\sin\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

利用極座標，直角座標轉換式 $r^2=x^2+y^2$

$$r^2=x^2+y^2=\lambda^2\cos^2 t+h^2\cos^2\frac{t}{2}+\ell^2-2\lambda h\cos t\cos\frac{t}{2}$$

$$-2\ell h\cos\frac{t}{2}+2\ell\lambda\cos t+\lambda^2\sin^2 t+h^2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$-2\lambda h\sin t\sin\frac{t}{2}$$

$$=\lambda^2+h^2+\ell^2-2\lambda h\left(\cos t\cos\frac{t}{2}+\sin t\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$-2\ell h\cos\frac{t}{2}+2\ell\lambda\cos t$$

以 $\cos t\cos\dfrac{t}{2}+\sin t\sin\dfrac{t}{2}=\cos\dfrac{t}{2}$ 及 $\cos t$

$=2\cos^2\dfrac{t}{2}-1$ 代換之

上式 $=\lambda^2+h^2+\ell^2-2\lambda h\cos\dfrac{t}{2}-2\ell h\cos\dfrac{t}{2}$

$$+4\ell\lambda\cos^2\frac{t}{2}-2\ell\lambda$$

$$=4\ell\lambda\cos^2\frac{t}{2}-2h(\ell+\lambda)\cos\frac{t}{2}+(\lambda-\ell)^2+h^2$$

我們發現若令 $\ell=\lambda$ 則 $r^2=\left(h-2\lambda\cos\dfrac{t}{2}\right)^2$

故 $r=h-2\lambda\cos\frac{t}{2}$ ……(6)

又在(5)式中由 $x=r\cos\theta$ 計算

$$x=r\cos\theta=\lambda\cos t+\ell\cos\frac{t}{2}-\lambda$$

$$=-2\lambda\cos^2\frac{t}{2}+\lambda+h\cos\frac{t}{2}-\lambda$$

$$=\cos\frac{t}{2}\left(h-2\lambda\cos\frac{t}{2}\right)\Rightarrow$$

$$r=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\cos\theta}\left(h-2\lambda\cos\frac{t}{2}\right)$$

與(6)式比較，$\cos\frac{t}{2}=\cos\theta$，故原方程式化爲

$=h-2\lambda\cos\theta$ 果然是蚶線方程式，且任一蚶線都可用擺線表示之（取圓外擺 $a=b$ 時，亦可得出蚶線方程式，證明跟上面相類似）。

五、網絡儀的應用

網絡儀在劃曲線上應用之廣，從上述中已得到確切的證明，運用它，常見的橢圓、圓、直線、星形線、玫瑰線、蚶線都可毫不費力地劃出，給予我們極大的方便。其實它的用途還不僅如此呢？

在初等幾何中，直尺、圓規是唯一可用的工具，以此劃圖，產生了古代的三大作圖難題：

1.三等分任意角。

2.倍立方（作一正立方體，其體積爲一已知正立方體的兩倍）。

3.方圓問題（作一正方形與已知圓等面積）。

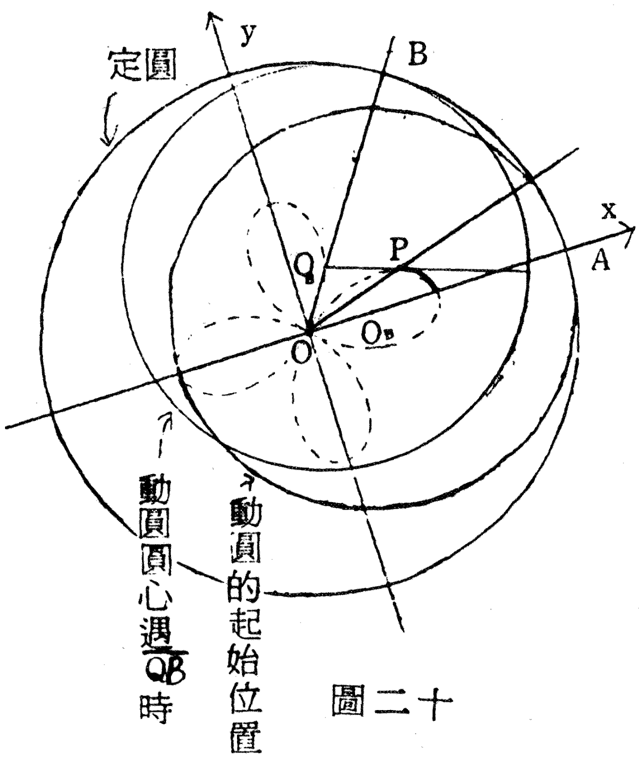
這三個問題已被伽羅瓦（Galois）等人證明出不可幾何作圖了，不過若能突破尺、規限制，則網絡儀正是機械作圖的好工具

，它可輕易的解決上述古代幾何作圖的三大難題。且其作法不止一種，三等分角的作法也很容易推廣到任意角n等分。

之一：任意角三等分，取圓內擺線 $a=4$，$b=3$，$h=1$

$$\text{得}\quad \begin{cases} x=\cos t+\cos\dfrac{t}{3} \\ y=\sin t-\sin\dfrac{t}{3} \end{cases}$$

顯然對任一 t，求得對應的 P（x，y），作出 x，y，再作出 $\cos t$，就可作出 $\cos\frac{t}{3}$，$\frac{t}{3}$ 也就可作出了，但由前面5.的討論，這是一個玫瑰線 $r=2\cos 2\theta$，且 $\theta=\frac{2b-a}{2b}\,t=\frac{t}{3}$ 故得三等分角的簡易作圖如下：（圖二十）



圖二十

已知：∠AOB

求作：三等分角∠AOB

作法：①以0爲原點，$\overline{OA}$爲x軸正向，取一直角坐標系。

②用網絡儀繪一四葉玫瑰線，當動圓圓心正好在$\overline{OB}$上時記下所描述的那一點P的位置。

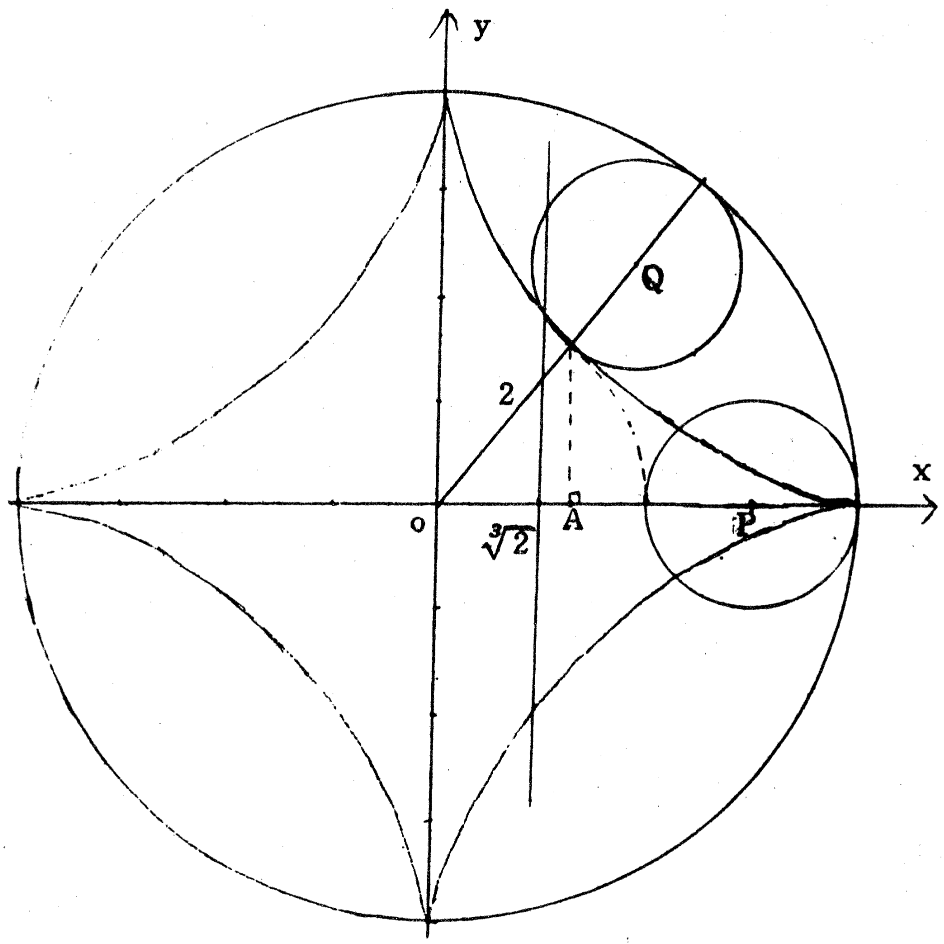
③作$\overline{OP}$則$\angle POB=\dfrac{1}{3}\angle AOB$

之二：倍正方：取圓內擺線 $a=4$，$b=1$，$h=1$

則 $\begin{cases} x=3\cos\theta+\cos 3\theta \\ y=3\sin\theta-\sin 3\theta \end{cases}$

由上之討論，上式即為

$$\begin{cases} x=4\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \cos t=\sqrt[3]{\dfrac{x}{4}} \\ \sin t=\sqrt[3]{\dfrac{y}{4}} \end{matrix}$$



已知：一正立方體，邊長為ℓ（圖二十一）

求作：一正立方體，體積爲$2\ell^3$

作法：①任取一直角座標系，用網絡儀劃一星形線

$$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$$

②作直線$x = 1$交星形線於Q點。

③重新以網絡儀描圖，找出當P點過Q時動圓圓心位置R

④作OR與x軸正向所夾角，並作出此角的餘弦

即 $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

⑤用相似形原理，作圖形的乘法，作出$2 \times \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \times \ell$ 即爲所求的立方體邊長。

之三：方圓問題：方圓問題主要困難是要作出π值。即若圓半徑爲r，正方形邊長爲x，則$\pi r^2 = x^2$，$x = \sqrt{\pi}\, r$。而π是一個超越數，無法用適當的方程式解求之。但作圖時，發現動圓在一直線上滾動之擺線可輕易得之。取

$b = \frac{1}{2}$，$h = \frac{1}{2}$代入(3)式

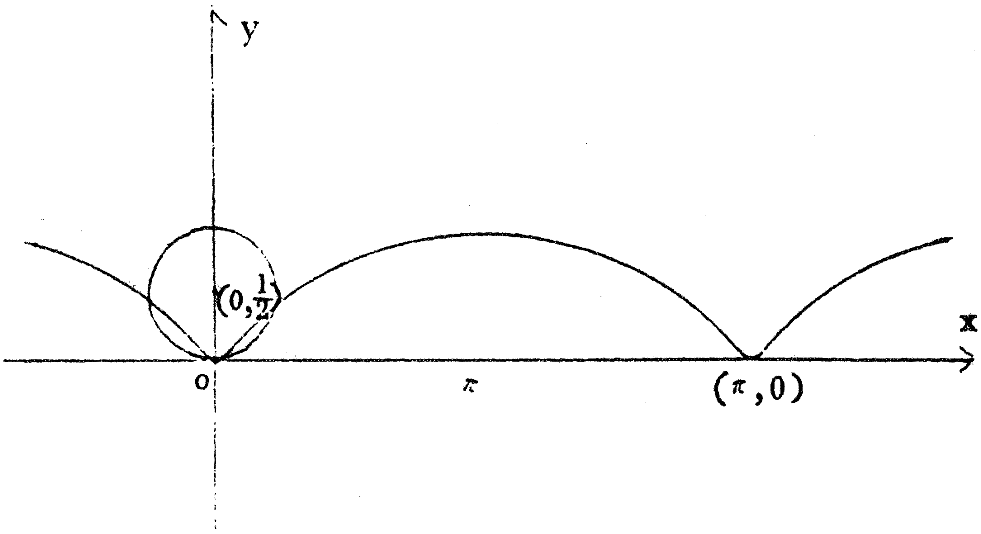
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(t - \sin t) \\ y = \frac{1}{2}(1 - \cos t) \end{cases}$$

在$t = 2\pi$時交x軸於$(\pi, 0)$得之（圖二十二）

六、指導老師的話

1. 爲證實推論的正確性，我們以電腦來處理劃圖的部份，對電腦的了解與應用，又更進一步。
2. 網絡儀爲機械作圖的極好工具，如前所述，它包含了種種曲線，在數學上的應用價值很高。而網絡儀圖形的多變化，告訴我們，如能在課本中提到這樣的工具寓敎於樂，當可相對地提高

學習興趣。



圖二十二

七、參考資料

版面上部分圖形由電腦劃出，直接對電視劃面照相附錄出原在電腦之程式（BASIC）。

1.圓內擺線

```
10 INPUT A,B,H
20 HGR : HCOLOR= 3
30 D= 96/(ABS(A-B)+ABS(H))
40 FOR I=0 TO 360*B STEP 2
50 M=(A-B)*COS(I/57.29578)+H*COS(
   ((A/B-1)*I/57.29578)
60 N=(A-B)*SIN(I/57.29578)-H*SIN
   ((A/B-1)*I/57.29578)
70 HPLOT D*M+140,D*N+96
80 NEXT I
```

2.圓外擺線

```
10 INPUT A,B,H
```

```
20  HGR : HCOLOR = 3
30  D = 96/( ABS( A+B )+ABS(H))
35  FOR  I=0  TO  360*B  STEP  2
40  M= ( A+B ) *COS ( I / 57.29578 )
        -H * COS( (A/B + 1 ) * I / 57.29578 )
50  N = ( A+B ) * SIN ( I / 57.29578 )
        - H* SIN ( A/ B+1 ) * I / 57.29578 )
60  HPLOT  D*M+ 140 ,D*N+96
70  NEXT  I
```

評語：1.將齒輪機械作圖所得的各種圖形，利用方程式表示出來，並探討各種特別情形，更進一步將這種機械作圖應用到古典幾何的一些作圖上，如三角分任意角，倍積，方圓等問題。

2.在本作品中，雖然有些是已知的結果，如擺線、玫瑰線、心臟線等，但作者對於這些主題作了很完整的討論，有些分析也很深入，誠屬難能可貴。

3.作者雖然是國三的學生，但根據面談的判斷，他應有高三，甚至大一學生的程度，這些都他本人課餘自學的成結果，若非資賦優異學生，很難有如此突出的表現。建議將他推薦到資優學生研習營，繼續觀察深造！

4.本作品若能更近一步加以輔導，例如加重，加深作者本身所得結論的分析與探討，應可推薦代表我國參加國際科展。