週期與非週期函數四則運算有否封閉性

高中教師組數學科第三名

作　　者：吳建生

高雄市立高雄女子高級中學

一、動機與目的：

(一)動機：

1. 在高中數學課本第三冊三角函數的週期函數一節中曾定義週期函數如下：

當∃常數 $P \neq 0$，$P \ni \forall x$，$f(x)=f(x+p)$ 則稱 f 爲週期函數。又若此 p 爲最小的正數，則稱 f 之週期爲 p，那麼由定義可推知週期函數不一定有週期，於是產生了問題A。

◎問題A：在何種條件下週期函數必有週期？

※Dirichlet function $f(x)=\begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in R \setminus Q \end{cases}$ 是週期函數但無週期。

2. 再看下面幾個例子及引出之問題：

例1：$x \sin x$ 爲非週期函數。

證明：（反證法）假設 $x \sin x$ 爲週期P之週期函數，則 $\forall x$

$x \sin x=(x+p)\sin(x+p)$，當 $x=0$，得 $\sin P=0$ (一)

當 $x=\frac{\pi}{2}$ 時，由 $\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=(\frac{\pi}{2}+p)\sin(\frac{\pi}{2}+p)$ 得

$\cos p=\frac{\pi}{\pi+2\pi}$ (二)，由(一)，(二)故 $\cos^2 p+\sin^2 p$

$$=(\frac{\pi}{\pi+2p})^2<1$$

矛盾，故 $x \sin x$ 非週期函數。

◎問題B：x 爲非週期函數 $\sin x$ 爲週期函數，那麼若 f 爲週期函數 g 爲非週期函數 fg 是否恒非週期函數？

例 2：若 $\lambda \in R \setminus Q$，則 $\sin x+\sin \lambda x$ 非週期函數。

證明：（反證法）設 $\sin x+\sin \lambda x$ 爲週期 p 之週期函數，即 $\forall x$，$\sin x+\sin \lambda x=\sin(p+x)+\sin(\lambda p+\lambda x)$

由 $x=0$，得 $\sin p+\sin \lambda p=0$ ㈠，由 $x=\pi$，得 $-\sin p+\sin(\lambda\pi+\lambda p)=\sin \lambda\pi$ ㈡，由 $x=-\pi$，得 $-\sin p+\sin(\lambda p-\lambda\pi)=-\sin \lambda\pi$ ㈢，再由㈡，㈢得 $-2\sin p+2\sin \lambda p\cos \lambda\pi=0$ ㈣，由㈠ $\sin \lambda p=-\sin p$ 代入㈣得 $2\sin \lambda p(1+\cos \lambda\pi)=0$，$\because 1+\cos \lambda\pi \neq 0$，

$\therefore \sin \lambda p=0$ 代入㈠故 $\sin p=0$，則 $\exists\, m$，$n \in z$，$(n \neq 0) \ni \lambda p=m\pi$，$p=n\pi$，故 $\lambda=m/n \in Q$ 與 $\lambda \in R \setminus Q$ 矛盾，故得證。

◎問題 C：$\sin x$ 與 $\sin \lambda x$ 各爲週期 2π，$2\pi/\lambda$ 那麼若 f 與 g 各爲週期 p 與 q 之函數，$f+q$ 爲非週期函數的充要條件是否爲不存在 $\omega \in Q \ni p=q\omega$？

◎問題 D：由問題 B 與 C 推廣週期與非週期函數間的四則運算後是週期函數嗎？

例 3：$\sin|x|$ 非週期函數

證明：（反證法）假設 $\sin|x|$ 爲週期 p 之函數，則 $\forall x$ $\sin|x|=\sin|x+p|$，由 $x=0$，$\frac{\pi}{2}$，得 $\sin p=0$，$\cos p=1$，故 $p=2K\pi$，$K \in N$，即 $\sin|x|=\sin|x+2K\pi|$，再令 $x=-\frac{\pi}{4}$，得 $\sin|x|=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

但 $\sin|x+2K\pi|=\sin\frac{7}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，矛盾，故得證。

◎問題 E：若 $f(x)$ 爲週期函數，則 $f(|x|)$ 仍爲週期函數之充要條件爲何？

㈡目的：

解決上述五個問題，其實問題 D 涵蓋了問題 B 與 C，在以下過程中將提出引理㈠，㈡而導出定理，由引理㈢導出其逆定理而再加上幾個系，問題 D 迎刃而解，而其中引理㈢專門解決問題 A，最後再由系 8 解決問題 E，而作一個總結論。

二、內容與過程：

※以下函數如不指明均指 $R \to R$ 的連續函數。

※爲使過程方便將週期函數定義略爲合理的附加。

(一)定義：週期函數定義照前，另外若 $f = C$（常數），則稱 f 爲週期 0 之週期函數。

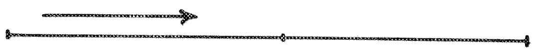
(二)引理 1.：

若 f 爲連續的週期函數，則 f 有界。

說明：若週期 $p = 0$ 即 $f = C$，當然成立。

若 $p > 0$，則定義域可只考慮〔$0, p$〕，而緊緻加上連續也必有界。

引理 2.：$L = \overline{AB}$，$\overline{AB} = 1$，A、B 兩點合而爲一（或把線段看成圓周），今以 A 爲起點向 B 點以 λ 長跳動（$\lambda \in R \setminus Q$），跳到 p_1 點，如圖



$A(0)$　　$p_1(\lambda - [\lambda])$　　$B(1)$

（〔 〕爲高斯符號），同理 p_1 點向 B 點跳動到 p_2 點……

若 $D = \{p_i \mid i \in N\}$，則 $\overline{D} = L$（即 D 爲 L 之 dense set）

證明：只要原以 λ 長跳動轉換成以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ……之一無窮數列跳動且 $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$，則 $\overline{D} = L$

(1)令 $\lambda_1 = \lambda - [\lambda]$，而 $0 < \lambda_1 < 1$ 且 $\lambda_1 \in R \setminus Q$ 即以 λ_1 長跳動。

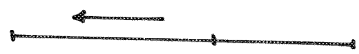
(2)$\because \lambda_1 \in R \setminus Q \therefore \exists K \in N \ni K\lambda_1 < 1 < (K+1)\lambda_1$，如圖

且 $BC = 1 - K\lambda_1 \neq \frac{1}{2}\lambda_1$，故：

$A(0)$　$C(K\lambda_1)$　$B(1)$

①若 $1 - K\lambda_1 < \frac{1}{2}\lambda_1$，則令

$\lambda_2 = 1 - K\lambda_1$，此時如圖即以 λ_2 長向A點跳動。（即 λ_1 長跳K次看成一次）



$A(1)$　$C(\lambda_2)$　$B(0)$

②否則得 $1-K\lambda_1>\frac{1}{2}\lambda_1\rightarrow 2K\lambda_1+\lambda_1<2\rightarrow 2(K+1)\lambda_1$

$-2<\lambda_1\rightarrow 0<(K+1)\lambda_1-1<\frac{1}{2}\lambda_1$ ，此時取

$\lambda_2=(K+1)\lambda_1-1<\frac{1}{2}\lambda_1$ 如圖

A(0)　D(λ_2)　　B(1)

即由C點跳至D點，再換成 λ_2 長向B點跳動。

③如法泡製，可得無窮數列〔λ_n〕且 $\forall_i\in N$ ，$\lambda_{i+1}<\frac{1}{2}\lambda_i$ 。故 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$ 即可以任意短之長跳動，當可逼近L中任一點，若令 $D'=\{x\mid x$ 爲以 λ_i 長跳動之點 $\}$ 顯然 $D'\subset D$，今 $\overline{D'}=L$ 即 $\overline{D}\supset L$，又 $\overline{D}\subset L$，故 $\overline{D}=L$（即 $\forall S\in L$，$\forall\Sigma>0\ \exists T\in D\ni|T-S|<\Sigma$）

㈢定理：$f(x)$、$g(x)$ 分爲週期p與q之函數，若 $\not\ni\omega\in Q\ni p=q\omega$，則 $f(x)+g(x)$ 非週期函數。

證明：（反證法）

1. 由已知，得 $p/q\in R\setminus Q$，今假設 $f(x)+g(x)$ 爲週期 r 之週期函數，則 $\forall x$，$f(x)=f(x+p)$ ㈠ $g(x)=g(x+q)$ ㈡ $f(x)+g(x)=f(x+r)+g(x+r)$ ㈢ 由 $p/q\in R\setminus Q$，得 $p/r\in R\setminus Q\vee q/r\in R\setminus Q$，可令 $p/r\in R\setminus Q$，（$q/r\in R\setminus Q$ 同理），由㈢得 $f(p+q+r)+g(p+q+r)=f(p+q)+g(p+q)$，$f(p+r)+g(p+r)=f(p)+g(p)$，由㈠㈡化成 $f(q+r)+g(p+r)=f(q)+g(p)$ ㈣，$f(r)+g(p+r)=f(0)+g(p)$ ㈤，㈣－㈤得 $f(q+r)-f(r)=f(q)-f(0)$，同理可得 $f(2q+r)-f(2q)=f(r)-f(0)$ by induction，$\forall n\in N$，$f(nq+r)-f(nq)=f(r)-f(0)=C$

2. 把〔0，p）看成一個單位長，$\because p/q\in R\setminus Q$ $\therefore$ q看成無理數，又0點與p點合一，故由引理(2)知 nq 之點在〔0，p〕造成 dense set D 即 $\forall x\in D$，$f(x+r)-f(x)=C$ ，由 f 爲連

續週數，得 $\forall x \in [0, p]$，$f(x+r)-f(x)=C$，即 $\forall x \in R$，
$f(x+r)-f(x)=C$

(1)若 $C=0$，則 $f(x+r)=f(x) \to \forall n \in N$ $f(nr)=f(0)$
$\because p/r \in R \setminus Q$ $\therefore$ nr 之點亦造成 $[0, p]$ 之 dense set，
同理可得 $\forall x \in R$，$f(x)=f(0)$ 故 $f(x)$ 爲常數函數，即
$p=0$ 與已知矛盾。

(2)若 $C \neq 0$，由 $f(x+r)=f(x)+C$ 得 $\forall n \in N$，$f(nr)=f(0)+nC \to f$ 無界，由引理(1)矛盾。

綜合(1)(2)，故得證。

(四)系 1：$f(x)$ 與 $g(x)$ 分爲週期 p 與 q 之函數，若 $\not\exists\, \omega \in Q \ni p = q\omega$，則 $f(x)-g(x)$ 非週期函數。（同理）

系 2：$f(x)$ 與 $g(x)$ 與系 1 雷同，則 $f(x)g(x)$ 非週期函數。

證明：（反證法）同理可得 $f(q+r)g(p+r)=f(q)g(p)$ (一)，$f(r)g(p+r)=f(0)g(p)$ (二)，$\because f$，g 有界 $\therefore$ 可加一正數，使 $\forall x$ $f(x)>1$，$g(x)>1$ (一)÷(二)，得
$f(q+r)/f(q)=f(r)/f(0)=C>0$，即 $f(q+r)=C \cdot f(q)$ 同理。$\forall n \in N$，$f(nq+r)=C \cdot f(nq)$ $\because p/q \in R \setminus Q$ 同理。

$\therefore \forall x \in R$，$f(x+r)=C\,f(x)$ 又 $\because p/r \in R \setminus Q$ 同理
$\therefore \forall n \in N$，$f(nr)=C^n \cdot f(0)$

1. 若 $C>1$，由引理(一) f 有界而矛盾
2. 若 $C=1$，得 $f(x)=f(0) \to p=0$ 與已知矛盾
3. 若 $C<1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nr)=0$ 與 $\forall x$ $f(x)>1$ 矛盾

由 1. 2. 3.，故得證。

系 3：$f(x)$ 與 $g(x)$ 與上雷同，但 $\forall x$ $g(x) \neq 0$，則 $f(x) \setminus g(x)$ 非週期函數（同理）。

(五)引理 3. 若 $\exists$ 常數 r，$r \neq 0$，$\ni \forall x$，$f(x+r)=f(x)$，則 f 必有週期 p 且 $p=0$ 或 $p=|r|/K$，$K \in N$。（即週期函數若連續則有週期）

證明：（可令 $r>0$）

1. 若不存在 r'，$\ni 0<r'<r$ 且 $\forall x\ f(x+r')=f(x)$，則依定義，f 之週期為 r，此時 $p=|r|$ 。

2. 若存在 r'，$\ni 0<r'<r$ 且 $\forall x\ f(x+r')=f(x)$

(1)若 $r'/r\in R\setminus Q$，則 $\forall x\ f(x)=f(x+r)=f(x+r')$ $\rightarrow f(0)=f(r)=f(r')\rightarrow f(nr')=f(0)$ 同理得 $\forall x\ f(x)=f(0)$，此時 $p=0$ 。

(2)若 $r'/r\in Q$，可令 $r'=br/a\ (a,b\in N)$ (a，b互質)，再令 $r_1=r/a$ 則 $r'=br_1$・$r=ar_1$，$\because (a,b)=1$ $\therefore \exists m$・$n\in N\ni ma+nb=1$，即 $mar_1+nbr_1=r_1$ $\rightarrow mr+nr'=r_1$，由 $\forall x\ f(x)=f(x+r')=f(x+r)$，得 $f(x)=f(x+mr+nr')=f(x+r_1)$

如法泡製，若回至(一)，則 $p=0$，否則得一數列 $r,r_1,r_2,\cdots\cdots$。且 $\forall x$，$f(x)=f(x+r)=f(x+r_1)$ $\cdots\cdots$，$r=ar_1, r_1=a_1r_2, r_2=a_2r_3\cdots\cdots(a_i\in N)$

①若其為無窮數列，則 $\lim\limits_{n\to\infty}=0$ $\because f$ 連續 $\therefore \forall x$，$f(x)=f(0)$，此時 $p=0$

②若為有限數列，設末項為 r_n，此時 $p=r_n=\dfrac{|r|}{K}$

綜合以上，故得證。

逆定理：$f(x)$ 與 $g(x)$ 分為週期 p 與 q 之函數，若 $\exists\ \omega\in Q$，$\ni p=q\omega$，則 $f(x)+g(x)$為週期函數且其週期為 0 或 r/K，$K\in N$，r 為 p 與 q 之最小公倍數。

(※上式等值於若 $f(x)+g(x)$ 非週期函數則 $\not\exists\ \omega\in Q$ $\ni p=q\omega$)

證明：(若 $p=0\vee q=0$ 當然成立，故可令 $p\neq 0$，$q\neq 0$)

(1)由 $p/q\in Q$，$\exists m$・$n\in N$，$(m\cdot n)=1\ni p/q=n/m$ 即 $mp=nq$，令 $r=mp=nq$，此 r 為 p，q 之最小公倍數。

(2) $f(x+r)=f(x)$，$g(x+r)=g(x)$

$\therefore f(x+r)+g(x+r)=f(x)+g(x)$ 由引理(三)，

故得證。

㈥系 4 ：逆定理中若 $f(x)+g(x)$ 改成 $f(x)-g(x)\vee f(x)g(x)$ $\vee f(x)/g(x)$ （但 $g(x)\neq 0$ ），仍然有相同之理論。（同理）

系 5 ：若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 分為週期 p 與 q 之函數，其 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$，$f(x)/g(x)$ （但 $g(x)\neq 0$ ）仍為週期函數之充要條件為 $\exists\,\omega\in Q$，$\ni p=q\,\omega$。

系 6 ：若 $f(x)$ 為週期函數 $g(x)$ 非週期函數，則 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$，$f(x)/g(x)$，$g(x)/f(x)$ 可能是週期或非週期函數。

例：1. $f(x)+g(x)$

若 $f(x)=\sin x$，$g(x)=x$ ，則 $f(x)+g(x)=\sin x+x$ 非週期函數。

若 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\sin\sqrt{2x}-\sin x$，則 $f(x)+g(x)=\sin\sqrt{2x}$ 週期函數。

2. $f(x)-g(x)$ 同 1.。

3. $f(x)g(x)$

$f(x)=\sin x$，$g(x)=x$，則 $f(x)g(x)=x\sin x$ 非週期函數。

$f(x)=\sin x+2$，$g(x)=\cos\sqrt{2x}/\sin x+2$，則 $f(x)g(x)=\cos\sqrt{2x}$ 週期函數。

4. $f(x)/g(x)$ 與 $g(x)/f(x)$ 與 3. 同。

系 7 ：若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 俱非週期函數，則 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$f(x)/g(x)$ 可能是週期或非週期函數。

例：1. $f(x)+g(x)$

若 $f(x)=x$，$g(x)=x^2$ ，則 $f(x)+g(x)=x^2+x$ 非週期函數。

若 $f(x)=\sin x-x$，$g(x)=x-\sin x+\sin\sqrt{2x}$，則 $f(x)+g(x)=\sin x\sqrt{2x}$ 為週期函數。

2. $f(x)-g(x)$ 與 1. 同。

3. $f(x)g(x)$ $\left\{\begin{array}{l}\text{若 } f(x)=x^2+1,\ g(x)=\sin x/x^2+1,\text{則 } f(x)g(x)=\sin x \text{ 週期函數。} \\ \text{若 } f(x)=x^2+1,\ g(x)=x,\text{則 } f(x)g(x)=x^3+x \text{ 非週期函數。}\end{array}\right.$

4. $f(x)/g(x)$ 與 3. 同。

系 8 ：若 $f(x)$ 爲週期 p 之函數， $f(x)$ 爲偶函數 $\leftrightarrow f(|x|)$ 爲週期 q 之函數。

證明 1. →若 $f(x)$ 爲偶函數，

而 $f(|x|)=\begin{cases} f(x) & x\geq 0 \\ f(-x) & x<0 \end{cases}$ 但 $f(-x)=f(x)$

此時 $f(x)=f(|x|)$，當然成立。

2. →若 $f(|x|)$ 爲週期 q 之函數：

(1)若 $q=0$ 自然成立。

(2)若 $q>0$，假設 $p/q\in R\setminus Q$，由 $x>0$， $f(|x|)=f(x)\rightarrow f(x)=C\rightarrow q=0$，故 $p/q\in Q$，則 $\exists\, r>0$，$\ni f(x+r)=f(x)$ (一)， $f(|x+r|)=f(|x|)$ (二)，任意給 $a>0$，則由(一) $f(-a)=f(r-a)$，由(二) $f(a)=f(|r-a|)$ 。

①若 $0<a\leq r$

則 $f(a)=f(|r-a|)=f(r-a)=f(-a)$

②若 $a>r$，則可令 $a=nr+\sum$， $n\in N$， $0\leq\sum<r$

則 $f(a)=f(|r-a|)=f(a-r)=f(\sum)$

$f(-a)=f(r-a)=f(-\sum)$，由(一) $\because f(\sum)=f(-\sum)$ $\therefore f(a)=f(-a)$

由(一)，(二)故 $\forall\, x$， $f(x)=f(-x)$，即 $f(x)$ 爲偶函數。

(七)系 9 ：由引理(三)，可知週期函數必有週期的充分條件是它爲連續函數。

總結： 1. 本文最主要的在於其定理及逆定理。

2. 定理逆定理加上系 1 、系 2 、系 3 、系 4 而以系 5 作個總結，處理了週期函數與週期函數的四則運算問題。
3. 系 6 及系 7 處理了週期函數與非週期函數或非週期函數間的問題。
4. 由 2. 3. 解決了問題 D（問題 B，C 自然迎刃而解）。
5. 系 8 解決了問題 E。
6. 系 9 解決了問題 A。

評語：

對週期函數四則運算之封閉性有完整的分析。