

# 慣性天平實驗的進一步探討

高中教師組物理科第二名

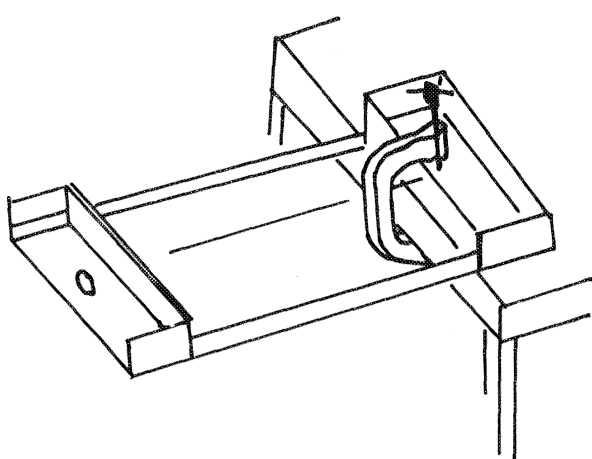
省立板橋高級中學

作者：劉時通 沈嘉祥

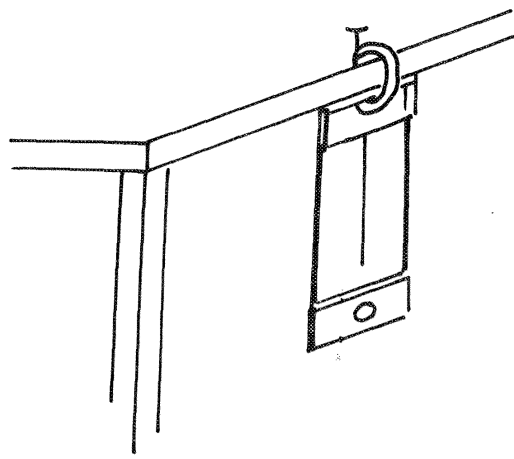
## 一、動機與目的：

※※“質量”屬於物理學之基本量，一般觀念認為測量質量之儀器就是等臂天平三樑天平，然而這類天平必須要在重力場中，才可比較待測物和標準質量關係，此種方法測出質量稱“重力質量”若是在重力場是 0 或失重之處就必須藉用其他觀念測量質量。在高中物理提到“慣性質量”即利用 S.H.M. 週期  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$  測物體質量就是其中一種方法。

※※實驗課本中討論到慣性天平水平放置和鉛直放置時如圖(一)圖(二)所示，其週期不相同，於是想到二點：(1)角度  $\theta$  與週期  $T$  的關係如何的改變。(2)不同方向大小的外力是否對慣性天平鋼片彈力常數有影響。這兩點乃是本實驗之目的。



圖(一)水平放置



圖(二)鉛直放置

## 二、實驗儀器：

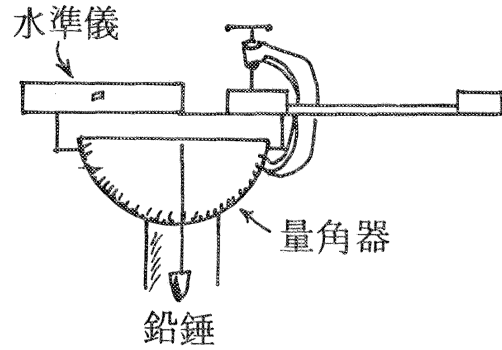
1. 重力天平 2. 改良之慣性天平 3. 停錶 4. D型夾 5. 水準儀  
6. 砝碼 7. 定滑輪 8. 可旋轉角度之座架 9. 鉛錘 10. 量角器

### 三、實驗步驟和結果：

(一)各種不同  $m$  質量時，角度與週期的關係。

#### 1. 過程：

- (1)歸零先用水準儀使慣性天平保持水平後，用量角器調整座架如圖(三)，使鉛錘線通過  $90^\circ$  之位置。



圖(三)歸零

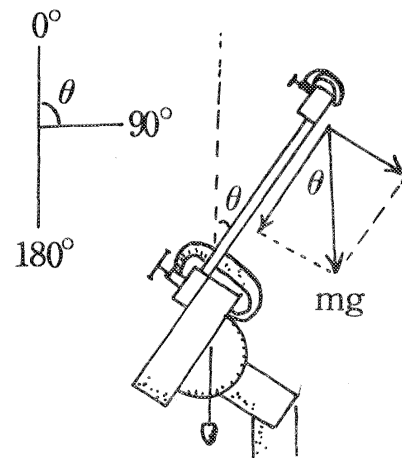
- (2)將一個D型夾置於天平之中央，測量  $0^\circ$  時振動 100 次所須時間，以後每次增加  $20^\circ$  一直到  $180^\circ$  時停止。(注意：各部聯接處務須緊密，以免發生共振之現象。)
- (3)同樣步驟分別作 D 型夾 2 個 D 型夾 3 個和 450 克的實驗。

#### 2. 結果：

- (1)不同質量時  $T - \theta$  關係如表(一)。
- (2)作  $T$  與  $\theta$  之函數圖形如附圖 1—1, 1—2, 1—3, 1—4。
- (3)作  $T$  與  $\cos \theta$  之函數圖形如附圖 1—5, 1—6, 1—7, 1—8。

#### 3. 分析：

- (1)週期與  $\cos \theta$  成線性關係可用方程式  $T(\theta) = A \cos \theta + T(90^\circ)$  其原因乃是質量在慣性天平方向重力的分力  $mg \cos \theta$  如圖(四)。
- (2)  $\cos \theta - T$  圖形之斜率與  $m$  有關，其原因可由公式  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$  中看出，當



圖(四)平行於慣性天平分力  $mg \cos \theta$

$\theta$  一定時  $m$  愈大，週期  $T$  愈大。

(3) 比較附圖 1—1，1—2，1—3，1—4，測量值與理論值可發現質量愈小其誤差愈小。

(二) 1 平行於慣性天平和垂直於慣性天平之作用力對彈力常數  $K$  值之影響。

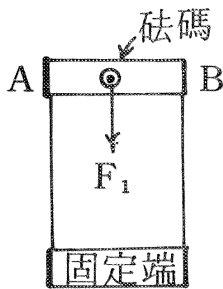
2 不受力與受力時質量與週期的關係。

1 過程：

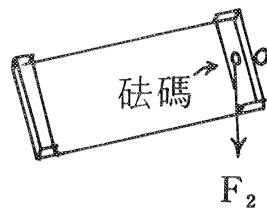
(1) 定義  $F_{\perp}, F_{\parallel}, k_{\perp}, k_{\parallel}, k', k''$  符號。

a  $F_{\perp}$ : 天平鉛直放置時在 A B 間置砝碼時  $F_{\perp} =$  (砝碼 + 秤盤) 重如圖(五)所示，即平行於慣性天平之力。

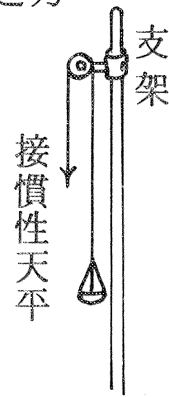
b  $F_{\parallel}$ : 天平水平放置時在秤盤上置砝碼時  $F_{\parallel} =$  (砝碼 + 秤盤) 重如圖(六)所示，即垂直於慣性天平之力。



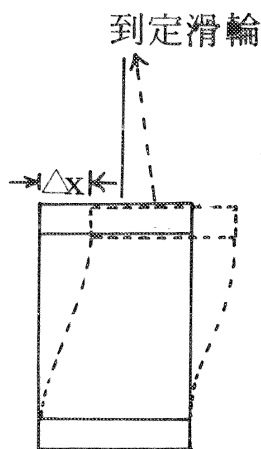
圖(五)



圖(六)



圖(七)



$l$  : 天平到定滑輪之繩長

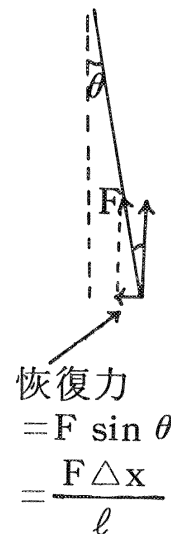
$\Delta x$  : 天平振動位移

$F$  : 尼龍繩另一端秤盤和砝碼之重量。

故  $k', k''$  可定義

$$k' = \frac{F \sin \theta}{\Delta x}, \text{ 若 } l \gg \Delta x$$

$$= \frac{F}{l}$$



圖(八)  $k', k''$  的定義

(表一)

$\theta$ \begin{matrix} T \\ m \end{matrix}	1 D + 盤		2 D + 盤		3 D + 盤		450	
0°	36.3	36.3	46.4	46.2	56.6	56.64	74.2	74
	36.3		46.1		56.6		74.2	
	36.2		46.1		56.7		73.6	
20°	36.3	36.17	45.8	45.9	56.2	56.14	73.0	73.2
	36.0		45.9		56.1		73.4	
	36.2		45.9		56.1		73.2	
40°	35.5	35.82	45.5	45.3	53.5	53.97	70.8	70.1
	36.2		45.3		54.4		71.0	
	35.7		45.4		54.0		70.9	
60°	35.1	35.1	43.7	43.9	51.7	51.9	67.0	67.1
	35.0		44.1		52.1		67.4	
	35.1		43.8		51.9		67.2	
80°	34.4	34.3	42.9	42.5	49.8	49.84	62.6	60.2
	34.3		42.2		49.8		62.6	
	34.2		42.3		49.9		56.2	
100°	33.6	33.52	41.1	41.0	47.8	47.74	57.8	57.8
	33.5		41.0		47.7		57.8	
	33.5		41.0		47.7		57.8	
120°	32.8	32.75	39.4	39.5	45.7	45.6	54.2	53.3
	32.7		39.6		45.5		53.7	
	32.7		39.5		45.6		54.0	
140°	32.3	32.2	38.8	38.6	44.3	44.1	50.5	50.7
	32.1		38.6		44.1		51.0	
	32.2		38.2		44.0		50.8	
160°	31.9	31.8	37.8	37.9	43.0	42.74	49.3	49.2
	31.8		37.8		42.7		49.0	
	31.7		38.0		42.5		49.15	
180°	31.6	31.6	37.4	37.6	42.5	42.44	48.6	48.4
	31.6		37.6		42.4		48.2	
	31.6		37.8		42.4		48.2	
說明	1 本表所測時間以 100 次計算。 2 實驗所用碼錶最小刻度是 0.1 秒測量 100 次，誤差是 $10^{-3}$ 秒。							

註：cos  $\theta$  - T 之求法：

令  $T(\theta)$  表示天平在  $\theta$  角振動 100 次的時間

$$A = \frac{T(0^\circ) - T(180^\circ)}{2}$$

$$T(90^\circ) = \frac{T(0^\circ) + T(180^\circ)}{2}$$

$$T(\theta) = T(90^\circ) + A \cos \theta$$

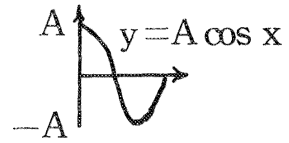
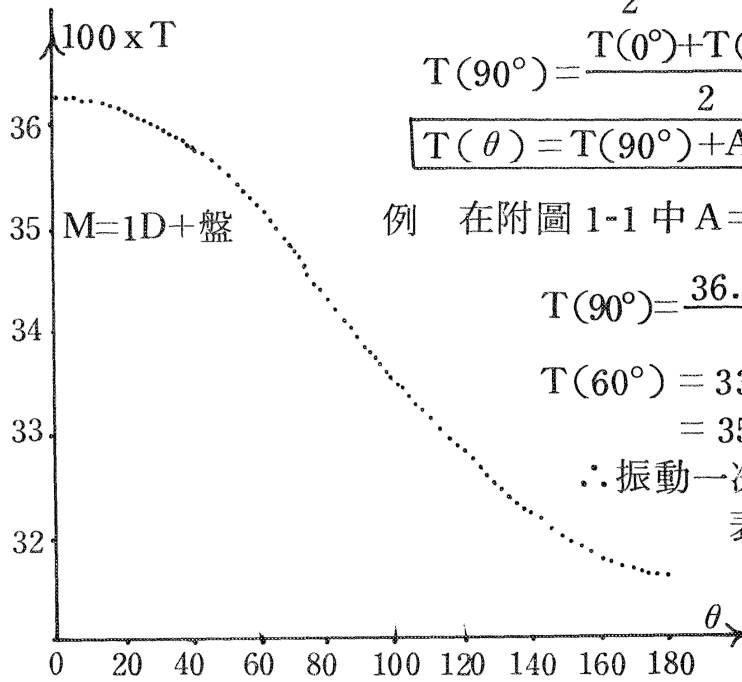


圖 1-1



例 在附圖 1-1 中  $A = \frac{36.3 - 31.6}{2} = 2.35$

$$T(90^\circ) = \frac{36.3 + 31.6}{2} = 33.95$$

$$T(60^\circ) = 33.95 + 2.35 \times \cos 60^\circ = 35.125 \text{ —— 理論值}$$

$\therefore$  振動一次平均時間：

表(-) 理論值 = 0.35125

測量值 = 0.351

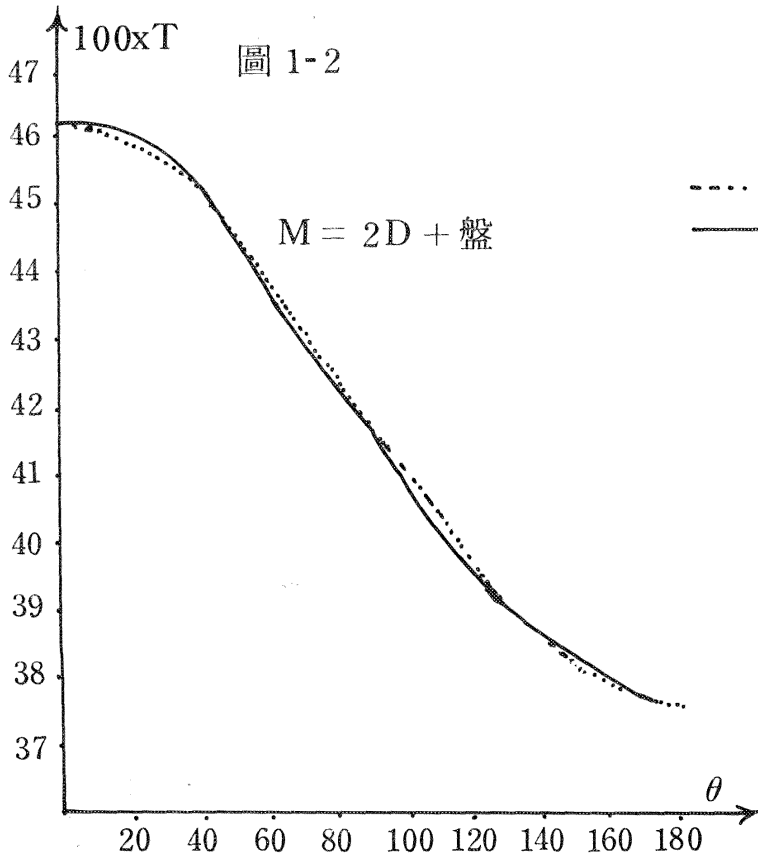


圖 1-2

..... 測量值

—— 理論值

圖 1-3

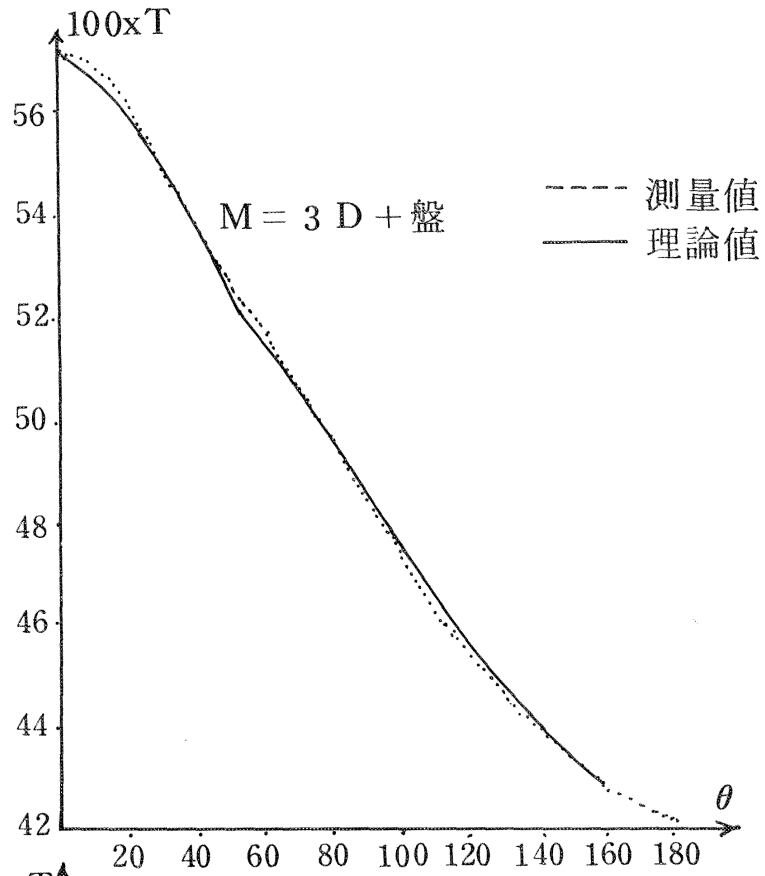


圖 1-4

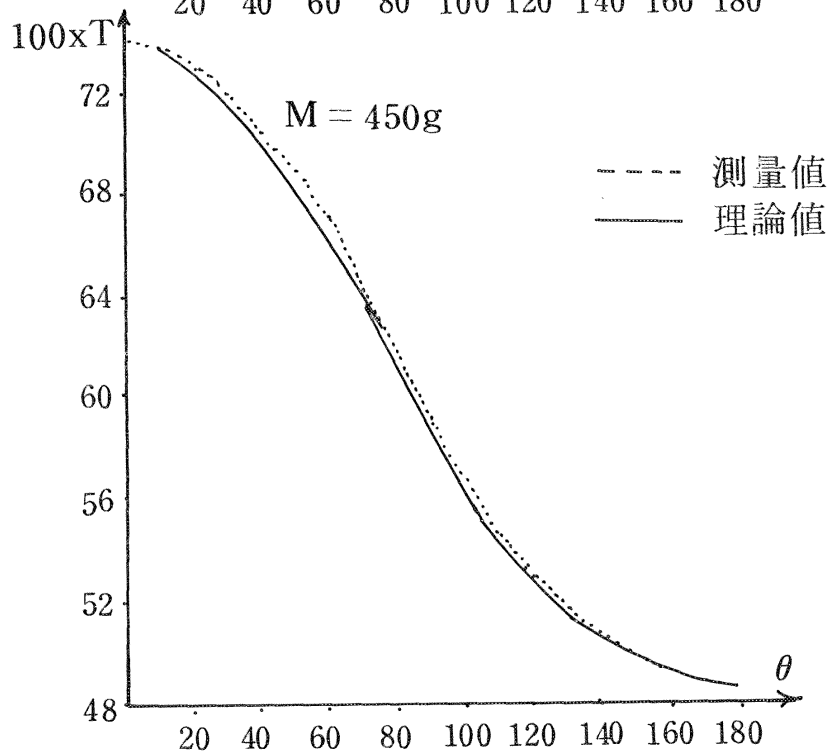


圖 1-5

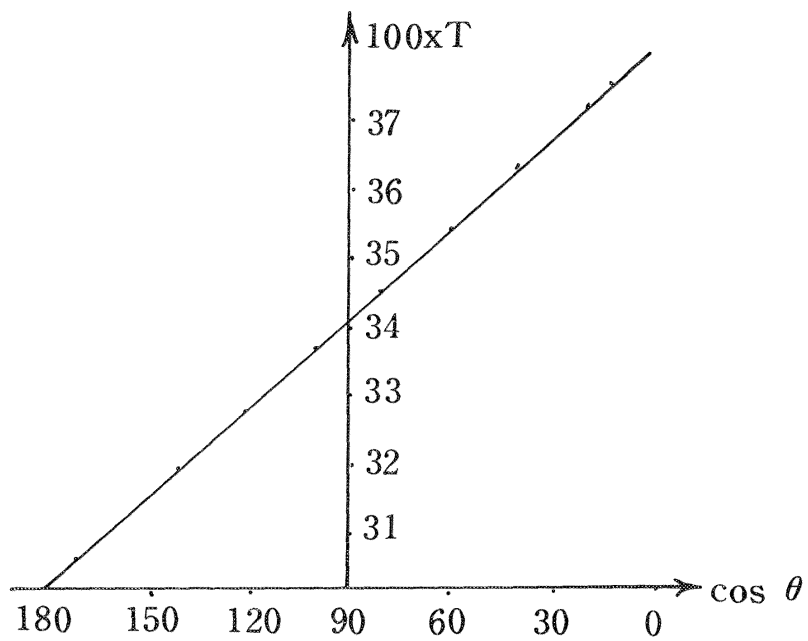


圖 1-6

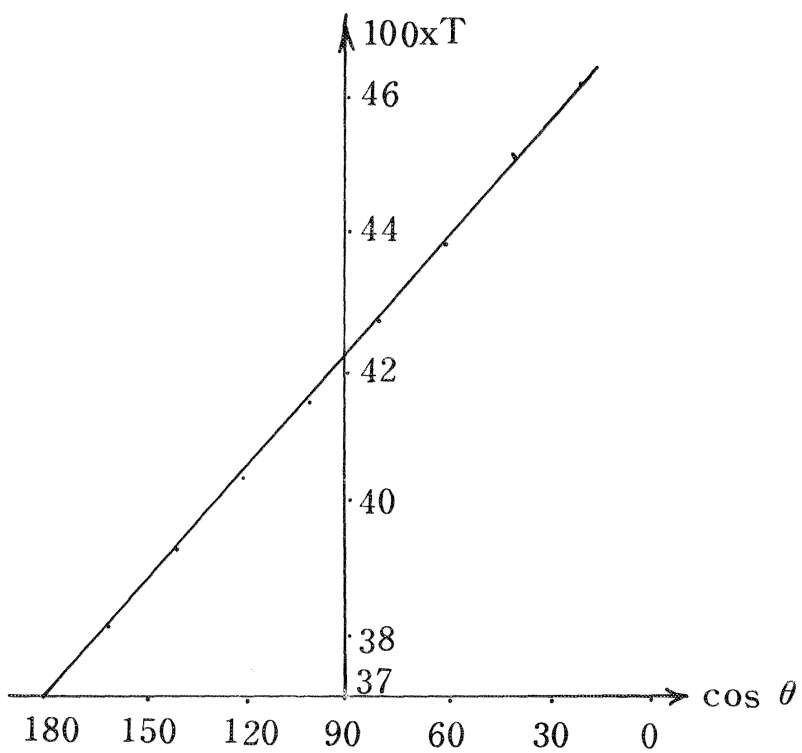


圖 1-7

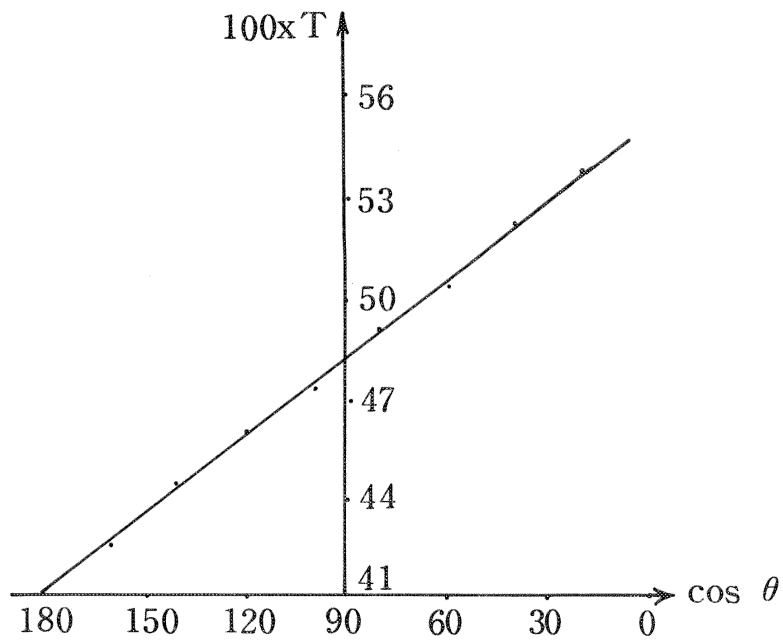
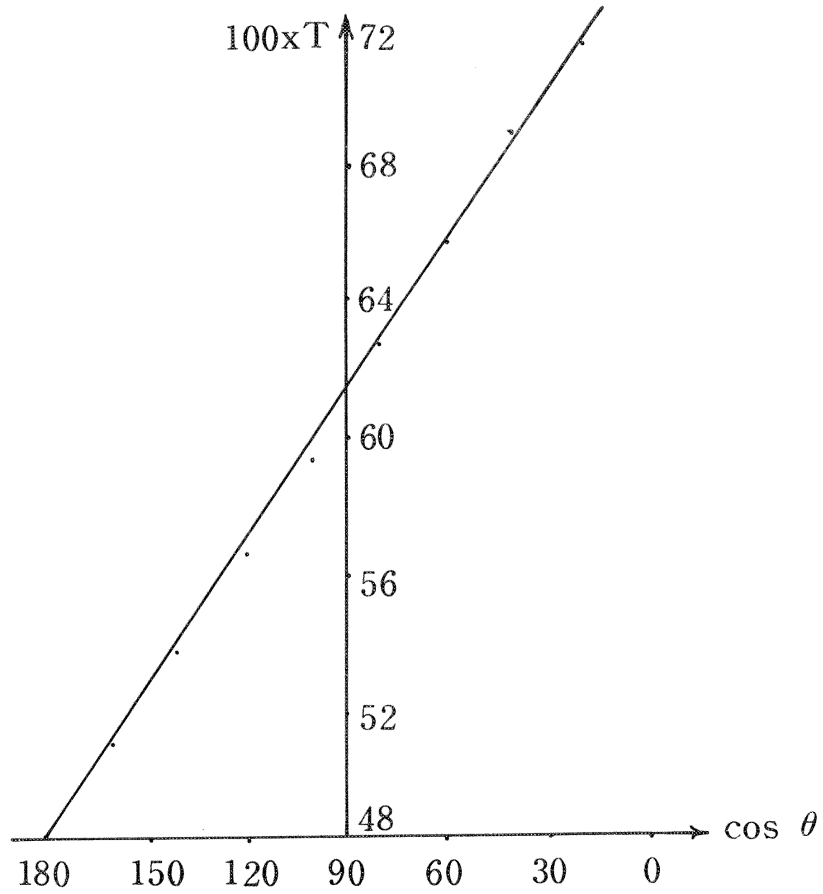


圖 1-8





- c  $k_0$ : 慣性天平不受任何外力作用時鋼片之彈力常數。
- d  $k_{\perp}$ : 慣性天平受  $F$  作用時鋼片之彈力常數。
- e  $k_{\parallel}$ : 慣性天平受  $F$  作用時鋼片之彈力常數。
- f  $k'$ : 天平鉛直放置時，在 0 點用長之尼龍線經定滑輪連接重物（秤盤 + 砝碼）時尼龍繩之分力使慣性天平恢復力如圖(八)所示。
- g  $K''$ : 天平水平放置時在 0 點用長之尼龍線經定滑輪連接重物（秤盤 + 砝碼）時尼龍線之分力使慣性天平恢復力。

- (2) 將慣性天平鉛直放置，用不同砝碼放置天平（ $F_{\perp}$  改變時），在其旁施一外力  $f$  觀察其位移  $\Delta x$  與外力  $f$  之關係。
- (3) 將慣性天平水平放置，用不同砝碼置天平（ $F_{\perp}$  改變）時，在其旁施一外力  $f$  觀察其位移  $\Delta x$  與外力  $f$  關係。
- (4) 分析  $F_{\perp}$  與  $k_{\perp}$  和  $F_{\parallel}$  與  $k_{\parallel}$  關係。
- (5) 慣性天平分別受  $F$  和  $F$  二力作用時，質量與週期平方的關係。
- (6) 將天平所用的力抵消時
  - ① 測量振幅 1.0 cm 2.0 cm 時之週期。
  - ② 測量彈力常數  $k_0$  並求平均值。

## 2 結果：

- (1) 不同  $F_{\perp}$  時外力  $f$  與  $\Delta x$  關係如表(二)附圖。
- (2) 不同  $F_{\parallel}$  時外力  $f$  與  $\Delta x$  關係如表(三)附圖。
- (3) 分析  $F_{\perp}$  與  $k_{\perp}$ ， $F$  與  $\frac{1}{k_{\perp}}$  的關係如表(四)附圖。
- (4) 分析  $F_{\parallel}$  與  $k_{\parallel}$ ， $F$  與  $\frac{1}{k_{\parallel}}$  的關係如表(五)附圖。
- (5)  $\theta = 0^\circ$  時和  $\theta = 90^\circ$  測不同質量之慣性天平，振動 100 次時間如附表(六)附圖 2—1，2—2。
- (6) 天平不受外力時振幅 1 cm 與 2 cm 週期與質量關係如表(七)所示，且求得  $k_0$  值如表(八)所示附圖 2—3。

表(二)

$x \backslash F$ f	85	205	305	450	1000
0	0	0	0	0	0
50	0.9	0.98	1.07	0.95	2.4
100	1.73	1.91	1.93	1.75	4.1
150	2.55	2.63	2.80	2.86	6.6
200	3.33	3.40	3.61	3.70	
250	4.10	4.17	4.47	4.35	
300	4.88	4.72	5.40		

表(三)

$x(\text{cm}) \backslash F_1(\text{gw})$ f(gw)	0	150	300	450	600	750
0	0	0	0	0	0	0
50	0.9	1.0	1.25	1.50	1.85	2.35
100	1.45	2.1	2.35	3.00	3.35	4.7
150	2.3	3.1	3.75	4.40	5.15	6.8
200	3.4	4.0	4.50	5.75	6.50	8.35

表(四)

$F_1(\text{gw})$	0	150	300	450	600	750
$K_{-1}(\text{gw/cm})$	57.4	48.8	41.2	34.3	29.4	22.5
$\frac{1}{K_{-1}}(\text{cm/gw})$	$1.74 \times 10^{-2}$	$2.05 \times 10^{-2}$	$2.43 \times 10^{-2}$	$2.92 \times 10^{-2}$	$3.40 \times 10^{-2}$	$4.44 \times 10^{-2}$

表(五)

$F_{\perp}(\text{gw})$	85	20.5	305	405	1000
$K_{\perp}(\text{gw/cm})$	60.6	58.9	55.0	52.8	23.3
$\frac{1}{K_{\perp}}(\text{cm/gw})$	0.0165	0.0170	0.0182	0.0189	0.0430

表(六)

m(g)	$\theta$ T × 100	90° 水平放置		0° 鉛直放置	
155		33.8	33.7	36.2	35.95
		33.6		35.7	
175		35.8	35.7	38.9	38.8
		35.6		38.7	
195		37.9	37.85	41.3	41.3
		37.8		41.4	
215		39.8	39.75	44.1	44
		39.7		43.8	
235		41.6	41.65	46.7	46.65
		41.7		46.6	
255		43.6	43.55	49.3	49.2
		43.5		49.1	
275		45.0	45.05	52.4	52.45
		45.1		52.5	
295		47.0	47.05	54.2	54.25
		47.1		54.3	
315		48.5	48.7	56.6	56.6
		48.9		56.6	
335		50.6	50.55	59.2	59.25
		50.5		59.3	
355		51.9	51.95	61.8	61.8
		52.0		61.8	
375		53.3	53.4	64.6	64.5
		53.5		64.4	
395		55.3	55.3	66.9	66.9
		55.3		66.9	
415		57.1	57.4		
		57.7			
說	明	L 質量包括秤盤和鋼片之總質量 75g。			

圖 2-1

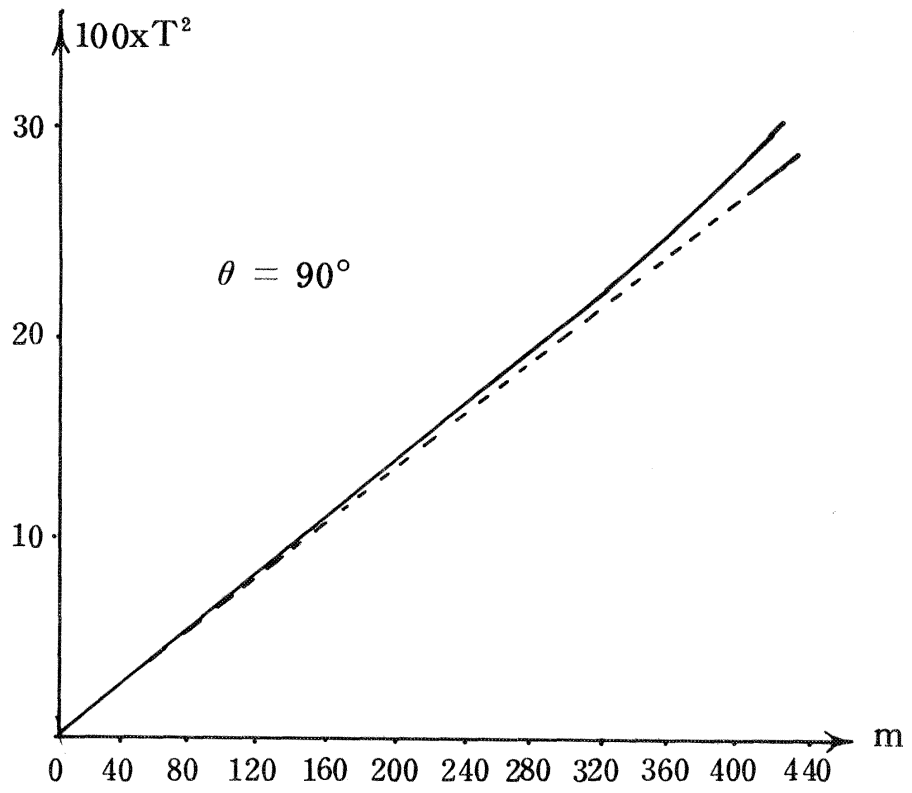
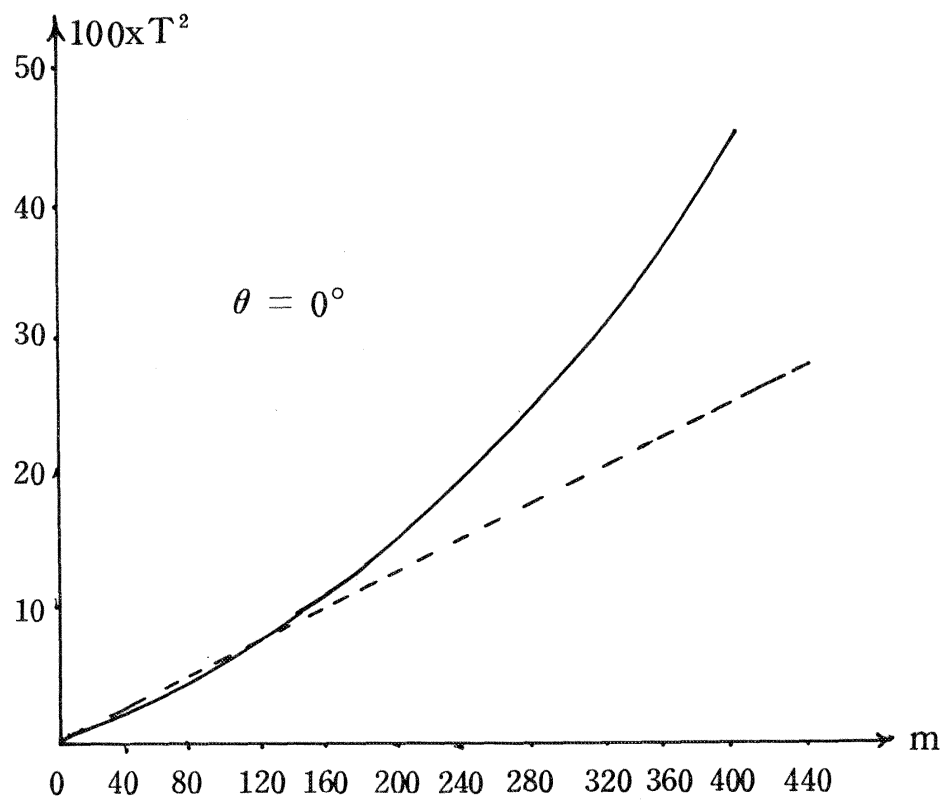


圖 2-2



表(七)

m(kg)	0.093	0.193	0.293	0.393	0.493	0.593	0.693	0.793	0.893	0.993
週 期	振幅 1.0	0.364	0.442	0.511	0.564	0.655	0.680	0.718	0.756	0.799
	振幅 2.0	0.247	0.365	0.451	0.521	0.566	0.651	0.686	0.722	0.801

說明： $T'$  (測量) =  $2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$   $K = \frac{4\pi^2 m}{T'^2}$   $T'$  如表(七)所測週期。而表

(七)中天平不受垂直力作用，故必須用尼龍繩經定滑輪掛物重，

$$\begin{aligned} &\text{就如同 Step 2 中，於是彈力常數 } K = k_0 + k'' \text{ 且 } k'' = \frac{F_{\perp}}{\ell} \\ &= \frac{mg}{\ell} \quad \therefore k_0 = K - k'' = m \left( \frac{4\pi^2}{T'^2} - \frac{g}{\ell} \right) \end{aligned}$$

$$\text{而真正週期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_0}}$$

註：做實驗時  $\ell = 2.3m$ ， $k''$  即求得。

表(八)

m(kg)	0.093	0.193	0.293	0.393	0.493	0.593	0.693	0.793	0.893	0.993
$T^2$	0.0611	0.133	0.195	0.261	0.318	0.385	0.463	0.515	0.649	0.639
$k_0$	60.0	62.0	59.2	59.4	61.2	60.8	59.0	60.7	61.7	61.3

$k_0$  平均值是 60.2。

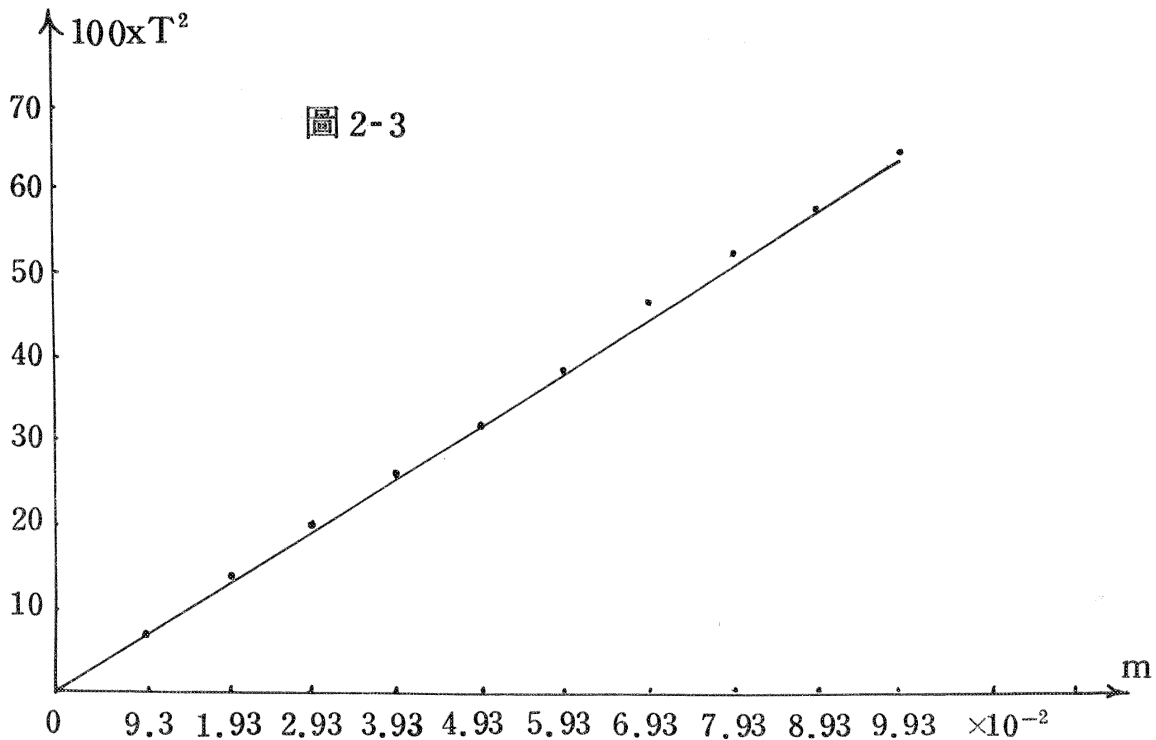
※註：利用公式  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$  求  $k_0$ ，設空秤盤  $m_0$

$$T_1' = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_0}{K_0 + k_1''}} \quad \dots\dots\dots(1) \quad k_1'' = \frac{m_1 g}{\ell}$$

$$T_2' = 2\pi \sqrt{\frac{m_2 + m_0}{k_0 + k_2''}} \quad \dots\dots\dots(2) \quad k_2'' = \frac{m_2 g}{\ell}$$

$$\begin{aligned} T_1'^2 (k_0 + k_1'') &= 4\pi^2 (m_1 + m_0) \\ T_2'^2 (k_0 + k_2'') &= 4\pi^2 (m_2 + m_0) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$k_0 = \frac{4\pi^2 (m_2 - m_1) + T_1'^2 k_1'' + T_2'^2 k_2''}{T_2'^2 - T_1'^2}$$



### 3. 分析：

- (1)由表(二)，表(三)知慣性天平在受外力  $f$  較小時，則  $k_{\perp} k_{\parallel}$  值一定。
- (2)固定  $F_{\perp}$  或  $F_{\parallel}$  下， $f$  與  $x$  均成正比，滿足虎克定律。
- (3)慣性天平受  $F_{\perp}$  力作用和  $F_{\parallel}$  作用的結果比較，則  $F_{\perp}$  影響較大，可由表(六)中比較  $0^{\circ}$  與  $90^{\circ}$  之情形。
- (4)由表(七)在實驗時天平不受外力時，且振幅不大週期與振幅大小無關。
- (5)求得  $k_0$  平均值是  $60.2$  (nt/sec)。

(二)  $m$  與  $\alpha$  關係 ( $\alpha = \frac{\Delta T}{\Delta F_{\perp}}$ )， $\Delta T$  為受力後週期變化值。

#### 1. 過程：

- (1)以不同質量分別測量  $\theta = 0^{\circ}$  與  $180^{\circ}$  時振動 100 次所須時間。
- (2)求  $\Delta T / \Delta F_{\perp}$  之關係。

#### 2. 結果：

- (1)當  $\theta = 0^{\circ}$  與  $180^{\circ}$  時質量由 113 克到 463 克振動 100 次所須

時間如表(九)中 $A_1A_2$  分別所示，附圖 3—1。

$\Delta F_{-1} = 2mg$  表(九)

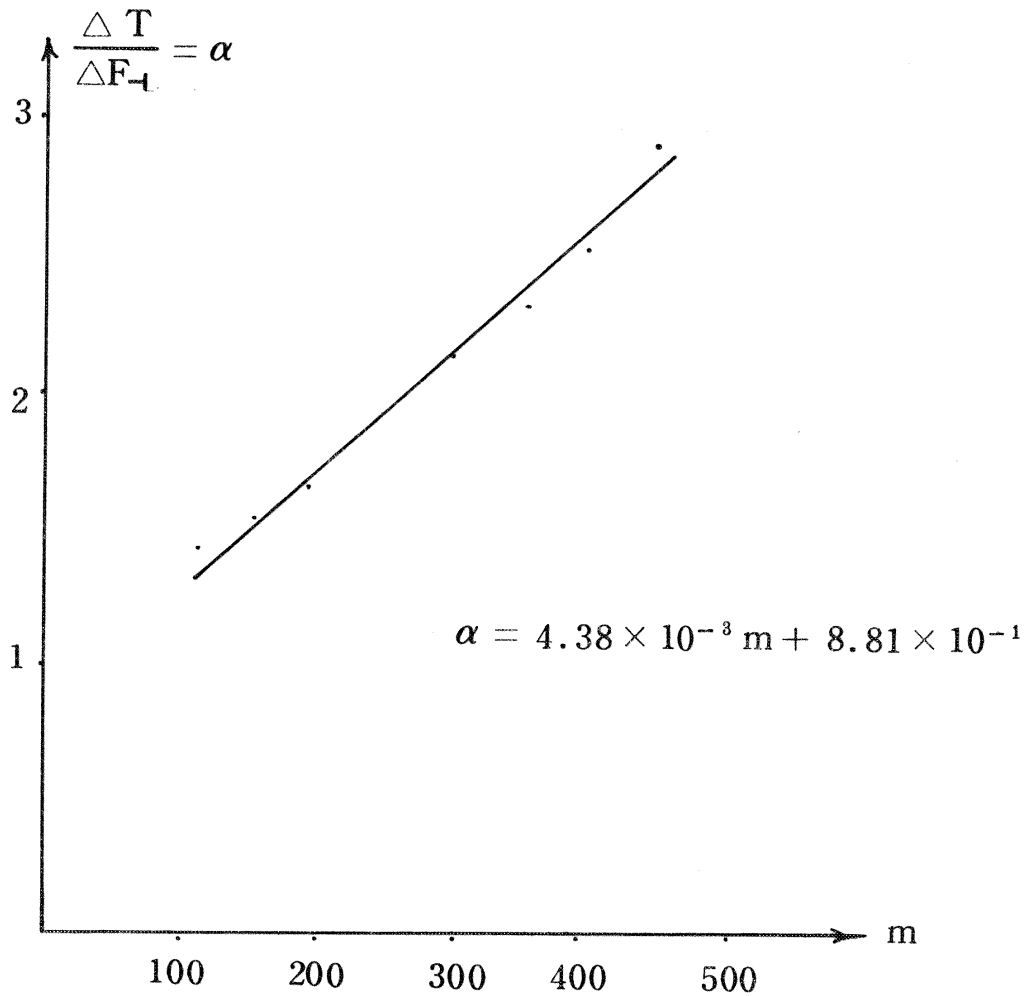
$T \times 100$ $m(g)$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$\Delta T$	$\frac{\Delta T \times 100}{\Delta F_{-1}} (\text{sec}/\Delta t)$
	$A_1$	$\frac{A_1 + A_2}{2}$	$A_2$	$A_2 - A_1$	
113	30.2	28.7	27.1	3.1	1.40
155	36.3	34.0	31.6	4.7	1.55
193	40.6	37.5	34.4	6.2	1.64
203	40.6	38.0	35.4	5.2	1.30
213	43.7	40.0	36.2	7.5	1.80
235	46.2	41.9	37.6	8.6	1.87
283	51.0	45.4	39.8	11.2	2.02
313	54.5	48.0	41.6	12.9	2.10
315	56.7	49.6	42.5	14.2	2.30
338	59.0	51.3	43.6	15.4	2.32
363	60.9	52.6	44.3	16.6	2.33
383	65.1	55.6	46.0	19.1	2.54
403	66.2	56.2	46.2	20.0	2.53
438	72.8	60.6	48.4	24.4	2.84
463	74.2	61.3	48.4	25.8	2.84

表(十)

$\Delta T \times 100$ / $T \times 100$ / $m(g)$ / $F_{-1} (gw)$	100	200	300	400
50		39.8 0.8	49.2 1.2	56.4 1.3
100	28.4 0.9	40.6 1.7	50.4 0.8	57.7 1.4
150	29.3 1.1	42.3 0.8	51.2 1.4	59.1 1.7
200	30.4 0.4	43.1 1.1	52.6 1.4	60.8 1.4
250	30.8 1.1	44.2 0.8	54.0 2.0	62.2 2.6
300	31.9 1.2	45.0 1.8	56.0 1.5	64.8 2.1
350	33.1 1.0	46.8 1.5	57.5 2.2	66.9 1.7
400	34.1 1.2	48.3 1.8	59.7 1.9	68.7 2.6
450	35.3	50.1	61.6	71.3



圖 3-1



(2) 並算出  $\frac{A+A}{2}$  即為  $90^\circ$  時之理論值得  $3 - 2$ ，並且與附圖 1 — 7 之測量值和表(六)中測值作比較，發現理論和實驗之結果在實驗誤差內相等。

### 3. 分析：

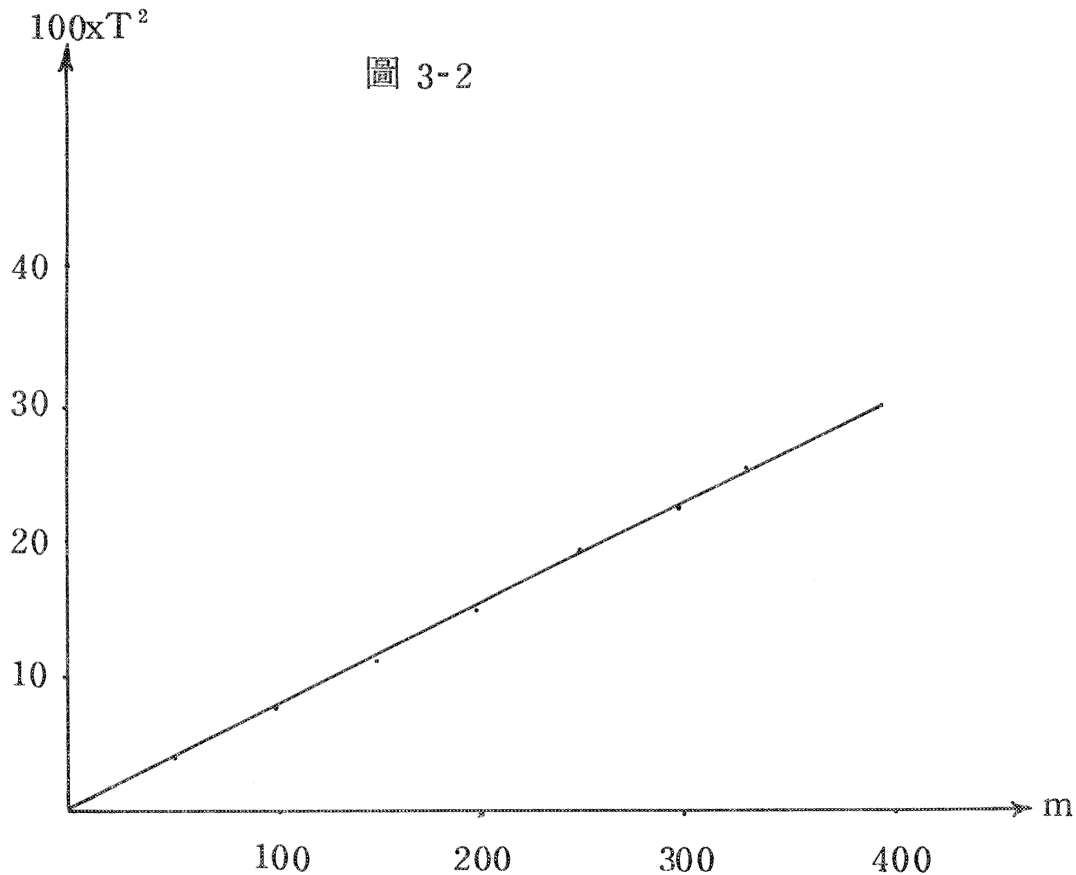
(1) 由 STEP 1 中因週期受  $mg \cos \theta$  影響且  $T$  和  $\cos \theta$  成線性故可寫成  $T(\theta) = mg \cos \theta + T(90^\circ)$  又可寫成

$$T(F_1) = \alpha F_1 + T(0)$$

(2) 得到方程式  $T$  (只有  $F$  作用下之週期)

$$= (4.38 \times 10^{-3} m + 8.81 \times 10^{-1}) F + 2\pi \sqrt{\frac{m}{60.2}}$$

註：導出過程在討論中。



#### 四、討 論：

(一)本實驗在了解 STEP 1 中 T 與  $\theta$  關係圖形中的兩個問題：

- 1  $\theta = 90^\circ$  之 T 如何隨質量變化？
- 2  $\cos - T$  圖形之性質為何？

(二)由 STEP 2 中我們得知

- 1 慣性天平合適 S H M 的各種性質。
- 2 慣性天平不受力作用下恢復系數 K 為 62.0 (nt/sec)。

(三) T —  $\theta$  圖形之預測：

1. 由  $\alpha - m$  關係得知各種  $m$  下的  $T - \cos \theta$  圖的斜率。
2. 由 3—2 圖中預測  $\theta = 90^\circ T^2$  與  $m$  的關係。  $T - \cos \theta$  圖中  $\theta = 90^\circ$  時之週期即其圖形在縱軸截距之位置。
3. 多次實驗得知  $T - \cos \theta$  圖形近一直線，因此可由上列(1)(2)二者中所知之條件，精確地畫出所預測之各種  $T - \cos \theta$  圖形如附圖 1—5，1—6，1—7，1—8，結果相同。

(四) 實驗之特性：

1. 本實驗中可求出許多方程式，但推出這些方程式的價值，不在於是否能廣泛地解釋自然界的各種性質，而在我們使用慣性天平時能在實驗範圍內待測質量（最好是 300 克）以內，但課本說明在 750 克內。
2. 在解釋  $T - \cos \theta$  圖時可以利用 STEP 3 的方程式預測結果，再和實驗的測量值印證。
3. 本實驗之目的不在解釋慣性天平實驗中各種物理量間之關係，所以我們得出  $\alpha - m$  的關係，可視為在實驗範圍中它們互相推論的結果所得到之經驗式。

(五) 我們得出的方程式：

$$\text{由圖 2—3 } \frac{1}{k_1} = 1.58 \times 10^{-7} F_1^2 + 1.87 \times 10^{-4} F_1^2 + 1.66 \times 10^{-5}$$

$$\text{由圖 2—4 } \frac{1}{k_1} = 7.65 \times 10^{-9} F_1 + 1.66 \times 10^{-5}$$

$$T' = (4.20 \times 10^{-5} m + 8.46 \times 10^{-3}) F_1 + 2\pi \sqrt{1.66 \times 10^{-5} m}$$

註：本方程式的證明：

(1) 由本表(四)得一方程組：

$$\frac{2.05 \times 10^{-2}}{980} = a \times (150)^2 + b \times 150 + \frac{1.74 \times 10^{-2}}{980}$$

$$\frac{2.43 \times 10^{-2}}{980} = a \times (300)^2 + b \times 300$$

結果這可得 STEP 3 中的方程式

(2)由表(五)得一方程式的斜率爲  $7.65 \times 10^{-6}$  然後得一方程式 =  $7.65 \times 10^{-6} F_{\perp} + c$  再用表(六)中  $90^{\circ}$  的  $F$  與  $m$  關係求出  $c$  爲  $1.66 \times 10^{-5}$  得到標準誤差爲 4%。

(3)在 STEP 3 中由圖 3-1 以(2)中求方程式的方式可得斜率爲  $4.20 \times 10^{-5}$  又以圖 3-1 中各點之誤差範圍中之交集，得方程式以  $= (4.2 \times 10^{-5} m + 8.46 \times 10^{-3}) F_{\perp} + 2\pi \sqrt{1.66 \times 10^{-5} m}$  其中  $2\pi \sqrt{1.66 \times 10^{-5} m}$  是不受任何力所得週期，而  $(4.2 \times 10^{-5} m + 8.46 \times 10^{-3}) F_{\perp}$  因  $mg \cos \theta$  所影響。

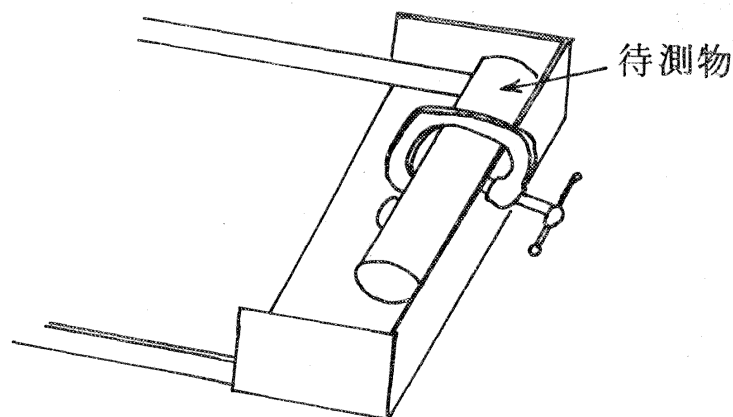
單位：

物理量	$k_{\perp}$	$k_{\perp}$	$F_{\perp}$	$F_{\perp}$	T	m
單位	$\frac{\text{dyne}}{\text{cm}}$	$\frac{\text{dyne}}{\text{cm}}$	gw	gw	秒/次	g

## 五、結 論：

1 因爲我們可精確的得出  $T - \cos \theta$  圖形所以我們可用這計算減去週期 (T) 中重力所造成分力  $mg \cos \theta$ 。所以有了此公式後，實驗中的  $m$  值不受角度影響。因此便可達到慣性天平中求「慣性質量」的基本目的。

2 ①裝置如圖所示：



說明：利用本實驗所求出公式可直接代入求得質量，不必再利用課本用尼龍線懸掛物體。

②計算  $m$  值之方法有二：

$$(1) T = (4.38 \times 10^{-5} \text{m} + 8.81 \times 10^{-3}) \text{m} + 2\pi \sqrt{1.66 \times 10^{-5} \text{m}} \quad \circ$$

$$(2) T = 2\pi \sqrt{\text{m} \left( \frac{7.5 \times 10^{-6}}{980} \text{m} + 1.66 \times 10^{-5} \right)} \quad \text{單位：秒} \circ$$

(3) 其中計算方程式(1)適用  $0^\circ$  及  $180^\circ$  而方程式(2)適用  $90^\circ$  。

③ 其他裝置則如各實驗課本所述者。

評語：

能對現有之教具就其優劣點作有系統的探討，且探討過程考慮周延，對可能發生的誤差亦有討論。