紙摺圓錐曲線的研究

高中組數學科第三名

省立潮州高級中學

作　　者：陳鏡文

指導教師：陳錫卿

一、前言：

在高中數學第四册，講到圓錐曲線時，老師曾介紹用紙摺法摺出拋物線、橢圓及雙曲線之近似圖形，深感其妙趣之餘，却不知所得之摺痕所圍成的圖形為何會近似圓錐曲線？經老師指導知其嚴密證明須用到微分幾何之定理，並拿數學傳播季刊（65年5月創刊號）中關於紙摺法的某校科展作品讓我參考，但我不滿意其結果，經過多方嘗試後，我想利用高中學生所學的數學知識對此問題再加以討論。

二、摺法

㈠拋物線：

在紙上取一線L及線外一定點P，然後摺紙使P點與L上任一點P′重合，得到一摺痕線M，再把紙張攤平，再摺，如此反覆

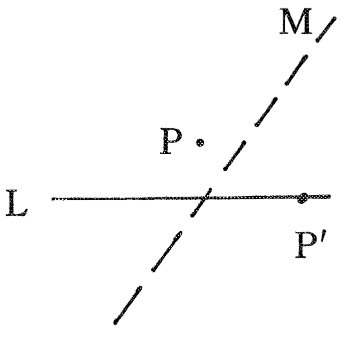

圖1-1

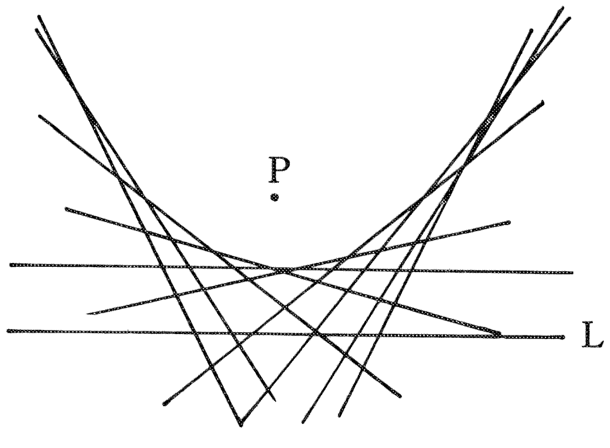

圖1-2

，使Ｐ的落點Ｐ′在Ｌ上移動，得許多摺痕， 這些摺痕所圍成的圖形就近似一拋物線。（如圖１-１， １-２）

㈡橢圓：

紙上畫一圓Ｏ，在圓內取一異於Ｏ之定點Ｐ，然後摺紙使Ｐ點與圓周上任一點Ｐ′重合，得一摺痕線Ｍ把紙攤平，再摺，如此反覆，使Ｐ之落點Ｐ′在圓周上移動，而得多條不同摺痕，這些摺痕所圍的圖形即近似於橢圓（如圖２-１， ２-２）。

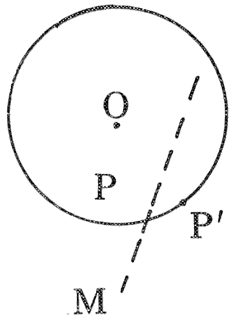

圖２-１

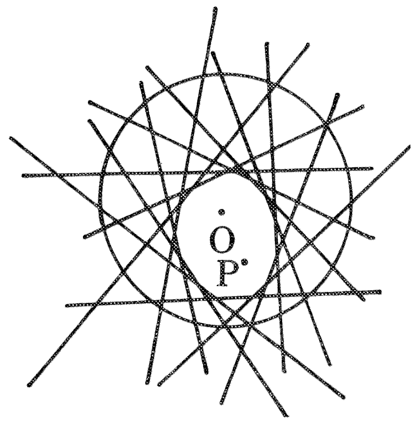

圖２-２

㈢雙曲線：

在紙上畫一圓，圓心為Ｏ，在圓外取一定點Ｐ，然後摺紙使Ｐ點與圓周上任一點Ｐ′重合，得一摺線Ｍ把紙攤平，再摺，如此反覆，使Ｐ之落點Ｐ′在圓周上移動，而得許多不同摺痕，這些摺痕所圍成的圖形即近於雙曲線（如圖３-１， ３-２）。

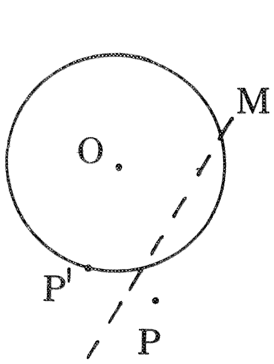

圖３-１

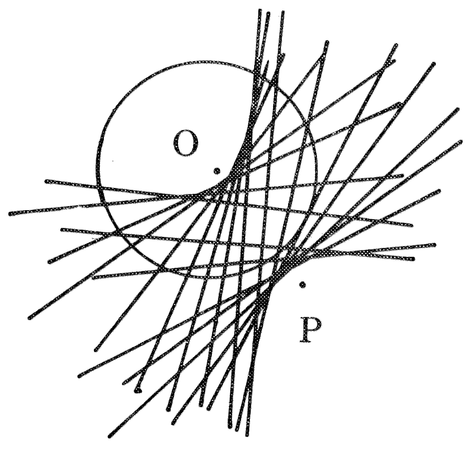

圖３-２

三、證明：

以下我想說明前面所摺之圖形確爲三種圓錐曲線。由觀察知，所圍成的圖形應該爲一能與所有摺痕相切的曲線，證明的要旨即在此。

㈠拋物線：

如（圖 4-1）由摺法知，摺痕M爲 $\overline{PP'}$ 之中垂線，過P作L之垂線交M線於E點，則 $\overline{PE}=\overline{P'E}$ 由拋物線之性質知E點所成之軌跡爲一以P爲焦點，L爲準線的拋物線。

〔設L爲X軸，過P垂直L之線爲Y軸，且設P之座標爲（0，k），則此拋物線之方程式爲 $X^2=2k\left(Y-\frac{k}{2}\right)$（焦距爲 $\frac{k}{2}$）〕。

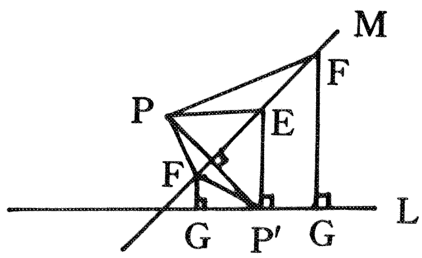

圖 4-1

在M線上任取一異於E的點F，連 $\overline{FP}$，$\overline{FP'}$ 作過F垂直L之線交L於G點，$\because \overline{FP}=\overline{FP'}$ 而△FP′G中 $\overline{FP'}$ 必長於 $\overline{FG}$

∴ $\overline{FP}>\overline{FG}$ 即M線上異於E的任意點到此拋物線之焦點的距離必大於到準線的距離。

∴M線上任意異於E之點必在這拋物線的外側（與準線同側）。

∴M線與拋物線相切，切點爲E。

∴所有摺痕M線所圍成的圖形爲E點E點之軌跡——以P爲焦點，L爲準線之拋物線。

㈡橢圓：

如圖 4-2，由摺紙法知摺痕線M爲 $\overline{PP'}$ 之中垂線連 $\overleftrightarrow{OP'}$ 交M線於E點，則 $\overline{EP'}=\overline{EP}$。

∴ $\overline{EO}+\overline{EP}=\overline{EO}+\overline{EP'}$ =圓之半徑（設爲r，定數）其中 $r>\overline{OP}$，由橢圓之性質知E點所成之軌跡爲以O，P爲二焦點的橢圓。

（若以$\overleftrightarrow{OP}$為Y軸，$\overline{OP}$之中垂線為X軸，已知點O，P之座標分別為（0，c），（0，−c）則此橢圓之方程式為

$$\frac{Y^2}{\frac{r^2}{4}}+\frac{X^2}{\frac{r^2}{4}-c^2}=1$$

（離心率為 2c/r）

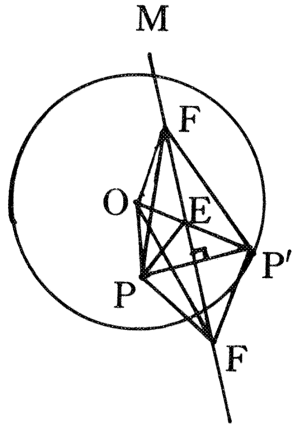

圖 4-2

在M上任取異於E的一點F，連$\overline{FO}$，$\overline{FP}$，$\overline{FP'}$。

$\because \overline{FP}=\overline{FP'}$ $\therefore \overline{FO}+\overline{FP}=\overline{FO}+\overline{FP'}$

而在△FOP′中，$\overline{FO}+\overline{FP}>\overline{P'O}$（即半徑 r），∴M線上異於E的任何點F到橢圓二焦點O，P之距離和大於E點到O，P之距離和，∴F點都在橢圓外側。

∴所有摺痕M線與橢圓相切，切點為E。

∴摺痕所圍成之圖形為E點的軌跡——以O，P為二焦點的橢圓。

㈢雙曲線：

如圖 4-3 由摺法知摺痕線M為$\overline{PP'}$之中垂線，連$\overleftrightarrow{P'O}$，交M線於E點，則$\overline{EP'}=\overline{EP}$。∴ $|\overline{EP}-\overline{EO}|=|\overline{EP'}-\overline{EO}|$ ＝圓之半徑（設為r）。其中 $r<\overline{OP}$ 由雙曲線的性質知E點，所成的軌跡為以O，P為焦點的雙曲線。

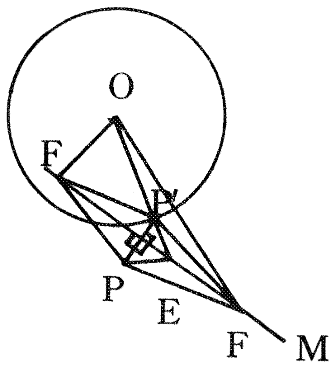

圖 4-3

〔若以$\overleftrightarrow{OP}$為Y軸，$\overline{OP}$的垂直平分線為X軸，設O之座標為（0，c），P之座標為（0，−c），則此雙曲線的方程式為

$$\frac{Y^2}{\frac{r^2}{4}} - \frac{X^2}{c^2 - \frac{r^2}{4}} = 1 \quad （離心率爲 \frac{2c}{r}）〕$$

在M線上取一異於E之任意點F，連$\overline{FO}$，$\overline{FP}$，$\overline{FP'}$ 則 $\overline{EP} = \overline{EP'}$，已知（$\overline{FO}+\overline{OP'}$）$-\overline{FO}=\overline{OP'}$＝半徑 r 。

而$\overline{FO}+\overline{OP'} > \overline{FP'}$ 。

∴ $|\overline{FP'}-\overline{FO}|$ ＜半徑 r

∴M線上異於E的任何點F到二焦點之距離差，小於E到二焦點的距離差 r 。

∴ F點都在此雙曲線外包含中心（0，0）的這一側。

∴所有摺痕均與雙曲線相切，切點爲E。

∴摺痕所圍成之圖形爲E點的軌距→以O，P爲焦點的雙曲線。

四、結論：

總結以上的探討得知：

㈠若任取一圓O及異於圓上的一定點P，連接P與圓上任意一點P′，作$\overline{PP'}$的中垂線爲摺線，則半徑$\overline{OP'}$與摺線交點的軌跡爲一有心錐線，其中O，P兩定點爲焦點，其距離與半徑之比爲此圓錐曲線的離心率。（P在圓外，可得雙曲線，P在圓內可得橢圓，P恰爲圓心時，可得一圓）

㈡若任取一定直線L（可視爲半徑無限大的圓）及線外一定點P，連接P與線上任一點P′，作$\overline{PP'}$的中垂線爲摺線，則過P′所作L之垂線（即P連至無限遠處的圓心而得的半徑）與摺線交點的軌跡爲一拋物線，定點P爲焦點，直線L爲準線。

㈢如此求法所得之圓錐曲線，均以摺線爲其切線，因此這些錐線均爲許多摺線所成直線族的包絡線。

㈣此法雖能解釋圓錐曲線的紙紙法，但無法廣到一般曲線族之包絡線的求法，此乃一大缺憾，今後將繼續探討希望能得到更進一步的結果。

評語：

紙摺圓錐曲線做的人很多，用的方法大部份牽涉到微積分。本件用簡單的方法處理，具有創意。