電腦立體圖像的原理

高中組數學科第三名

台北市中正高中

作　者：黃　眞

指導教師：張文良

一、動　機：

目前計算機科學極爲發達，並且微電腦的普及使得接觸這方面的人不再侷限於少數。在電腦的運用中，圖形的處理最爲人們注目，並且在CAD 的技術上亦佔有重要的地位。如何在螢幕上顯現立體的圖像在電腦繪圖中是一個富趣味與挑戰的題目。故在此提出和大家切磋。

二、目　的：

本作品乃探討電腦表現立體圖形的方法與原理，並研究其在應用上的價值。

三、討　論：

一般電腦繪圖的方法爲依照座標以點表現圖形。由於電腦採平面座標，無法直接表現空間中的形體。需利用投影的方法使電腦得以表現立體的圖像。

(一)投影

假設螢幕的座標系 $S_1 \equiv (O; X', Y')$ 其 X', Y' 軸與座標系 $S_2 \equiv (O; X, Y, Z)$ 的 X, Y 軸重合。則 $(O; X, Y, Z)$ 中一點 $(a, b, c)_{s_2}$ 在 $(O; X', Y')$ 上的座標爲 $(a, b)_{s_1}$。

故 $(X', Y')\ S_1 = (X, Y, Z)_{s_2}$、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 爲投影式（圖一）

(二)建立座標系

因爲電腦利用座標以點表現圖形，因此欲繪出立體的圖像需建立一個表示物體形狀的座標系 S_s＝（O；A，B，C）。若直接採（O；X，Y，Z）做爲（O；A，B，C）則由於 Z 的投影量爲零，不能表現出立體感，需使（O；A，B，C）對螢幕，也是對（O；X，Y，Z）產生偏轉，才能表現立體的形象，把（O；A，B，C）中的座標轉換成（O；X，Y，Z）中的座標，可求得（O；A，B，C）對螢幕的投影。

㈢轉換

兩座標系間的轉換就是一種線性變換，因此求得變換的矩陣，便能導出（O；A，B，C）對（O；X，Y，Z）的變換式。

假設在（O；X，Y，Z）的 Z 軸上裝一個轉軸 T_1，於 OXY 平面上再裝一個轉軸 T_2，與 X 軸夾 α 角。

則 T_1 旋轉 θ 角後，變換的矩陣爲

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{（圖二）}$$

則 T_2 旋轉 β 角後，變換的矩陣爲

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（圖三）

故原先（O；A，B，C）與（O，X，Y，Z）重合。產生偏轉時先轉 T_1 軸再轉 T_2 軸。得（O；A，B，C）對（O；X，Y，Z）的轉換式

$(X, Y, Z)_{s_2}$

$$= (a, b, c)_{s_3} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{T_1}$$

$$\left[\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & \sin\beta\\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]_{T_2}$$

$$=(a, b, c)_{S_3} \cdot$$

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta-\alpha)\cdot\cos\alpha- & \cos(\theta-\alpha)\cdot\sin\alpha+ & \sin(\theta-\alpha)\cdot\sin\beta\\ \sin(\theta-\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta & \sin(\theta-\alpha)\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta & \\ -\sin(\theta-\alpha)\cdot\cos\alpha- & -\sin(\theta-\alpha)\cdot\sin\alpha+ & \cos(\theta-\alpha)\cdot\sin\beta\\ \cos(\theta-\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta & \cos(\theta-\alpha)\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta & \\ \sin\alpha\cdot\sin\beta & -\cos\alpha\cdot\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$

㈣透視

以上的方法在投影上採平行光源（或無限遠的點光源）故影像的大小比例與實物相同。但以照片或肉眼所見，影像和實物在大小上的比例會隨距離改變，這種投影是採點光源。

如㈣，設光源與物體的距離爲D，與像的距離爲d。物體的長度L，像的長度1，則它們之間的關係

$$\frac{L}{D}=\frac{1}{d} \quad \Rightarrow \quad 1=L\cdot\frac{d}{D}$$

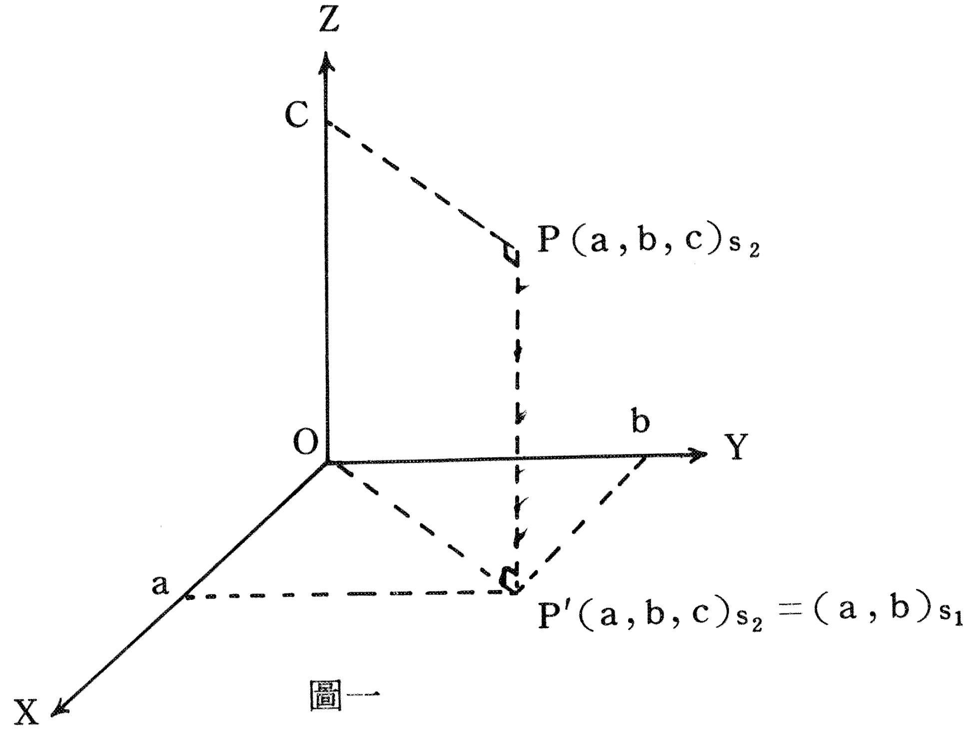
設光源爲觀察點，並將上式置於（O；X，Y，Z）對（O；X′，Y′）的投影式中得

$$(X', Y')S_1=(X, Y, Z)S_2 \cdot \begin{pmatrix}\frac{d}{D} & 0\\ 0 & \frac{d}{D}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

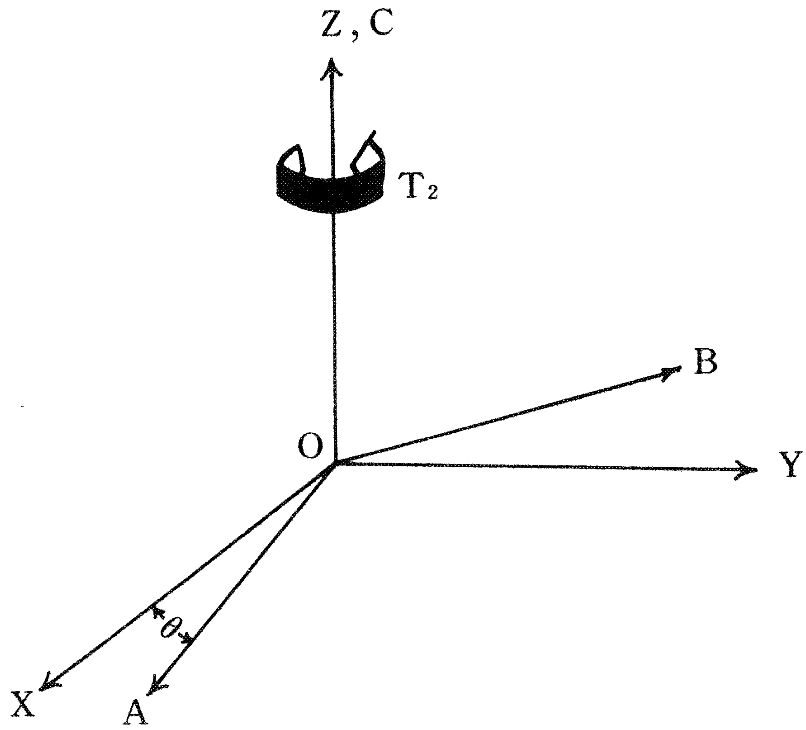
再將D化爲（h－Z），使（O；X，Y，Z）對（O；X′，Y′）沿Z軸平移h的距離，可得較佳的效果。（圖五）

四、結　論：

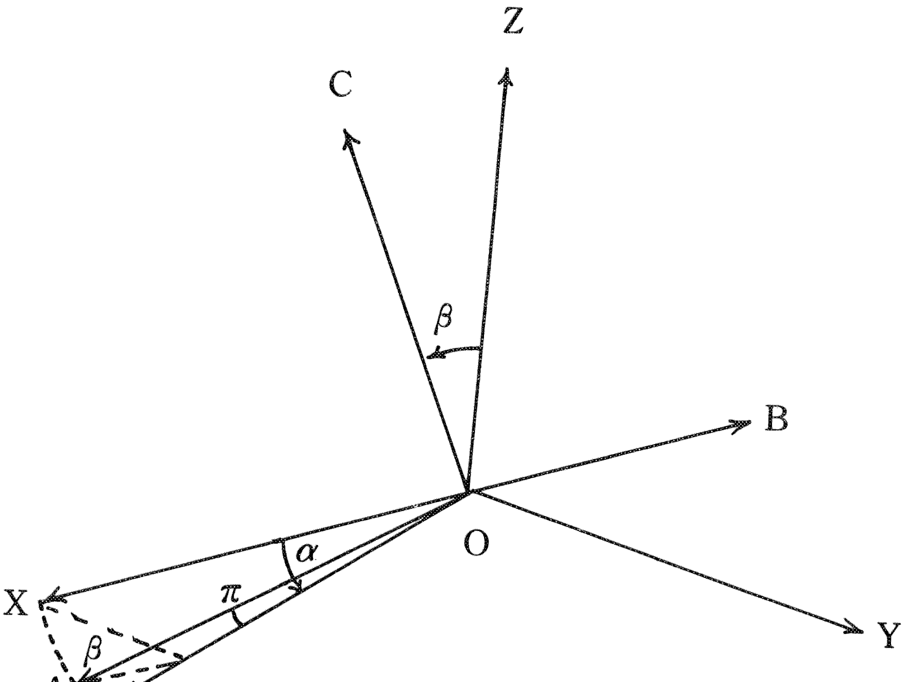
立體圖形的要訣，就是合理的將空間中的第三根軸（Z軸）



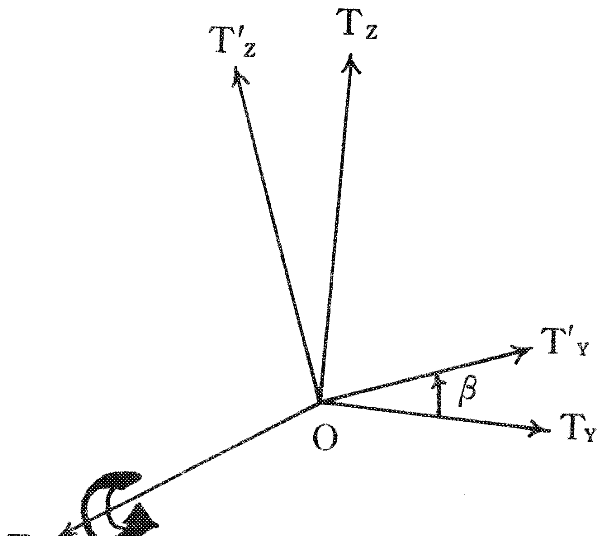
圖一



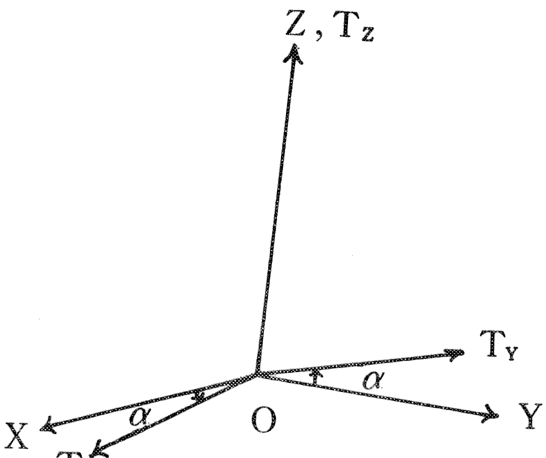
圖二



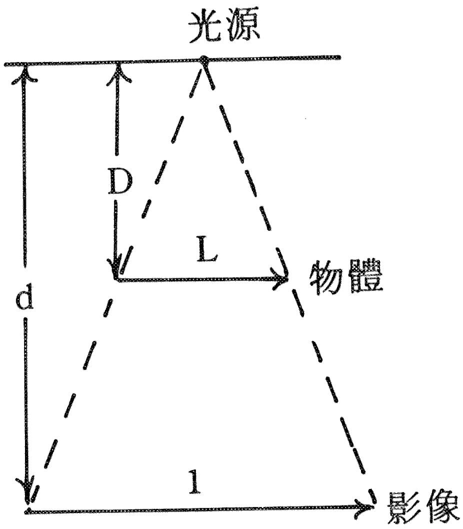
圖三



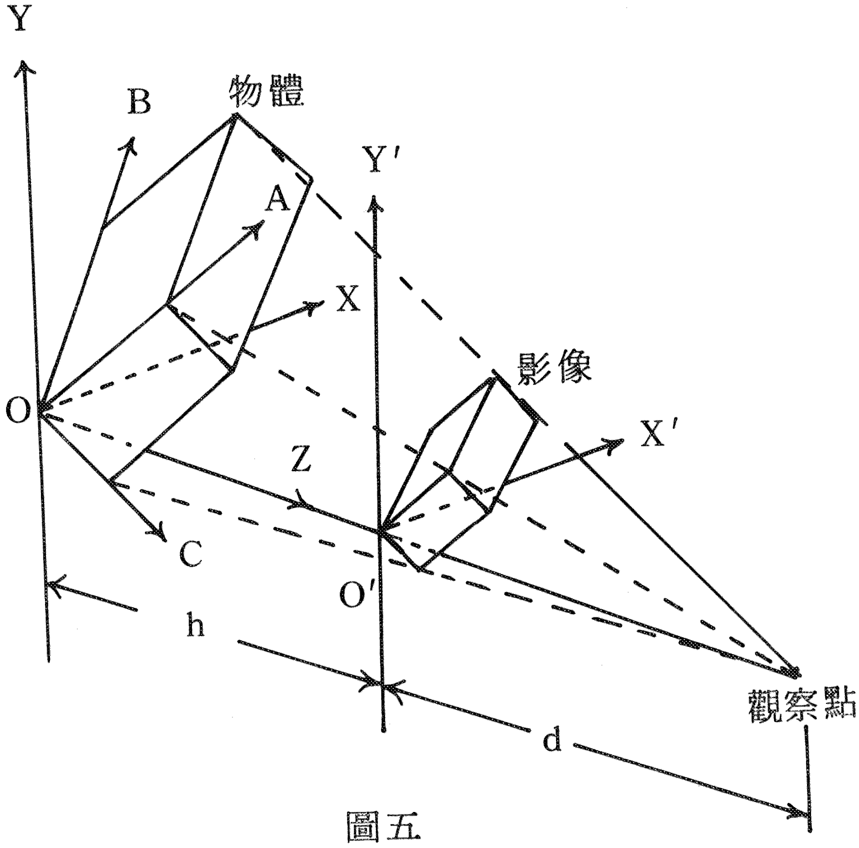
圖三



圖三″



圖四



圖五

表現在平面上。至於方法則有許多種，但在數學中就是線性變換，本作品提出一種變換方式與大家探討。

立體圖形的運用範圍非常廣泛。舉凡設計製圖、教學等均可利用。因爲我們身處三度空間中，立體圖形必然受到需求。故如何妥善的應用是本作品以後的方向。

圖說明：

（圖一）

由於 Z 軸與 O X Y 平面 $\frac{\pi}{2}$ 角，故投影爲零。

（圖二）

轉動 T_1 時物體以 Z 爲轉軸對著 O X Y 平面旋轉。故變換的矩陣爲

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

（圖三）

假設座標系 $S_4 \equiv (O ; T_X, T_Y, T_Z)$，$T_2$ 與 T_X 重合。

則轉動 T_2 時物體以 T_X 爲軸對著 O T_X T_Y 平面旋轉。

故在 $(O ; T_X, T_Y, T_Z)$ 中變換的矩陣爲

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}。 \qquad \text{（圖三，1）}$$

欲求物體在 $(O ; X, Y, Z)$ 中的變動時，需先求得物體在 $(O ; T_X, T_Y, T_Z)$ 中的座標，經上列變換後再還原爲 $(O ; X, Y, Z)$ 中的座標，故整個變換矩陣爲

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（圖三，2）

（圖四）

當D＞d時，L＞1。……………(1)

當D＜d時，L＜1。……………(2)

以(2)較符合我們所見。

評語：1.具有獨立尋找問題和解決問題的能力。

2.能具體應用所學過的數學，並能獨立學習新知識以解決遇到的困難。

3.資質優異，可參加資賦優異研習營。