處理故障的收穫

高中組數學科第二名

省立屏東高級中學

作　　者：陳建艮、林富山
唐立權、李博賢

指導教師：許政瑞、陳烱明

一、前　　言：

大家都知道一個分式型式的三角恒等式，當分母的值爲零或式中的三角函數無意義時就像一部機器發生故障一樣不能用了。我們仔細研究這些故障情形時卻得到一些意外的收穫。

二、本　　文：

在作倍角公式時發現餘切函數的倍角公式很有規則：

由公式 $\cot(x+y)=\dfrac{\cot x\cot y-1}{\cot x+\cot y}$ 很容易得到下面公式：

$$\cot 2\theta=\frac{\cot^2\theta-1}{2\cot\theta}\qquad \cot 3\theta=\frac{\cot^3\theta-3\cot\theta}{3\cot^2\theta-1}$$

$$\cot 4\theta=\frac{\cot^4\theta-6\cot^2\theta+1}{4\cot^3\theta-4\cot\theta}$$

注意觀察分子、分母的係數一定會想到巴斯卡三角形，爲了便於一般化，將係數用組合數表出，就成下列型式。

$$\cot 2\theta=\frac{C^2_2\cot^2\theta-C^2_2}{C^2_1\cot\theta}\qquad \cot 3\theta=\frac{C^3_0\cot^3\theta-C^3_2\cot\theta}{C^3_1\cot^2\theta-C^3_3}$$

$$\cot 4\theta=\frac{C^4_0\cot^4\theta-C^4_2\cot^2\theta+C^4_4}{C^4_1\cot^3\theta-C^4_3\cot\theta}$$

再看看這個規則是不是可以延伸下去：

$$\cot 5\theta=\cot(4\theta+\theta)=\frac{\cot 4\theta\cdot\cot\theta-1}{\cot 4\theta+\cot\theta}$$

$$=\frac{\dfrac{C_0^4\cot^4\theta-C_2^4\cot^2\theta+C_4^4}{C_1^4\cot^3\theta-C_3^4\cot\theta}\cdot\cot\theta-1}{\dfrac{C_0^4\cot^4\theta-C_2^4\cot^2\theta+C_4^4}{C_1^4\cot^3\theta-C_3^4\cot\theta}+\cot\theta}$$

$$=\frac{C_0^4\cot^5\theta-C_2^4\cot^3\theta+C_4^4\cot\theta-C_1^4\cot^3\theta+C_3^4\cot\theta}{C_0^4\cot^4\theta-C_2^4\cot^2\theta+C_4^4+C_1^4\cot^4\theta-C_3^4\cot^2\theta}$$

$$=\frac{C_0^4\cot^5\theta-(C_2^4+C_1^4)\cot^3\theta+(C_4^4+C_3^4)\cot\theta}{(C_0^4+C_1^4)\cot^4\theta-(C_2^4+C_3^4)\cot^2\theta+C_4^4}$$

$$=\frac{C_0^5\cot^5\theta-C_2^5\cot^3\theta+C_4^5\cot\theta}{C_1^5\cot^4\theta-C_3^5\cot^2\theta+C_5^5}$$

過程中用到巴斯卡定理，這使我們相信上面規則應該可以延伸下去的。

一般規則及其證明如下：

◉定理 1.

設 n 爲自然數且 $n\geq 2$，$\sin n\theta\neq 0$，$\sin\theta\neq 0$，則

$$(一)\ \cot n\theta=\begin{cases}\dfrac{C_0^n\cot^n\theta-C_2^n\cot^{n-2}\theta+\cdots+(-1)^pC_{n-1}^n\cot\theta}{C_1^n\cot^{n-1}\theta-C_3^n\cot^{n-3}\theta+\cdots+(-1)^pC_n^n}\\[2ex]=\dfrac{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^mC_{2m}^n\cot^{n-2m}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^mC_{2m+1}^n\cot^{n-2m-1}\theta} & \text{當 } n=2p+1\text{ 時 } (p\in N)\\[2ex]\dfrac{C_0^n\cot^n\theta-C_2^n\cot^{n-2}\theta+\cdots\cdots+(-1)^pC_n^n}{C_1^n\cot^{n-1}\theta-C_3^n\cot^{n-3}\theta+\cdots+(-1)^{p-1}C_{n-1}^n\cot\theta}\\[2ex]=\dfrac{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^mC_{2m}^n\cot^{n-2m}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p-1}(-1)^mC_{2m+1}^n\cot^{n-2m-1}\theta} & \text{當 } n=2p\text{ 時 } (p\in N)\end{cases}$$

證明：用數學歸納法證明：

(1)當 n＝2，3，4，5 如前所列均成立

(2)假設 n＝k 則成立，即

$$\cot k\theta=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m+1}^{k}\cot^{k-2m-1}\theta} & \text{當 } k=2p+1 \text{ 時 } (p\in N)\\[2ex] \dfrac{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p-1}(-1)^m C_{2m+1}^{k}\cot^{k-2m-1}\theta} & \text{當 } k=2p \text{ 時 } (p\in N)\end{cases}$$

（ㄅ）$k=2p$ 時，$k+1=2p+1$

$$\therefore \cot(k+1)\theta=\cot(k\theta+\theta)=\frac{\cot k\theta\cot\theta-1}{\cot k\theta+\cot\theta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p-1}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m-1}\theta}\cdot\cot\theta-1}{\dfrac{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p-1}(-1)^m C_{2m+1}^{k}\cot^{k-2m-1}\theta}+\cot\theta}$$

$$=\frac{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m+1}\theta-\sum\limits_{m=0}^{p-1}(-1)^m C_{2m+1}^{k}\cot^{k-2m-1}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m}\theta+\sum\limits_{m=0}^{p-1}(-1)^m C_{2m+1}^{k}\cot^{k-2m}\theta}$$

（通分後再約分）

$$=\frac{C_0^k\cot^{k+1}\theta+\sum\limits_{m=1}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m+1}\theta+\sum\limits_{m=0}^{p-1}(-1)^{m+1} C_{2m+1}^{k}\cot^{k-2m-1}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p-1}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m}\theta+(-1)^p C_k^k+\sum\limits_{m=0}^{p-1}(-1)^m C_{2m+1}^{k}\cot^{k-2m}\theta}$$

$$=\frac{C_0^{k+1}\cot^{k+1}\theta+\sum\limits_{m=1}^{p}(-1)^m\left(C_{2m}^{k}+C_{2m-1}^{k}\right)\cot^{k-2m+1}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p-1}(-1)^m\left(C_{2m}^{k}+C_{2m+1}^{k}\right)\cot^{k-2m}\theta+(-1)^p\ C_{k+1}^{k+1}}$$

$$=\frac{C_0^{k+1}\cot^{k+1}\theta+\sum\limits_{m=1}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k+1}\cot^{(k+1)-2m}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p-1}(-1)^m C_{2m+1}^{k+1}\cot^{(k+1)-(2m+1)}\theta+(-1)^p C_{k+1}^{k+1}}$$

$$=\frac{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k+1}\cot^{(k+1)-2m}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m+1}^{k+1}\cot^{(k+1)-(2m+1)}\theta}$$

(ㄆ)當$k=2p+1$時，令$p+1=p'$，$p+1=2(p+1)=2p'$

$$\cot(k+1)\theta=\cot(k\theta+\theta)=\frac{\cot k\theta\cdot\cot\theta-1}{\cot k\theta+\cot\theta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m+1}^{k}\cot^{k-2m-1}\theta}\cdot\cot\theta-1}{\dfrac{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m+1}^{k}\cot^{k-2m-1}\theta}+\cot\theta}$$

$$=\frac{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m+1}\theta-\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m+1}^{k}\cot^{k-2m-1}\theta}{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m}\theta+\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m+1}^{k}\cot^{k-2m}\theta}$$

$$=\frac{C_0^{k}\cot^{k+1}\theta+\sum\limits_{m=1}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k}\cot^{k-2m+1}\theta+\sum\limits_{m=0}^{p-1}(-1)^{m+1}C_{2m+1}^{k}\cot^{k-2m-1}\theta+(-1)^{p+1}C_k^k}{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m(C_{2m}^{k}+C_{2m+1}^{k})\cot^{k-2m}\theta}$$

$$=\frac{C_0^{k}\cot^{k+1}\theta+\sum\limits_{m=1}^{p}(-1)^m(C_{2m}^{k}+C_{2m-1}^{k})\cot^{k-2m+1}\theta+(-1)^{p+1}C_k^k}{\sum\limits_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m+1}^{k+1}\cot^{(k+1)-(2m+1)}\theta}$$

$$=\frac{C_0^{k+1}\cot^{k+1}\theta+\sum_{m=1}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k+1}\cot^{k+1-2m}\theta+(-1)^{p+1}C_{k+1}^{k+1}}{\sum_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m+1}^{k+1}\cot^{(k+1)-(2m+1)}\theta}$$

$$=\frac{\sum_{m=0}^{p+1}(-1)^m C_{2m}^{k+1}\cot^{(k+1)-2m}\theta}{\sum_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m+1}^{k+1}\cot^{(k+1)-(2m+1)}\theta}$$

$$=\frac{\sum_{m=0}^{p}(-1)^m C_{2m}^{k+1}\cot^{(k+1)-2m}\theta}{\sum_{m=0}^{p-1}(-1)^m C_{2m+1}^{k+1}\cot^{(k+1)-(2m+1)}\theta}$$

即 $n=k+1$ 時亦成立。

由數學歸納法原理知(一)式對所有 $n\in N$，$n\geq 2$ 均成立。

現在來做故障處理：爲了方便起見，將定理 1 簡記作

$$\cot n\theta=\frac{C_0^n\cot^n\theta-C_2^n\cot^{n-2}\theta+\cdots\cdots}{C_1^n\cot^{n-1}\theta-C_3^n\cot^{n-3}\theta+\cdots}\left(=\frac{\cos n\theta}{\sin n\theta}\right)$$

這個公式在 $\sin\theta=0$ 或 $\sin n\theta=0$ 時，都不能用（發生故障）

但兩種故障情形不一樣，$\sin\theta=0$ 時是因爲 $\cot\theta$ 無意義而不能用，$\sin n\theta=0$ 時是因爲分母爲零而不能用。

故當 $\sin\theta\neq 0$，$\sin n\theta=0$ 時，則 $C_1^n\cot^{n-1}\theta-C_3^n\cot^{n-3}\theta+\cdots\cdots=0$。

即若 $n\theta=k\pi$（或 $\theta=\frac{k\pi}{n}$）$k\in Z$，k 不爲 n 的倍數時 $C_1^n\cot^{n-1}\theta-C_3^n\cot^{n-3}\theta+\cdots\cdots=0$，也即 $\theta=\frac{k\pi}{n}$ $k\in Z$，k 不爲 n 的倍數時

$\cot\theta$ 爲方程式 $C_1^n x^{n-1}-C_3^n x^{n-3}+\cdots\cdots=0$ 之根

因 $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$ 且上方程式恰有 $n-1$ 個根，故可取 $k=1,2,3,\cdots\cdots n-1$

將這些結果寫成下面定理。

⊙定理 2.

設 $n\in N$　$n\geq 2$，則方程式 $C_1^n x^{n-1} - C_3^n x^{n-3} + \cdots\cdots = 0$ 的解集合為 $\{\cot\frac{\pi}{n}, \cot\frac{2\pi}{n}, \cot\frac{3\pi}{n} \cdots\cdots \cot\frac{n-1}{n}\pi\}$

由根與係數關係可得到下面推論：

推論 2-1：

㈠ $\cot\frac{\pi}{n} + \cot\frac{2\pi}{n} + \cdots\cdots + \cot\frac{n-1}{n}\pi = 0$

㈡ $\sum\cot\frac{\pi}{n}\cot\frac{2\pi}{n}$（各根兩兩乘積的和）$= \frac{-C_3^n}{C_1^n}$

㈢ $\sum\cot\frac{\pi}{n}\cot\frac{2\pi}{n}\cot\frac{3\pi}{n}$（各根三個三個乘積的和）$= 0$

……………………………………………………………等等。

因為所有對稱式均可用基本對稱式表示

故所有 $\{\cot\frac{\pi}{n}, \cot\frac{2\pi}{n} \cdots\cdots \cot\frac{n-1}{n}\pi\}$ 的對稱式均可用 n 來表示。

例如：

$$\cot^2\frac{\pi}{n} + \cot^2\frac{2\pi}{n} + \cdots\cdots + \cot^2\frac{n-1}{n}\pi = (\cot\frac{\pi}{n} + \cdots\cdots\cdots \cot\frac{n-1}{n}\pi)^2 - 2\sum\cot\frac{\pi}{n}\cdot\cot\frac{2\pi}{n} = 0 - 2\times\frac{-C_3^n}{C_1^n} = \frac{2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}}{n} = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$$

將這結果寫成下面推論：

推論 2-2：

若 $n\in N$，$n\geq 2$，則 $\sum_{k=1}^{n-1}\cot^2\frac{k\pi}{n} = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$

再舉一些例子

例 1：由定理 2. 當 $n=5$ 時，方程式 $5x^4-10x^2+1=0$ 之解集合爲 $\{\cot\frac{\pi}{5}，\cot\frac{2\pi}{5}，\cot\frac{3\pi}{5}，\cot\frac{4\pi}{5}\}$

故得

① $\cot\frac{\pi}{5}+\cot\frac{2\pi}{5}+\cot\frac{3\pi}{5}+\cot\frac{4\pi}{5}=0$

② $a=\cot\frac{\pi}{5}\cot\frac{2\pi}{5}+\cot\frac{\pi}{5}\cot\frac{3\pi}{5}+\cot\frac{\pi}{5}\cot\frac{4\pi}{5}+\cot\frac{2\pi}{5}\cot\frac{3\pi}{5}+\cot\frac{2\pi}{5}\cot\frac{4\pi}{5}+\cot\frac{3\pi}{5}\cot\frac{4\pi}{5}=\frac{-10}{5}=-2$

③ $\cot\frac{\pi}{5}\cdot\cot\frac{2\pi}{5}\cdot\cot\frac{3\pi}{5}+\cot\frac{\pi}{5}\cot\frac{2\pi}{5}\cot\frac{4\pi}{5}+\cot\frac{\pi}{5}\cot\frac{3\pi}{5}\cot\frac{4\pi}{5}+\cot\frac{2\pi}{5}\cot\frac{3\pi}{5}\cot\frac{4\pi}{5}=0$

④ $\cot\frac{\pi}{5}\cot\frac{2\pi}{5}\cot\frac{3\pi}{5}\cot\frac{4\pi}{5}=\frac{1}{5}$

⑤ $\cot^2\frac{\pi}{5}+\cot^2\frac{2\pi}{5}+\cot^2\frac{3\pi}{5}+\cot^2\frac{4\pi}{5}=(\cot\frac{\pi}{5}+\cot\frac{2\pi}{5}+\cot\frac{3\pi}{5}+\cot\frac{4\pi}{5})^2-2a=0-2\times(-2)=4$

例 2：試求 $\cos 36°$ 及 $\sin 18°$ 之值。

解：由定理 2. 知 $\cot\frac{\pi}{5}$ 爲方程式 $5x^4-10x^2+1=0$ 之根

由 $5x^4-10x^2+1=0$ 得 $x^2=\frac{5\pm2\sqrt{5}}{5}$

但 $\cot^2\frac{\pi}{5}>\cot^2\frac{\pi}{4}=1$ $\therefore \cot^2\frac{\pi}{5}=\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \tan^2\frac{\pi}{5}=\frac{5}{5+2\sqrt{5}}=\frac{5(5-2\sqrt{5})}{25-20}=5-2\sqrt{5}$

$$\cos^2 36^\circ = \cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{1}{\sec^2\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{1}{6-2\sqrt{5}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$\therefore \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

又 $\cos 36^\circ = 1-2\sin^2 18^\circ$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}+1}{4} = 1-2\sin^2 18^\circ \Rightarrow \sin^2 18^\circ = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$$

$$\sin 18^\circ = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

例 3：試求 $\cot^2\frac{\pi}{7}+\cot^2\frac{2\pi}{7}+\cot^2\frac{3\pi}{7}$ 之値。

解：由推論 2-2 $\cot^2\frac{\pi}{7}+\cot^2\frac{2\pi}{7}+\cot^2\frac{3\pi}{7}+\cot^2\frac{4\pi}{7}+\cot^2\frac{5\pi}{7}+\cot^2\frac{6\pi}{7} = \frac{(7-1)(7-2)}{3}$

且 $\cot^2(\pi-\theta)=\cot^2\theta$

$$\therefore 2\left(\cot^2\frac{\pi}{7}+\cot^2\frac{2\pi}{7}+\cot^2\frac{3\pi}{7}\right) = 10$$

$$\therefore \cot^2\frac{\pi}{7}+\cot^2\frac{2\pi}{7}+\cot^2\frac{3\pi}{7} = 5$$

像這樣的例子簡直不勝枚擧。

※指導老師的話：收穫的工作似乎已近尾聲，卻由於另一位同學提出 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 之和，如何計算而發現更意外的收穫，眞是所謂“山窮水盡疑無路，柳暗花明又一村”。

三、應用：（更意外的收穫）

我們只知道 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$為收斂級數，但不知其和究竟是多少？在老師的指導下我們找到了和，並另求出 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}$， $p=2,3,4,5,6$ 各級數的和。

◎預備定理：

若 θ 爲銳角，$p\in N$ 則 $\cot^{2p}\theta<\frac{1}{\theta^{2p}}<(1+\cot^2\theta)^p$

證明：當 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 時， $\tan\theta>\theta>\sin\theta>0$

$$\therefore 0<\cot\theta<\frac{1}{\theta}<\csc\theta$$

$$\therefore \cot^2\theta<\frac{1}{\theta^2}<\csc^2\theta$$

$$\therefore \cot^2\theta<\frac{1}{\theta^2}<\cot^2\theta$$

$$\therefore \cot^{2p}\theta<\frac{1}{\theta^{2p}}<(1+\cot^2\theta)^p$$

爲了方便起見我們將定理 2. 改寫如下：

⦿定理 3.

設 $m\in N$ 則方程式 $C_1^{2m+1}\ y^m-C_3^{2m-1}\ y^{m-1}+C_5^{2m+1}\ y^{m-2}\cdots\cdots=0$

的解集合爲 $\{\cot^2\frac{\pi}{2m+1},\cot^2\frac{2\pi}{2m+1}\cdots\cdots\cot^2\frac{m\pi}{2m+1}\}$

證明：由定理 2. 令 $n=2m+1$（$m\in N$）則方程式

$C_1^{2m+1}\ x^{2m}-C_3^{2m-2}\ x^{2m-2}+C_5^{2m+1}\ x^{2m-4}\cdots\cdots=0$ 之解集合爲 $\{\cot\frac{\pi}{2m+1},\ \cot\frac{2\pi}{2m+1},\cdots\cdots\cot\frac{2m\pi}{2m+1}\}$

令 $y=x^2$ 則方程式

$C_1^{2m+1}\ y^m-C_3^{2m+1}\ y^{m-1}+C_5^{2m+1}\ y^{m-2}\cdots\cdots=0$ 的解集合

爲 $\{\cot^2\dfrac{\pi}{2m+1}，\cot^2\dfrac{2\pi}{2m+1}，\cdots\cdots\cot^2\dfrac{2m\pi}{2m+1}\}$

$=\{\cot^2\dfrac{\pi}{2m+1}，\cot^2\dfrac{2\pi}{2m+1}，\cdots\cdots\cot^2\dfrac{m\pi}{2m+1}\}$

〔因 $\cot^2(\pi-\theta)=\cot^2\theta$〕

推論 3-1：$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{m(2m-1)}{3}$

證明：由根與係數關係得

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{C_3^{2m+1}}{C_3^{2m+1}}=\frac{2m(2m-1)}{3!}$$

$$=\frac{m(2m-1)}{3}$$

推論 3-2：$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

證明：因爲當 $1\leq k\leq m$ 時所有 $\dfrac{k\pi}{2m+1}$ 均爲銳角。

由預備定理知：

$$\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}<\left(\frac{2m+1}{k\pi}\right)^2<1+\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}$$

$\forall\quad 1\leq k\leq m$

相加得 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}<\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2m+1}{k\pi}\right)^2<\sum_{k=1}^{m}$

$\displaystyle\left(1+\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}\right)$

由推論 3-1 得

$$\frac{m(2m-1)}{3}<\frac{(2m+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}<m+\frac{m(2m-1)}{3}$$

$$\therefore\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2}<\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}<\frac{m\pi^2}{(2m+1)^2}+\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2}$$

當 $m\to\infty$ 時左右兩端的極限值均為 $\frac{\pi^2}{6}$

故 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

我們想知道的 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 之和求出後，更規到是否能將所有 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}$，$p\in N$ 求出：由推論 3-1 及 3-2 我們得到一個啓示，如果能將 $\sum_{k=1}^{m}\cot^{2p}\frac{k\pi}{2m+1}$ 表成 m的多項式則 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}$ 的和就可求出，經過多次嘗試與改進，終於歸納出一般表示法：為便於敍述，令 $x_k=\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}$ $\forall 1\leqq k\leqq m$，$k\in N$，並對 $\{x_1, x_2, \cdots\cdots x_m\}$ 使用對稱和的記號，由定理 3. ，並利用根與係數關係得：

$$f_1=\sum x_1=\frac{C_3^{2m+1}}{2m+1},\quad f_2=\sum x_1x_2=\frac{C_5^{2m+1}}{2m+1},\quad f_3=\sum x_1x_2x_3=\frac{C_7^{2m+1}}{2m+1}\cdots\cdots,\quad f_k=\sum x_1x_2\cdots\cdots x_k=\frac{C_{2k+1}^{2m+1}}{2m+1}$$

故 $\sum x_1^2=(\sum x_1)^2-2\sum x_1x_2=f_1^2-2f_2$

$$\begin{aligned}
\sum x_1^3&=f_1\cdot\sum x_1^2-\sum x_1^2x_2\\
&=f_1\cdot\sum x_1^2-f_2\cdot\sum x_1+3\sum x_1x_2x_3\\
&=f_1\sum x_1^2-f_2\sum x_1+3f_3\\
\sum x_1^4&=f_1\sum x_1^3-\sum x_1^3x_2\\
&=f_1\sum x_1^3-(f_2\cdot\sum x_1^2-\sum x_1^2x_2x_3)\\
&=f_1\sum x_1^3-f_2\sum x_1^2+(f_3\cdot\sum x_1-4\sum x_1x_2x_3x_4)\\
&=f_1\sum x_1^3-f_2\sum x_1^2+f_3\sum x_1-4f_4
\end{aligned}$$

....

一般規則如下：

⊙定理 4.

設 $p\in N$ 則 $\sum x_1^p=\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}f_k\sum x_1{}^{p-k}+(-1)^{p-1}pf_p$

證明： $p=1$ 顯然成立：

$$\begin{aligned}\sum x_1^p &= f_1\sum x_1^{p-1}-\sum x_1^{p-1}\,x_2 \quad \text{（一次）}\\
&= f_1\sum x_1^{p-1}-(f_2\cdot\sum x_1^{p-2}-\sum x_1^{p-2}\,x_2x_3) \quad \text{（二次）}\\
&= f_1\sum x_1^{p-1}-f_2\sum x_1^{p-2}+(f_3\sum x_1^{p-3}-\sum x_1^{p-3}\,x_2x_3x_4)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{（三次）}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&= f_1\sum x_1^{p-1}-f_2\sum x_1^{p-2}+f_3\sum x_1^{p-3}-\cdots\cdots+(-1)^{p-2}\\
&\quad f_{p-1}\sum x_1+(-1)^{p-1}pf_p \quad (\ p-1\text{次})\\
&= \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}f_k\sum x_1^{p-k}+(-1)^{p-1}pf_p\end{aligned}$$

推論 3 - 2 的過程給我們另一個啓示：就是

當 $m\to\infty$ 時 $\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)^{2p}\sum x_1^p$ 與 $\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)^{2p}\sum_{k=1}^{m}(1+x_k)^p$ 的極限應該是相同的，且此極限應該就是 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}$ 的和了，經過我們研究的結果得到下面定理。

◉定理 5.

設 $p\in N$ 則㈠ $\sum x_1^p$ 必爲m的 2p 次多項式。

㈡ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)^{2p}\sum_{k=1}^{m}x_1^p=A_p\cdot\pi^{2p}$

㈢ $\lim_{m\to\infty}\frac{\sum x_1^p}{(2m+1)^{2p}}=A_p$

其中 $A_p=(\sum x_1^p$ 的最高次項係數 $)\div(2)^{2p}$ 。

證明㈠因爲當 $1\leqq k\leqq m$ 時所有 $\frac{k\pi}{2m+1}$ 均爲銳角，由預備定理知:

$$\cot^{2p}\frac{k\pi}{2m+1}<\left(\frac{2m+1}{k\pi}\right)^{2p}<\left(1+\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}\right)^p$$

$$1\leqq k\leqq m$$

即 $x_k^p < (\frac{2m+1}{\pi})^{2p} \frac{1}{k^{2p}} < (1+x_k)^p \qquad 1 \leqq k \leqq m$

相加得 $\sum x_1^p < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^{2p}} < (\frac{\pi}{2m+1})^{2p} \sum_{k=1}^{m} (x_k^p + C_1^p x_k^{p-1} +$
$\cdots\cdots)$ ……………………………………………………(1)

設 $\sum x_1^p$ 爲m的 t 次多項式， $t > 2p$ 與 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}$ 爲收歛級數

不合 $t < 2p$，則 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} = 0$，故不合，因此， $t = 2p$。

因而 $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^p + C_1^p x_k^{p-1} + \cdots\cdots)$ 與 $\sum x_1^p$ 的最高次項係數相同（設爲 a_{2p}）故(1)式可化爲

$(\frac{\pi}{2m+1})^{2p} (a_{2p} m^{2p} + \cdots) < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^{2p}} < (\frac{\pi}{2m+1})^{2p}$
$(a_{2p} m^{2p} + \cdots\cdots)$

當 $m \to \infty$ 時兩端的極限值均爲 $\pi^{2p} \cdot (\frac{a_{2p}}{2^{2p}})$ 故得

(二) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} = \lim_{m \to \infty} (\frac{\pi}{2m+1})^{2p} \sum x_1^p = A_p \cdot \pi^{2p}$

消去 π^{2p} 得

(三) $\lim_{m \to \infty} \frac{\sum x_1^p}{(2m+1)^{2p}} = A_p$

由定理 4. 及定理 5. 可得到下面定理：

◉定理 6.

設 $p \in N$，$p \geqq 2$ 若 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = A_n \pi^{2n}$ ，$1 \leqq n \leqq p$ ，$n \in N$ 則

$$A_p = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \frac{A_{p-k}}{(2k+1)!} + (-1)^{p-1} \frac{p}{(2p+1)!}$$

證明：$A_p \pi^{2p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} = \lim_{m \to \infty} (\frac{\pi}{2m+1})^{2p} \cdot \sum_{k=1}^{m} x_1^p$ （定理 5.(二)）

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)^{2p}\left[\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}f_k\sum x_1^{p-k}+(-1)^{p-1}p\,f_p\right]$$

$$=\lim_{m\to\infty}\pi^{2p}\left[\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}\frac{f_k}{(2m+1)^{2k}}\cdot\frac{\sum x_1^{p-k}}{(2m+1)^{2(p-k)}}\right.$$

$$\left.+(-1)^{p-1}\cdot p\cdot\frac{f_p}{(2m+1)^{2p}}\right]$$

$$=\pi^{2p}\cdot\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}\lim_{m\to\infty}\frac{f_k}{(2m+1)^{2k}}\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{\sum x_1^{p-k}}{(2m+1)^{2(p-k)}}$$

$+(-1)^{p-1}\cdot p\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{f_p}{(2m+1)^{2p}}$，其中 $\lim_{m\to\infty}\frac{f_k}{(2m+1)^{2k}}$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{C_{2k+1}^{2m+1}}{(2m+1)(2m+1)^{2k}}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{2m(2m-1)\cdots\cdots(2m+1-2k)}{(2m+1)^{2k}\,(2k+1)!}$$

$$=\frac{1}{(2k+1)!}\qquad 1\leqq k\leqq p$$

且 $\lim_{m\to\infty}\frac{\sum x_1^{p-k}}{(2m+1)^{2(p-k)}}=A_{p-k}$ （定理 5.㈢）

故 $A_p=\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}\frac{A_{p-k}}{(2k+1)!}+(-1)^p\frac{p}{(2p+1)!}$

利用定理 6 ，我們可逐次地求出 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}$ 的和如下：

推論 6-1：㈠ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$

㈡ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}$

㈢ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8}=\frac{\pi^8}{9450}$

㈣ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{10}}=\frac{\pi^{10}}{93555}$

(五) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$

(六) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{14}} = \frac{2\pi^{14}}{18243225}$

證明：(一)由推論 3-2 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = A_1\pi^2 \quad \therefore A_1 = \frac{1}{6}$

由定理 6. $A_2 = \frac{A_1}{3!} - \frac{2}{5!} = \frac{4}{3\times 5!} = \frac{1}{90}$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = A_2 \cdot \pi^4 = \frac{\pi^4}{90}$

(二)同理：$A_3 = \frac{A_2}{3!} - \frac{A_1}{5!} + \frac{3}{7!} = \frac{16}{21\times 6!} = \frac{1}{945}$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = A_3 \cdot \pi^6 = \frac{\pi^6}{945}$

(三) $A_4 = \frac{A_3}{3!} - \frac{A_2}{5!} + \frac{A_1}{7!} - \frac{4}{9!} = \frac{192}{5\times 9!} = \frac{1}{9450}$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}$

(四) $A_5 = \frac{A_4}{3!} - \frac{A_3}{5!} + \frac{A_2}{7!} - \frac{A_1}{9!} + \frac{5}{11!} = \frac{1280}{3\times 11!} = \frac{1}{93555}$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}$

(五) $A_6 = \frac{A_5}{3!} - \frac{A_4}{5!} + \frac{A_3}{7!} - \frac{A_2}{9!} + \frac{A_1}{11!} - \frac{6}{13!} = \frac{707584}{105\times 13!}$

$= \frac{691}{638512875} \therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$

(六) $A_7=\frac{A_6}{3!}-\frac{A_5}{5!}+\frac{A_4}{7!}-\frac{A_3}{9!}+\frac{A_2}{11!}-\frac{A_1}{13!}+\frac{7}{14!}$

$$=\frac{2048}{3\times 13!}=\frac{2}{18243225}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{14}}=\frac{2\pi^{14}}{18243225}$$

四、討　論：

(一) tan $n\theta$ 亦有類似的公式。

(二)當我們找到定理 6. 的規則時實在太興奮了，雖然老師告訴我們 Euler 已證出另一種型式的公式，但畢竟我們只是高中學生。

(三)我們的工作並非一氣呵成，其間經過多次與老師討論、研究、改進，尤其是定理 6. 。

(四)預備定理及定理 3. ，推論 3-1, 3-2 是參考“劉徽割圓術”的附錄，不過定理 3. 的證法不一樣，定理 4. 5. 6. 是我們自己找到的。

(五)我們計算 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}$ 是先做出 $p=1,2,3$ 後來才歸納出定理 4. 5. 6. ，再演繹出推論 6-1 ，由於受到我們的計算機的限制，只做到 $p=7$ 。

(六)老師經常告訴我們歸納法與演繹法是研究科學最重要的兩個原則，整個過程中我們可以體會出科學的成果並非偶然的。

評語： 1.由學習的困難中發掘主要問題，並予解決。
2.具有系統系思考的潛力。
3.解決問題的方法中，顯現了具有數學分析的觀念，這在高中生中並不常見。