"Lady First"— 順序進出的排列問題

高中組數學科第二名

作　　者：吳昭文、林志昌、林勍高
周立全、吳秋煌
宜蘭高中
指導教師：吳連三

一、前言：

排列組合乃一般高三生咸認頗爲棘手之問題，因爲每一主題皆能衍生出無數個子題，是以類型繁多，解不勝解。因此，此類富有挑戰性之問題，很能激發我們青年學子的研究熱忱。

二、動機：

最近老師在一次平時考中曾有一題"八女四男順序排列，逐個進入教室，規定任一時刻教室內之男生人數不得多於女生人數，則進法有幾？"試後同學爭論不已，提出之答案不下百種，遂激起吾人求證之興趣。（註：該題爲 275 種）

三、目的：

歸納整理此類問題，尋求其一般性，進而求得m女n男情況下之通解並推廣至多種物體之排列情形。

四、主題：

㈠假設：

令有m女n男依原題限制排列進教室（$m，n \in N，m \geq n$）且爲討論過程之需要，只將學生分爲男女二種。

㈡推導：

依題意可知，當 $n=1$ 時⇒可有 m 種排法。
〔∵此男可排於任一女之後。〕

當 $n=2$ 時⇒可有（$C_2^{m+1}-1$）種排法。

〔∵排頭必為女生，此女之後有（$m+1$）人，其中（$m-1$）人為女生，2人為男生，故共有 $\dfrac{(m+1)!}{(m-1)!\,2!}=C_2^{m+2}$ 種排法，但須扣除該二男排於頭名女生之後的情形，亦即"女男男……"之情形不合。〕

當 $n=3$ 時，情況漸趨複雜，須深入討論之：

若 $m=3 \Rightarrow 5$ 種
$m=4 \Rightarrow 14$ 種
$m=5 \Rightarrow 28$ 種
$m=6 \Rightarrow 48$ 種
$m=7 \Rightarrow 75$ 種
— — — — —
— — — — —

當 $n=4$ 時，若 $m=4 \Rightarrow 14$ 種
若 $m=5 \Rightarrow 42$ 種
若 $m=6 \Rightarrow 90$ 種
— — — — — —
— — — — — —

將上述實得之結果依 m，n 之序列整理如下：

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	……
1	1	2	3	4	5	6	7	……
2		2	5	9	14	20	27	……
3			5	14	28	48	75	……
4				14	42	90	……	
⋮					……			

若視上表橫列爲數列，我們可以得到任二相鄰數列之間有下述關係：（若 S_k 表 $n=k$ 之數列）

1. S_1' 之第二項爲 S_2' 之第一項。
   S_1' 由第三項起爲 S_2' 之一級階差。
2. S_2' 第二項爲 S_3' 之第一項。
   S_2' 第三項起爲 S_3' 之一級階差。
   S_1' 第五項起爲 S_3' 之二級階差。
   （餘可類推）

㈢推論：

1. S_k 之第二項爲 S_{k+1} 之首項。
2. S_k 由第三項起爲 S_{k+1} 之一級階差。
3. S_1 由第（$2k+1$）項起爲 S'_{k+1} 之第 k 級階差。

綜合以上之結果可得下表：

（表 1 ）

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ……
1	1								
2	2	2							
3	3	5	5						
4	4	9	14	14					
5	5	14	28	42	42				
6	6	20	48	90	132	132			
7	7	27	75	165	297	429	429		
8	8	35	110	275	572	1001	1430	1430	
9	9	44	154	429	1001	2002	3432	4862	⋮ ⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

由上表中各數之分布狀況，使我們聯想到：“走捷徑”之問題的解法，不知可否用於解此類問題？幾經吾人運算之後，發覺此兩種問題表面上雖很相似，事實上卻難扯上關係；若勉強用走捷徑之方法解這種有特殊限制之排列問題，只會徒增繁雜而已。因此

我們想到二維數列來解“表一”中的各數。

㈣二維數列解“表一”：

將“表一”視爲二維數列（以二註標表一數）改寫如下：

（表一之改寫）

m \ n	1	2	3	4	⋯⋯	N	⋯⋯	⋯⋯
1	d_{11}							
2	d_{21}	d_{22}						
3	d_{31}	d_{32}	d_{33}					
4	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
M						d_{mn}		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

由㈢之推論知上表的兩個主要關係可表示如下：

(1) $d_{11}=1$，$d_{M1}=M$，當 $M=N$ 時 $d_{Mn}=d_{NN}=d_{N(N-1)}$

(2) $d_{MN}=d_{(M-1)N}+d_{M(N-1)}$

〔註標 N＞M 時之項視爲 O〕

由(2)式依遞迴定義可推演得：

$$
\begin{aligned}
d_{MN} &= d_{(M-1)N}+d_{M(N-1)}\\
d_{(M-1)N} &= d_{(M-2)N}+d_{(M-1)(N-1)}\\
d_{(M-2)N} &= d_{(M-3)N}+d_{(M-2)(N-1)}\\
&\vdots\\
+)\ d_{(N+1)N} &= d_{NN}+d_{(N+1)(N-1)}\\
\hline
d_{MN} &= d_{NN}+\sum_{P=N+1}^{M} d_{P(N-1)}
\end{aligned}
$$

又由(1)知 $d_{NN}=d_{N(N-1)}$ $\therefore d_{MN}=\sum_{P=N}^{M} d_{P(N-1)}$

如此可將 $d_{P(N-1)}$ 再依上列步驟改寫爲 $\sum_{q=N-1}^{P} d_{q(N-2)}$，依此類推

∴令 I_i 爲註標（ $i=1,2,3,\cdots\cdots N$ ），則

$$d_{MN}=\sum_{I_1=N}^{M} d_{I_1(N-1)}=\sum_{I_1=N}^{M}\ \sum_{I_2=N-1}^{I_1} d_{I_2(N-2)}$$

$$=\sum_{I_1=N}^{M}\ \sum_{I_2=N-1}^{I_1}\ \sum_{I_3=N-2}^{I_2} d_{I_3(N-3)}$$

$$\vdots$$

$$=\sum_{I_1=N}^{M}\ \sum_{I_2=N-1}^{I_1}\cdots\cdots\cdots\sum_{I_{N-2}=3}^{I_{N-3}} d_{I_{N-2}\,2}$$

$$=\sum_{I_1=N}^{M}\ \sum_{I_2=N-1}^{I_1}\cdots\cdots\cdots\sum_{I_{N-2}=3}^{I_{N-3}}\ \sum_{I_{N-1}=2}^{I_{N-2}} d_{I_{N-1}\,1}$$

$$=\sum_{I_1=N}^{M}\ \sum_{I_2=N-1}^{I_1}\cdots\cdots\cdots\sum_{I_{N-2}=3}^{I_{N-3}}\ \sum_{I_{N-1}=2}^{I_{N-2}} I_{N-1}$$

$$=\sum_{I_1=N}^{M}\ \sum_{I_2=N-1}^{I_1}\cdots\cdots\cdots\sum_{I_{N-1}=2}^{I_{N-2}}\ \sum_{I_N=1}^{I_{N-1}} 1$$

〔此式對 $M\geq N\geq 1$ 均可用，其中 $\sum$ 數爲N個〕

例： $d_{11}=\sum_{I_1=1}^{1} 1=1$

$$d_{44}=\sum_{I_1=4}^{4}\ \sum_{I_2=3}^{I_1}\ \sum_{I_3=2}^{I_2}\ \sum_{I_4=1}^{I_3} 1=\sum_{I_2=3}^{4}\ \sum_{I_3=2}^{I_2} I_3$$

$$=\sum_{I_3=2}^{3} I_3+\sum_{I_3=2}^{4} I_3=14$$

㈤公式之簡化：

由㈣中導得之通解，看來已相當清爽，對“表一”中之任一數 d_{MN} 皆可代入求之。但其中 $\sum$ 個數繁多，求解過程中有運算之困難，因此吾人欲將其簡化之：

$$\because\ d_{M1}=M\left(=\frac{M-0}{1!}\right)$$

$$d_{M2}=C_{2}^{M+1}-1=\frac{M(M-1)}{2}-1=\frac{M^2+M-2}{2}$$

$$= \frac{(M-1)(M+2)}{2!}$$

$$d_{M3} = \sum_{I_1=3}^{M} d_{I_1 2} = \sum_{I_1=3}^{M} \frac{(I_1-1)(I_1+2)}{2!} = \cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{2!} \sum_{I_1=3}^{M} (I_1^2 + I_1 - 2)$$

$$= \frac{1}{2!} \left[\sum_{I_1=1}^{M} (I_1^2 + I_1 - 2) - \sum_{I_1=1}^{2} (I_1^2 + I_1 - 2) \right]$$

$$= \frac{1}{2!} \cdot \frac{M^3 + 3M^2 - 4M - 12}{3}$$

$$= \frac{(M-2)(M+2)(M+3)}{3!}$$

$$d_{M4} = \sum_{I_1=4}^{M} d_{I_1 3} = \sum_{I_1=4}^{M} \frac{(I_1-2)(I_1+2)(I_1+3)}{3!}$$

$$= \frac{1}{3!} \cdot \frac{M^4 + 6M^3 - M^2 - 54M - 72}{4}$$

$$= \frac{(M-3)(M+2)(M+3)(M+4)}{4!}$$

$$d_{M5} = \frac{(M-4)(M+2)(M+3)(M+4)(M+5)}{5!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由上可推知：

$$d_{MN} = \frac{(M-N+1)(M+2)(M+3)\cdots\cdots(M+N)}{N!}$$

$$= \frac{(M-N+1)(M+N)!}{N!(M+1)!} \quad \text{通解。}$$

$$= \frac{M-N+1}{M+1} \cdot \frac{(M+N)!}{M!N!} = \left(1 - \frac{N}{M+1}\right) C_N^{M+N} \quad \text{通解。}$$

㈥推廣：

討論至第㈤步驟，我們對於此類問題已然得到一個簡易之公式解

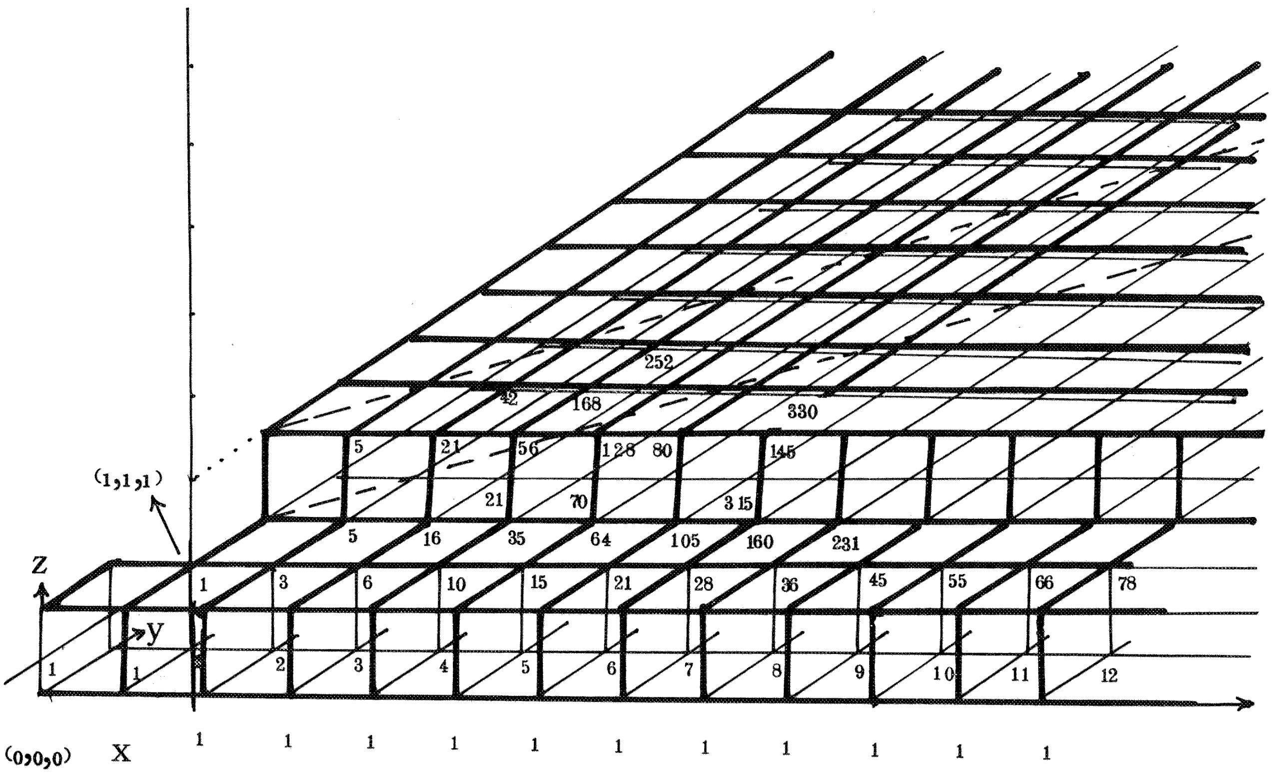
法，且對於其姊妹題亦能運用自如。例如下列二例：

例 1：一張戲票 50 元，今有 m 人持 50 元鈔票，n 人持百元鈔票欲排隊購票入場；若售票口原無款項可供找錢，則這些人有幾種排法能使售票口不致無法找錢？（ $m \geq n$ ）

例 2：m 瓶甲液及 n 瓶乙液，每瓶盛等量之液體，今欲將此二液逐瓶倒入一大桶中混合，若需使甲液在混合過程中一直維持爲溶劑之地位，則倒法有幾？（ $m \geq n$ ）

以上二例可以通解之。但是，該通解只適用於二種物體之排列，因此吾人引進第三物，看是否仍具規律性：

首先將吾人實算所得之較低級數列安排如下：（數字表排列總數）



令序對（x，y，z）表三種物體（例如白球，黑球，紅球）之個數，且 $x \geq y \geq z \geq 0$

(1)當 $z=0$ 時，（x，y，0）即爲前述之問題，其解爲

$$\frac{(x-y+1)(x+y)!}{y!\,(x+1)!} \text{ 種} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(2)當 $z=1$ 時，我們取出（x，y，1）平面上之數排列如下：

（表二）

y \ x	1	2	3	4	5	6	7	8	……………
1	1	3	6	10	15	21	28	36	……………
2		5	16	35	64	105	160	……………………	
3			21	70	162	315	…………………………		
4				84	288	………………………………			
5					330	………………………………			
⋮					………………………………………				

由㈤之結果，吾人初步了解：若上表有規律性存在，則橫列所成之數列可用一式表之，且高級之數列乃由較低級之數列有順序演變而來。故上表中：

$y=1$ 時，該數列很明顯可用 $\dfrac{x(x+1)}{2}$ 表之。

$y=2$ 時，很難看出端倪；但在吾人計算“表二”中的各數時，發現各數出現與“表一”有密切關係，使能順利推出。

$y=2$ 時 $\Rightarrow \dfrac{(x-1)(x+1)(x+3)}{3}$ 種排列

而 $y=3 \Rightarrow \dfrac{(x-2)(x+1)(x+3)(x+4)}{8}$

$y=4 \Rightarrow \dfrac{(x-3)(x+1)(x+3)(x+4)(x+5)}{30}$

$y=5 \Rightarrow \dfrac{(x-4)(x+1)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)}{144}$

…………………………………………………………………

至此我們發現了分子的演變概況。

(3)當 $z=2$ 時，依據上面所繪圖形中（x，y，z） 平面上之數字和表二作相同的推論方法，可得：

$y=2$ 時，$\dfrac{(x-1)x(x+3)(x+4)}{12}$

$$y=3 \Rightarrow \frac{(x-2)x(x+3)(x+4)(x+5)}{24}$$

$$y=4 \Rightarrow \frac{(x-3)x(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)}{80}$$

…………………………

※上面各式所得之分母，乃由各數列首項代入後求得。初看似乎雜亂無章，但若將上面各式改寫一下不同的形式則可發現任一式皆能以下式表之：

$$\frac{(x-y+1)(y-z+1)(x-z+2)(x+y+z)!}{z!(y+1)!(x+2)!} \quad \cdots\cdots\cdots②$$

(4)由(1)(2)兩式我們已可看出此類問題在多種物體的排列下其演變的情形。由此不難推論四種物體時，若 $x \geq y \geq z \geq u \geq 0$ 時，所有可能之排列法應有：

$$\frac{(x-y+1)(y-z+1)(z-u+1)(x-z+2)(y-u+2)(x-u+3)(x+y+z+u)}{u!(z+1)!(y+2)!(x+3)!}$$

種，而當吾人以 (1,1,1,1),(2,1,1,1),(2,2,1,1),(2,2,2,1),(2,2,2,2)，等較容易畫出之情況代入時皆合於所求。〔以上(2)(3)(4)之理論證明

由此，分子分母之規律性立見分曉，若欲推得 n 種物體之排列情況，已屬輕而易舉之事：依據二種、三種、四種物體之排列所產生之規律，吾人可推知 n 種物體排列之通解如下：

若 $a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots\cdots a_n$，分別表此 n 種物之個數。($a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots\cdots \geq a_2 \geq a_1 \geq 0$) 則通式之。分母爲〔$a_1!(a_2+1)!(a_3+2)!\cdots\cdots(a_n+n-1)!$〕而分子除了〔$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)!$〕外尚有 C^{n-1}_2 個因式。其決定法如下：(由①②③推演)

⇒在自然限制“ $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots\cdots \geq a_1 \geq 0$ ”中，相鄰二數 a_k, a_{k-1} ($2 \leq k \leq n$) 可產生 ($a_k - a_{k-1} + 1$) 之因式。而 a_k 與 a_{k-2} ($3 \leq k \leq n$) 可產生 ($a_k - a_{k-2} + 2$) 之因式。

⇒故 a_k 與 a_{k-h} ($h < k \leq n$，$k-h \leq 0$ 之項不存在) 可產生 (

$a_k - a_{k-h} + h$ ）之因式。（其中 $k, h \in N$）

∴ n 種物排列總數

$$= \frac{\left[\sum_{k,h=1}^{n} (a_k - a_{k-h} + h)\right](a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n)!}{a_1!(a_2+1)!(a_3+2)!\cdots\cdots(a_n+n-1)!}$$

（其中 $k-h \leq 0$ 之項不存在）

至此吾人推廣之結果總算告一段落，而且頗令人滿意。

五、結論：

以上一系列之討論雖然在表面上看來好像圍繞著“順序排列”這個主題在研討，並未應用於他處，但是，最後導出之公式，卻有其特殊之價值存在。因爲，在我們的推導過程中，找到了如下之重要關係：

若 f 表排列數，則兩種物體排列 $\Rightarrow f(m,n) = f(m,n-1) + f(m-1,n)$。三種物體之排列 $\Rightarrow f(m,n,\ell) = f(m,n,\ell-1) + f(m,n-1,\ell) + f(m-1,n)$ ………………（依此類推）

我們已知“ $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ ”乃是基本之費氏數列，而其分布乃在單維線性空間中，故吾人研討之對象，似乎可用“有特殊限制之多維費氏數列”來稱之，而其限制正好表現在公式中。

例如： $f(m,n) = \dfrac{(m-n+1)(m+n)!}{n!(m+1)}$ 之式中若改變其解之形態爲 $\dfrac{(m-n+1)}{(m+1)} \times \dfrac{(m+n)!}{m!\,n!} = \left(1 - \dfrac{n}{m+1}\right)\left(\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}\right)$

〔當 $m=n$ 時， $f(m,n) = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ 即爲著名之卡特藍數列〕

∵上式之解大於 0，∴ $\left(1 - \dfrac{n}{m+1}\right) > 0 \Rightarrow 1 > \dfrac{n}{m+1} \Rightarrow m+1 > n \Rightarrow m \geq n$，正好合乎題意，由此更證明了吾人討論結果之眞確性，並爲此類問題謀得一個更合理之說明，而能廣爲應用之。

六、結語：

排列組合之共通性就是“同類問題可求通解”，只要我們耐心推論歸納，不難找到令人滿意之結果。以本文次研究之問題而言，初遇者必然束手無策，但經整理過後，其解甚明。由此可知，欲解排列組合問題應以推理爲要，方能順利求解。

評語：1.用不同的觀點考察已知之問題，從而考慮不同的數學問題而得到有見地的結論；並反過來完全地解決原先的問題。

2.顯現出系統性思考的潛力。

3.現場講解的吳昭文和林志昌兩位同學具有研究能力，應參加資賦優異研習營。