自然係數不等式 $ax+by+cz\leq n$ 的非負整數解

高中組數學科第一名

省立新竹高級中學　　作者：許曉凱　馬健湘　鍾明峻

指導教師：許燦煌

一、研究動機：

當我們遇到形如 $x+2y+3z\leq 10$ 的不等式，而欲求其非負整數解的組數時，我們習慣的解法是：

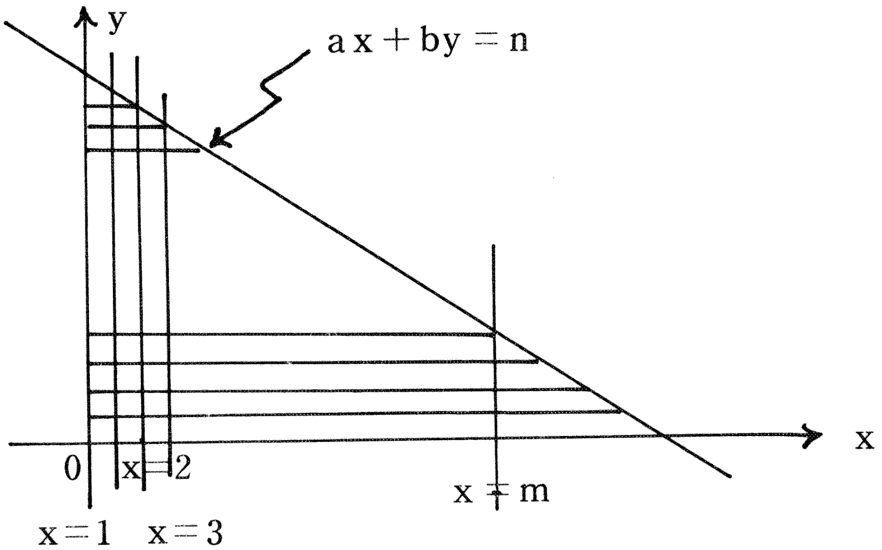
令 $z=0$ 得 $x+2y\leq 10$，共有 $(0,0,0),(1,0,0),(2,0,0)$，……及 $(2,4,0),(0,5,0)$ 等36組非負整數解。

$z=1$ 得 $x+2y\leq 7$，共有 $(0,0,1),(1,0,1),(2,0,1)$，……及 $(0,3,1),(1,3,1)$ 等20組非負整數解。

$z=2$ 得 $x+2y\leq 4$，共有 $(0,0,2),(1,0,2),(2,0,2)$，……及 $(2,1,2),(0,2,2)$ 等9組非負整數解。

$z=3$ 得 $x+2y\leq 1$，共有 $(0,0,3)$ 及 $(1,0,3)$ 等2組非負整數解。

故合計有 $36+20+9+2=67$ 組非負整數解，這種解法主要是利用平面 $z=0$，……，$z=3$ 來逐點截取合適的解，它的精神由下圖（在坐標平面 $\mathbb{R}^2$ 上）可以明白的表示出來，因此我們稱這種解法爲“逐點截取法”。



（$\mathbb{R}^2$ 上，$ax+by\leq n$非負整數解的幾何意義）

但是，一旦 $n=1000$，甚至更大，或是一般自然數 n，如何用逐點截取法一點一點去取？顯然，它是繁瑣得令人厭煩！於是我們幾位同好就着手研究這個問題，希望能從中得到一個較爲簡便的方法，下面就是我們的研究過程，請各位老師、先進指導。

二、研究過程：

(一)一個特例：

首先，讓我們考慮一個特殊情形，希望能由這些狀況推出一簡便且具一般性的結果來！

當 $a=b=c=1$ 時，不等式爲：$x+y+z\leq n$，再經移項，我們有：

$$
\begin{cases} x+y+z\leq n \\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0 \end{cases}
\Longleftrightarrow
\begin{cases} u=n-(x+y+z) \\ u\geq 0,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0 \end{cases}
\Longleftrightarrow
\begin{cases} x+y+z+u=n \\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ u\geq 0 \end{cases}
$$

而滿足上式之非負整數解的組數與所給四類物品中任取 n 個（同類物品可重複選取）的方法數相等，卽：

$$H_n^4=C_n^{n+3}=C_3^{n+3}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$

讓我們再轉換到另一個觀點：考慮分式 $\dfrac{1}{(1-x)^4}=(1-x)^{-4}$ 的展式：

$$(1-x)^{-4}=1+4x+\frac{(-4)(-5)}{2!}x^2+\frac{(-4)(-5)(-6)}{}(-x)^3$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(-4)(-5)\cdots\cdots(-4-n+1)}{n!}(-x)^n+\cdots$$

$$=1+4x+\frac{4\cdot 5}{2!}x^2+\frac{4\cdot 5\cdot 6}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{4\cdot 5\cdots\cdots(n+3)}{n!}x^n+\cdots\cdots$$

然後觀察：

x 項係數爲： $4=C^4_1=H^4_1$

x^2 項係數爲：$\dfrac{4\cdot 5}{2!}=C^5_2=H^4_2$

x^3 項係數爲：$\dfrac{4\cdot 5\cdot 6}{3!}=C^6_3=H^4_3$

x^n 項係數爲：$\dfrac{4\cdot 5\cdots(n+3)}{n!}=\dfrac{(n+3)!}{3!\times n!}=C^{n+3}_n=H^4_n$

所以，$(1-x)^{-4}$展示中x^n項的係數卽爲 $x+y+z+u=n$ 的非負整數解的組數，亦卽 $x+y+z\leq n$ 非負整數解的組數。

(二)進一步的推廣：

當 $a=1$，$b=2$，$c=3$ 時，不等式爲：$x+2y+3z\leq n$，依上討論，此不等式同義於方程式 $x+2y+3z+u=n$（$x\geq 0$，$y\geq 0$，$z\geq 0$，$u\geq 0$），所以，只要考慮此方程式的非負整數解卽可。

若（k，l，m，p）爲一組合適解，則 $k+2l+3m+p=n$，

故 $x^{k+2l+3m+p}=x$ 卽 $(x)^k\cdot(x^2)^l\cdot(x^3)^m\cdot(x)^p=x^n$

所以，欲求 $x+2y+3z+u=n$ 非負整數解的組數卽爲求下列分式展示中x^n項的係數：

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x)}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^4(1+x)(1+x+x^2)}\quad\text{（分母諸式須互質）}$$

現在，將上分式化爲部分分式（目的在將積改爲和），設

$$\frac{1}{(1-x)^4(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{f(x)}{(1-x)^4}+\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x+x^2}$$

將右式通分，比較分子得：

$$1=f(x)(1+x)(1+x+x^2)+A(1-x)^4(1+x+x^2)$$
$$+(Bx+C)(1-x)^4(1+x)$$

令 $x=-1$ 得 $A=\frac{1}{16}$

令 $x=\frac{-1+\sqrt{3i}}{2}$ （設爲 w ）化簡得

$$Bw+C=-\frac{1}{9w}=\frac{-1}{9}w^2=\frac{1}{9}w+\frac{1}{9}$$

故 $B=C=\frac{1}{9}$

最後，將 $A=\frac{1}{16}$ ，$B=C=\frac{1}{9}$ 代入，移項，化簡得：

$$f(x)=\frac{\frac{1}{144}(-25x^6+59x^5-11x^4-46x^3-11x^2+59x+119)}{(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$=\frac{1}{144}(-25x^3+109x^2-179x+119)$$

故 $\frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x+x)}$

$$=\frac{\frac{1}{144}(-25x^3+109x^2-179x+119)}{(1-x)^4}+\frac{\frac{1}{16}}{1+x}+\frac{\frac{1}{9}(1+x)}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{144}(-25x^3+109x^2-179x+119)}{(1-x)^4}+\frac{\frac{1}{16}}{1+x}+\frac{\frac{1}{9}(1-x^2)}{1-x^3}$$

下面再求各分式展開後 x^n 項的係數，然後相加即得。

而 1. $\dfrac{\frac{1}{144}(-25x^3+109x^2-179x+119)}{(1-x)^4}$ 展開後x^n項的係數由上段知爲：

$$\frac{1}{144}\left[119\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}-179\cdot\frac{(n+2)(n+1)n}{6}\right.$$

$$\left.+109\cdot\frac{(n+1)n(n-1)}{6}-25\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right]$$

$$=\frac{1}{864}(24n^3+252n^2+792n+714)$$

$$=\frac{1}{432}(12n^3+126n^2+396n+357)$$

2. $\dfrac{\frac{1}{16}}{1+x}$ 展開後 x 項係數爲：$\dfrac{1}{16}(-1)^n$

3. 因 $(1-x^3)^{-1}=1+x^3+x^6+\cdots\cdots+x^{3p}+\cdots\cdots$

故1° 當 $n=3k$ 時 $\dfrac{\frac{1}{9}(1-x^2)}{1-x^3}$ 展開後x^n項係數爲$\dfrac{1}{9}$

2° 當 $n=3k+1$ 時 $\dfrac{\frac{1}{9}(1-x^2)}{1-x^3}$ 展開後x^n項係數爲 0

3° 當 $n=3k+2$ 時 $\dfrac{\frac{1}{9}(1-x^2)}{1-x^3}$ 展開後x^n項係數爲$\dfrac{-1}{9}$

綜合 1°,2°,3° 得 $\dfrac{\frac{1}{9}(1-x^2)}{1-x^3}$ 展開後x^n項係數爲

$$\frac{-2}{9\sqrt{3}}\sin\frac{2(n-1)\pi}{3}$$

故由 1. 2. 3. 得 $x+2y+3z\le n$ 的非負整數解共有

$$\frac{1}{432}(12n^3+126n^2+396n+357)+\frac{(-1)^n}{16}$$

$$-\frac{2}{9\sqrt{3}}\sin\frac{2(n-1)\pi}{3}\quad(\text{組})$$

若 $n=1000$ 時，$x+2y+3z\le 1000$ 的非負整數解共有

$$\frac{12\times10^9+126\times10^6+396\times10^3+357}{432}+\frac{1}{16}=28070362\ (\text{組})$$

三、結論 $ax+by+cz\leqq n$ 非負整數解的一般求法)：

依據上面的討論，將它類化可以求得不等式 $ax+by+cz\le n$ 非負整數解的組數。又因 a,b,c 爲奇數或偶數共有八種情況，甚爲複雜（當然 a,b,c 一旦給定，運用上法卽可求得解答）所以，我們只列出解法的步驟如下：

(一)不等式 $ax+by+cz\le n$ 的非負整數解與方程式 $ax+by+cz+u=n$ 同義。

(二)求分式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)}$$

展示中 x^n 項的係數卽得。而欲求此分式展開式中 x^n 項的係數，我們又詳細的列出下面幾個步驟：

1. 依據 a,b,c 的奇數或偶數，將分母改寫爲幾個互質多項式的乘積（否則部分分式不一定存在，唯一）。
2. 化分式爲部分分式。
3. 求部分分式各分式展示中 x^n 項的係數。
4. 將各分式展示中 x^n 項係數相加。

四、發展：

欲求(一)自然係數不等式 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_kx_k\le n$ 非負整數解的組數。

或(二)多項式 $(\alpha_1 x_1^{a1}+\alpha_2 x_2^{a2}+\cdots\cdots+\alpha_k x_k^{ak}+\alpha_{k+1} x_{k+1}+C)^n$

展示中所有n次方項的總項數，其中 $\alpha_i \neq 0$ $(i=1,2\cdots\cdots,k,k+1)$，C爲常數。

我們可以換爲求下列分式展開式中 x^n 項的係數：

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^{a1})(1-x^{a2})\cdots\cdots(1-x^{ak})}$$

例如：不等式 $x+2y+3z+4u \leq n$ 的非負整數解，利用上面的方法，經計算後可得到下列的組數：

$$\frac{1}{41472}(72n^4+1584n^3+11952n^2+35640n+33780)$$

$$+\frac{1}{128}[11(n+1)\times(-1)^n+9n\times(-1)^{n-1}]$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{16}\mathrm{Sin}\frac{(2n+1)\pi}{4}$$

$$-\frac{2}{27}\mathrm{Cos}\frac{2(n-2)\pi}{3}$$

上面的計算雖然也不輕鬆，但比起逐點截取法實在是方便、簡單多了！

五、參考資料：

1. 高中數學教材第一册、第五册。
2. 數論導引——華羅庚編著。

評語：1.處理方式迥異於一般方法；利用增加一未知數將不等式化成等式，而與排列組合的論法連結起來。也利用了分式展開的係數表示非負整數解的個數。

2.具有創造性。

3.表達能力強。