

進入碰撞的世界—從碰撞時間做起

高中組物理科第一名

高雄市立高雄高級中學

作者：許乃威 李啓隆 趙庭課 莊國堂

指導教師：郭修陸



一、研究動機與前言：

實驗課本中的動量守恒實驗，一度空間是使用滑車碰撞，二度空間是用一球從軌道上滑下來撞擊放在軌道前支架上的球。前者有相當大的摩擦力作用，後者則很難使兩球碰撞時不受支架的影響。於是我們就探討能否設計新實驗予以改進。並且課本也無三度空間碰撞的實驗，所以我們又想到：「我們的實驗能否不僅只改進一度和二度空間的碰撞，而且也能包容三度空間碰撞實驗？」我們相信設計出一個實驗，能將幾個在課本裏被割開的實驗，重新結合為一體，是值得我們

努力的方向，便開始了研究過程。

但由於二球在碰撞期間，仍受「重力」這一外力作用，使我們又設計實驗測量碰撞時間，來估計重力的影響程度。並發現碰撞時間受甚多因素影響，便決定控制變因，研究它和速度及質量的關係。

並且由於碰撞時間甚短，而兩球落地時間也不易精確量得，我們也需要一線路來控制電磁鐵的電源，因此便想到利用數位系統這一新方法來控制整個實驗。就在這一步又一步的改進當中，我們成功地做出了整個實驗。

二、研究目的：

- (一)探討如何應用數位系統，來處理碰撞實驗，並自製邏輯電路。最後尋求「有效訊號」來操縱此系統。
- (二)使用上述裝置，測量碰撞時間，並探討碰撞時間和速度及質量的關係，最後找出最符合實驗結果的作用力模型。
- (三)同樣使用上述裝置，設計一個只需改變角度就可作出一度二度和三度空間碰撞的實驗；並證明三度空間動量守恒定律仍舊成立。

三、實驗裝置：

以漆包線懸吊的鐵球、支架、電磁鐵，數位控制線路，數位高速計時器，（計時器是以TTL數位IC為主要零件，其速度由輸入脈波的頻率決定，而脈波頻率為 2×10^6 赫）整流器，示波器，兩塊裝有銅片開關的木板、木尺。

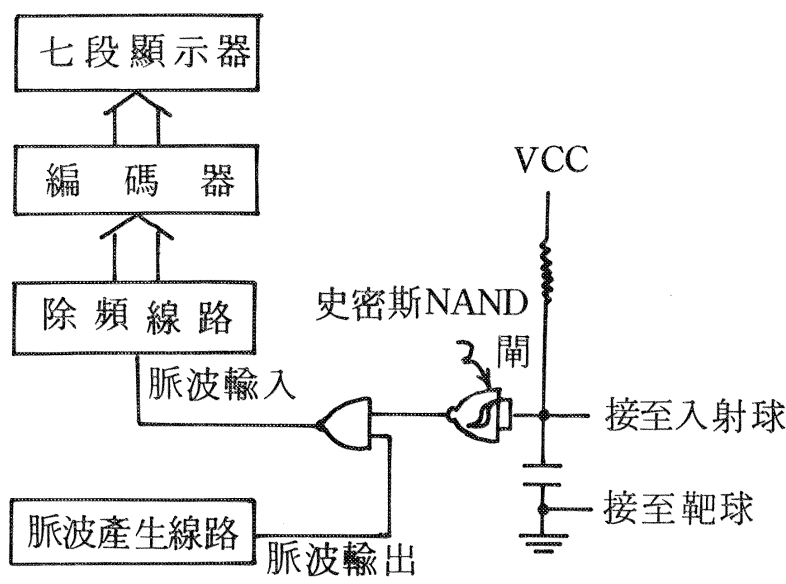
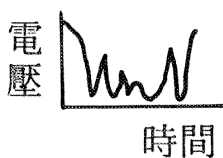
四、儀器工作原理：

本實驗使用數位系統做主控裝置，並且利用入射球上電壓狀態的改變做為輸入控制線路的訊號，使主控線路依實驗之需要來控制實驗器材並自動開啓或關閉計時器。

(一)碰撞時間：

史密斯NAND 閘輸入端原先接上電源電壓，所以輸入端為高準位，當入射球和靶球接觸時史密斯NAND 閘的輸入便降為低準

位，脈波就可輸入除頻線路，因此計時器開始計時，當入射球和靶球分開時，史密斯 NAND 閘的輸入升到高準位，因此脈波便無法輸入除頻線路，計時器便停止計時（如圖一）。（由於兩球接觸時，史密斯 NAND 閘的輸入端會產生高頻雜訊，無法完全穩定降為 0 伏特（如圖）因此在輸入端和接地端上並聯一個電容，使高頻雜訊的影響減至最小程度）。

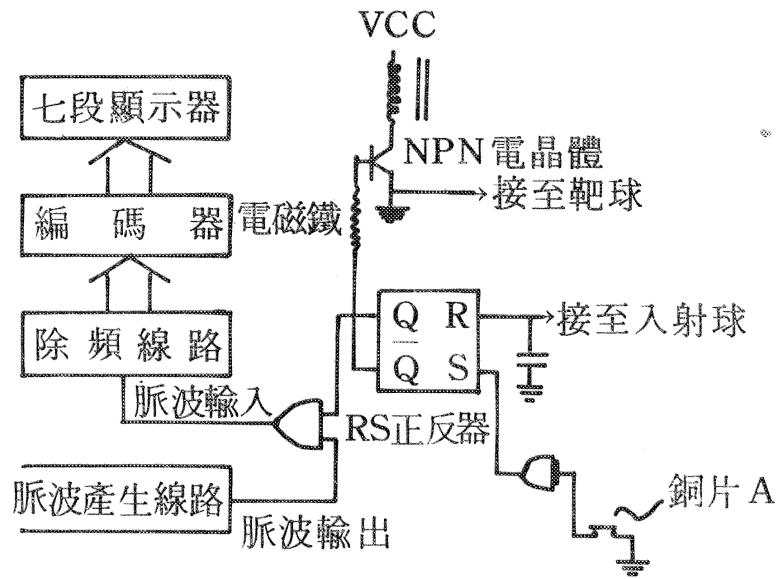


(圖一)

(二)空間碰撞動量守恆實驗：

碰撞前，銅片 A 壓在 a 開關上，使得 R S 正反器的 S 輸入為高準位，當入射球和靶球發生碰撞，R S 正反器便由 0 狀態變為 1 狀態，因此 NPN 電晶體無基極電流、電磁的電源便無法構成回路，夾子隨即彈開。脈波同時由 NAND 閘輸入除頻線路，而啓動計時器。

當入射球和靶球落到地面上的木板時，便把 a 開關上的銅片震開，使得 R S 正反器又由 1 狀態回復到 0 狀態，計時器便馬上停止，落地時間就可從顯示器上讀出。（如圖二）

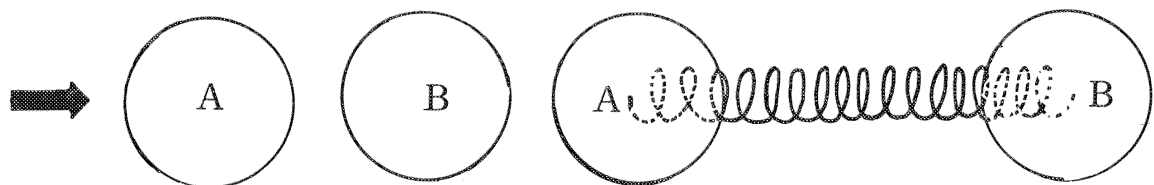


(圖二)

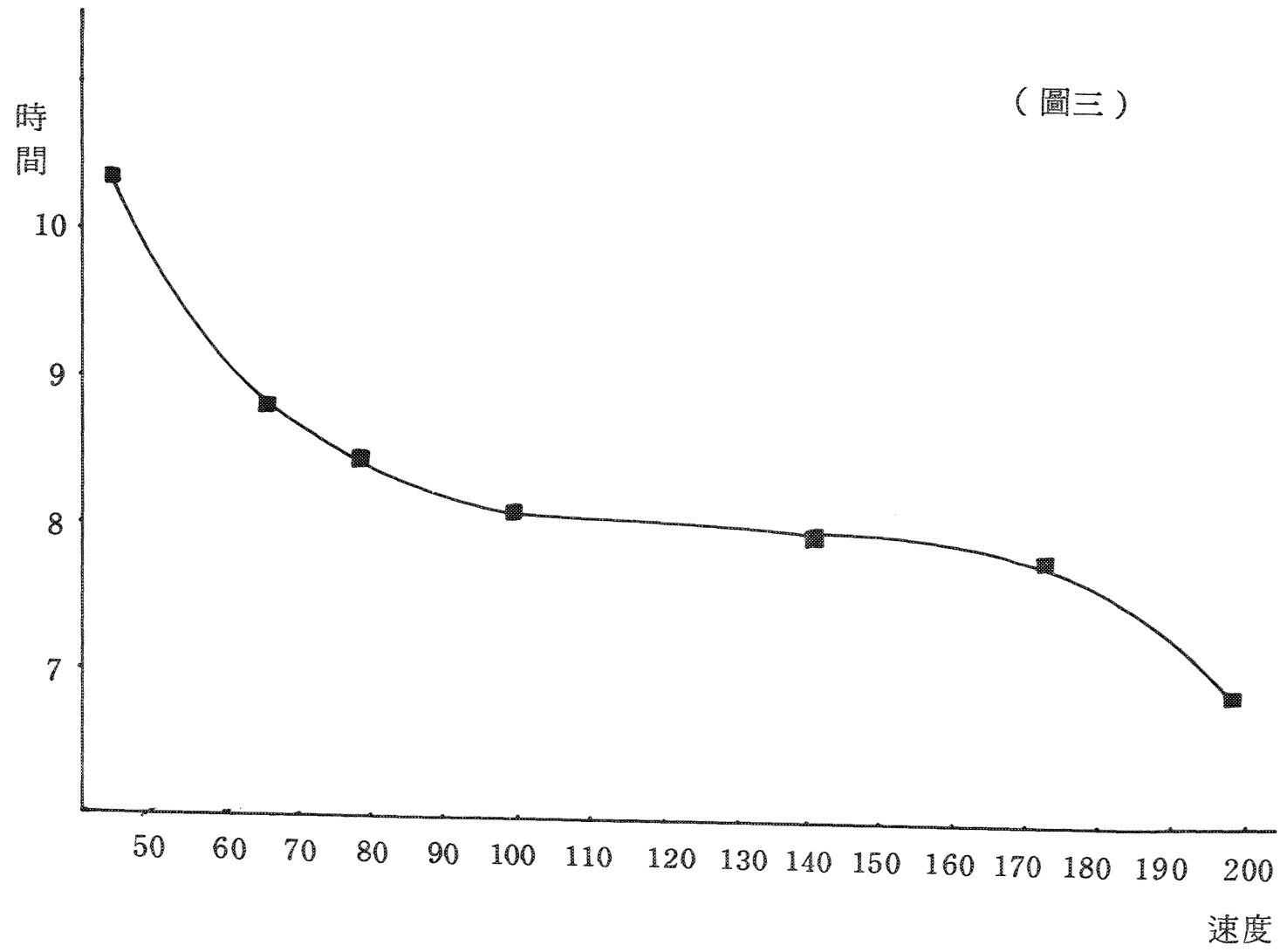
五、研究過程：

(一)碰撞時間：

- 1 首先我們固定使用相同的入射球和靶球，改變高度來撞擊；發現其速度—時間之關係圖如「圖三」（時間是選用 5 次的平均值）。顯然當速度小於 60cm/sec 或大於 170cm/sec 時，其曲線有大幅度的改變；但介於這二者之間時，曲線幾乎可視為一條平坦的水平直線！此關係是否是解開碰撞時間之謎的線索？我們想到了當 A，B 二物體作二體振盪時，週期和二物體在各自的平衡點速度無關；而如果是 A 球來撞擊 B 球，從質量中心看到的情況，將和二體振盪有非常相似的地方！（如圖四）



(圖四)



2 於是我們設計了第一個模型：（參閱圖四）

假設二物體在碰撞期間是以一「想像」的彈簧連結；也就是二物體受力情形為： $F = -kx$ （ x 為二物體相對位置的改變量），以 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 表 A, B 二球的位置。由 $F = ma$ ，得

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx \qquad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = +kx$$

第一式乘以 m_2 ，第二式乘以 m_1 ，兩式相減得

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = -kx \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\text{折合質量 } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

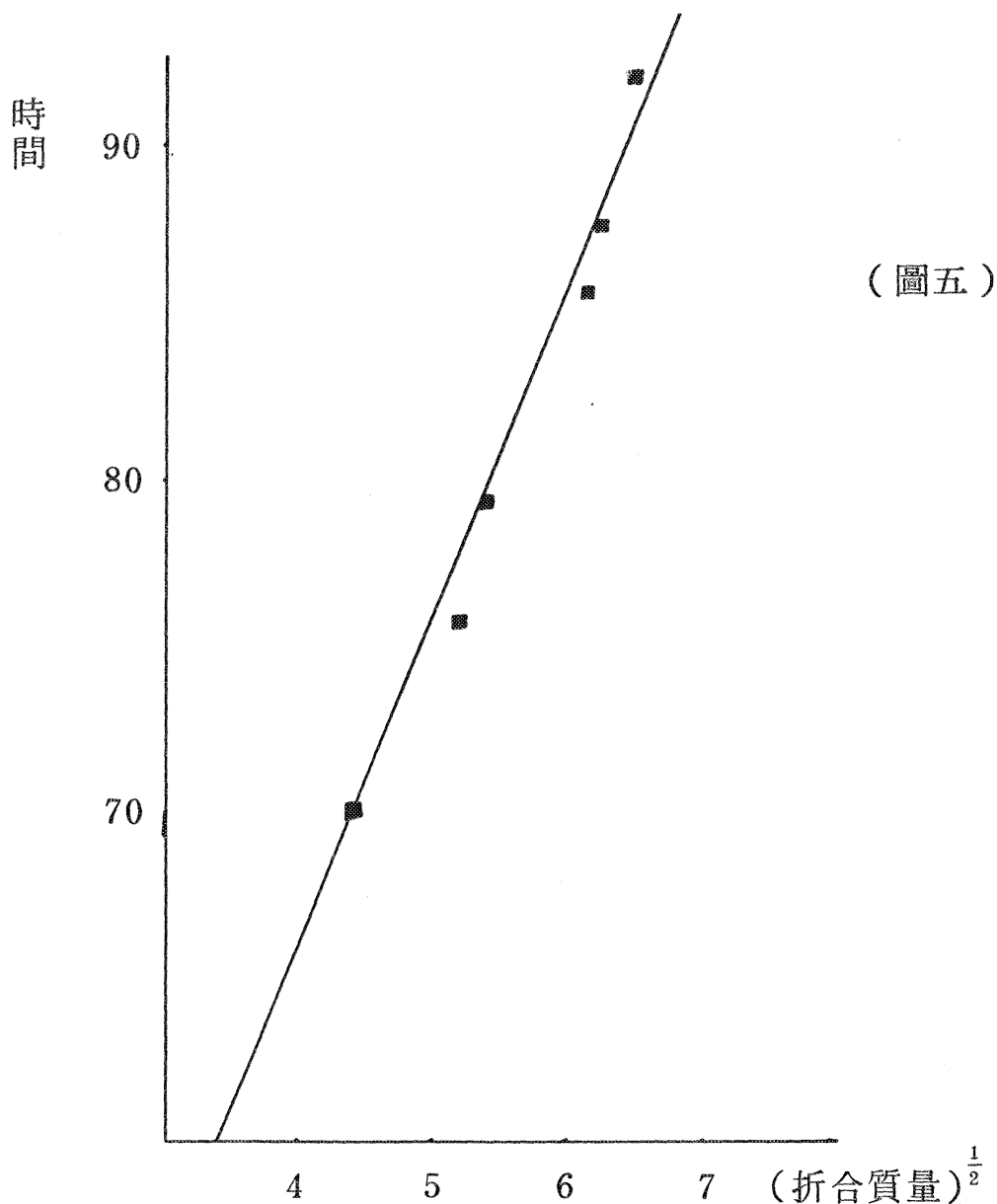
式①可寫成

$$\mu \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{它的解 } x = A \cos(\omega t + \delta), A, \delta \text{ 是常}$$

$$\text{數, } \omega^2 = \frac{k}{\mu} \quad \therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

A, B 二物體起先在平衡點（尚未受力）視為碰撞開始，當第二次在平衡點視為碰撞結束，所以週期 T 也就等於碰撞時間的兩倍。顯然 T 只和 A, B 的折合質量及彈簧的 k 值有關，和 A, B 在平衡點的速度無關，所以也和入射球初速無關。如果碰撞時，只有一“彈簧力”作用，則式①應對所有物體都成立。也就是 T 應正比於 A · B 的折合質量開平方。為驗證上項推論，我們做了下一個實驗：

3. 固定入射球速度但改變二球的質量，使之碰撞。我們得到了如「圖五」的關係圖。



從圖五，可看出 t 和 $\sqrt{\mu}$ 略呈線性，但如畫一條參考線，將發覺描出的點在線兩側跳動，並不十分逼近！顯然上面的模型尚不足以完整說明真實情況。

有人提出可能是公式中的 k 值隨二物體不同而變，也就是 k 值尚不為常數。也有人提出另一種建議：仍把 k 視為常數，但再加入其他形式的力。我們採用了第二個方法：再加入一摩擦力。我們立刻想到空氣阻力和速度成正比而方向相反這一事實；碰撞時內部的摩擦力可能也是如此形式！

4. 我們寫下了第二個模型：

A, B 二球碰撞時，共有“彈簧力” ($F_k = -kx$) 和摩擦力

($F_r = -rV$) 作用 (V 為相對速度), 得

$$\mu a = -kx - rV$$

$$\mu \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + r \cdot \frac{dx}{dt} + kx = 0 \dots\dots\dots ②$$

式②的解, 以微分方程得

$$x = Ae^{-rt/2\mu} \cos(w't + \delta) \dots\dots\dots ③$$

$$w' = \sqrt{\frac{k}{\mu} - \left(\frac{r}{2\mu}\right)^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{w'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{\mu} - \left(\frac{r}{2\mu}\right)^2}} \dots\dots\dots ④$$

整理式④

$$\left(\frac{1}{T}\right)^2 = \frac{\frac{k}{\mu} - \left(\frac{r}{2\mu}\right)^2}{4\pi^2} = \frac{k}{4\pi^2 \cdot \mu} - \frac{r^2}{16\pi^2 \cdot \mu^2}$$

$$\text{令 } p = \frac{k}{4\pi^2} \quad q = \frac{r^2}{16\pi^2}$$

$$\text{則 } \left(\frac{1}{T}\right)^2 = \frac{p}{\mu} - \frac{q}{\mu^2}$$

也就是碰撞時間倒數的平方和質量的倒數成拋物線關係。

我們做出了以 $(1/t)^2$ 為縱軸, $1/m$ 為橫軸的座標圖 (圖六)。

它是一條相當圓滑的曲線!

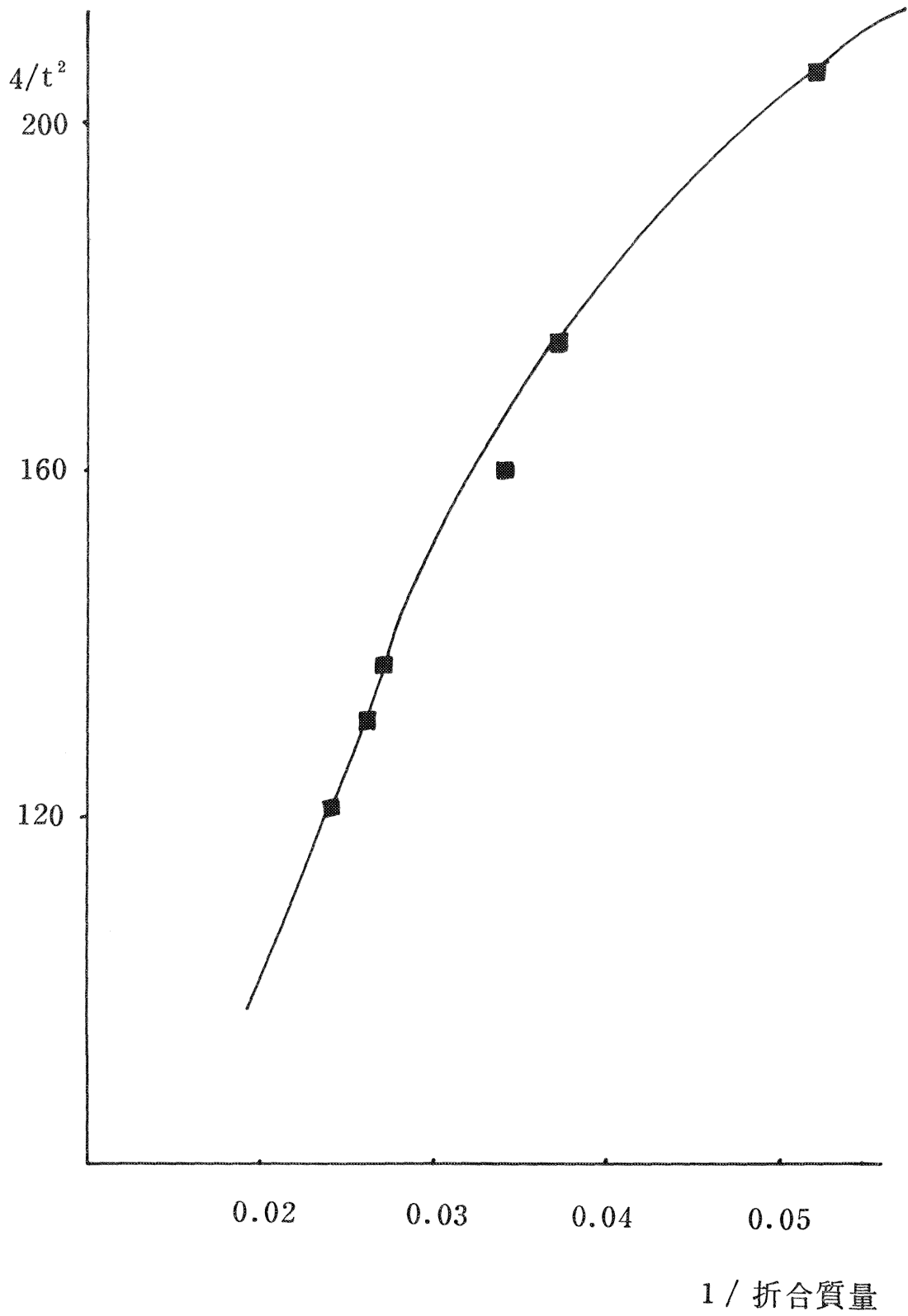
我們應用內插法, 推論得當折合質量之倒數為 0.044 (克) $^{-1}$ 時, 碰撞時間倒數的平方應為 1.92×10^8 (秒) $^{-2}$ 。經實驗結果, 其值為 1.88×10^8 (秒) $^{-2}$ 。誤差只有 2.08% !

顯然第二個模型比第一個模型更趨近於實驗結果。也更能「有效」地預測結果。

(二) 空間碰撞動量守恆實驗

1. 首先定出坐標軸

(圖六)



- (1)將入射球掛在電磁鐵的溝槽上，讓其自由落下，將落點定為原點，再將靶球以同樣方法落下，將其落點定為靶球的出發點。
- (2)在掛靶球之處橫置一甚細之銅線（但不掛靶球），然後將入射球向後拉高至某一定點，讓其自由下滑，與細銅線接觸後作水平拋射運動，將其落點與原點連接，定為 x 軸，過原點且與 x 軸垂直的水平直線為 y 軸，鉛直線則為 z 軸。
2. 將入射球與靶球掛上，並分別測量其最低點高度，將入射球向後拉高，並測量其拉高之高度，然後讓其自由下滑，與靶球碰撞，使二球分別落在兩片覆蓋複寫紙的木板上，並測量 x 軸， y 軸方向的位移，以計時器上顯示的時間與二球之 x ， y 軸方向的位移，由 $v_x = \frac{d_x}{t}$ ， $v_y = \frac{d_y}{t}$ 求出 X 軸， Y 軸之分速度。
- 再測量入射球和靶球原先之自然高度，由 $h = v_z t + \frac{1}{2} g t^2$ （速度向下）， $-h = v_z t - \frac{1}{2} g t^2$ （速度向上）可知 z 軸之分速度。求出 v_x ， v_y ， v_z 就可驗證動量守恆定律： $m_{入} \vec{v}_{入初} = m_{入} \vec{v}_{入末} + m_{靶} \vec{v}_{靶末}$
3. 以同樣方法，使入射球與靶球作各種不同角度的碰撞。當碰撞後二球無 y ， z 軸方向的分速度時，為一度空間碰撞。當二球無 z 軸方向的分速度時，為二度空間碰撞。否則為三度空間碰撞。

六、討論與結論：

(一)碰撞是自然界最常見却也是最複雜的現象之一。「碰撞時間」和「動量守恆實驗」就是我們利用數位系統來研究碰撞現象的兩個成功的實驗。其實數位系統能處理的不只是「時間」的測定，以往使用電鈴計時器和紙帶打點，不僅結果不精確，而且非常缺乏

「彈性」。利用數位系統只要能發出「有效」的訊號，它就幾乎可做一切分析。對改進物理實驗，相信會有所貢獻。

- (二)使用數位系統，關鍵之處就在於如何發出「有效」訊號。由於我們的訊號一直停留在「電壓狀態的變化」這一方法上，因此只能測出碰撞的時間，而無法深入碰撞的內部世界。我們希望有新的訊號。或許能利用電磁波（因為一帶電體被加速，周圍發生電場變化，就產生感應磁場，感應磁場又生感應電場……，如此循環相生，就產生電磁波。利用這一特性，或許能發出所需訊號，但筆者未予求證。）
- (三)因為我們無法獲悉碰撞內部情形，於是只能純粹由「外觀」上假設最可能的作用力模型，來和實驗結果比照。而且作用力錯綜複雜，使我們無法將某一種特定的作用力孤立出來，單獨研究。而「圖六」中的曲線雖然相當圓滑，可是也無法判定究竟是二次或三次曲線。雖然有相當的預測能力，但將數據代入公式，以行列式解出 p ， q 發覺它們也並不完全是定值。
- (四)我們的模型成立的範圍非常狹窄，只能適用於某一段速度。對於「圖一」中兩側時間的陡然變化，毫無解釋能力。只能說或許此時其他形式力的影響相當重要，以致破壞模型。同時，它也只成立於一度空間碰撞。我們以後將繼續研究「碰撞角度」對時間的影響，將「角度」這一變因置入時間的公式中。以上的幾點就是我們將來努力的方向，希望能真正模擬出空間碰撞時作用力的完整模型。
- (五)操作「碰撞時間」的實驗時，由於變因相當複雜，必須格外注意變因的控制。
- (六)「動量守恆實驗」中，重力的作用會影響實驗結果。但由前面求出的碰撞時間僅約 $6.5 \times 10^{-5} \sim 1 \times 10^{-4}$ 秒之事實，知其甚小而可不予考慮。
- (七)由實驗結果可證明三度空間碰撞動量仍然守恆。
- (八)當落地時間甚短時，極小的時間誤差對 z 軸上求得的分速度影響即甚大（可由 $h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ 看出）所以實驗時高度不可太低

，以增加落地時間，減少誤差的影響。

- (九)我們使用了最簡單的想法來使物體落地後，立即停止計時器；（即利用撞擊木板時產生的振動將銅片彈開）卻得到了十分令人滿意的效果。經過測試，高度低產生的誤差約 0.5%，提高高度幾乎可降為 0.1%。（方法為將二木板重疊一部分，改變二開關和落地點的距離，再比較球掉落木板時，二計時器顯示的數字。）
- (十)這套實驗裝置還有個最簡單的應用：測量重力加速度。本實驗所使用的 g 值就是經它測定出來的 977.6 cm/sec^2 。

七、參考資料：

1. 物理學 Halliday (Book I , II , III) 。
2. 大學物理學，李怡嚴（第一冊）。
3. 大學物理，東海出版社。
4. 基本近代物理學 R. M. EISBERG（徐氏基金會）。
5. 力學原理淺說（徐氏基金會）。
6. 數位積體電路資料手冊（TTL DATABOOK）。
7. 邏輯電路實驗，王師編。
8. 物理實驗大王（力學篇）徐氏基金會。

- 評語：
1. 本作品採分工合作的方式進行，有的作者做理論方面的探討，有的作者做實驗方面的設計及執行。
 2. 能利用簡單自製電子儀器討論一複雜兩體作用之問題。
 3. 對實驗結果，有理論的探討，以求對問題的較深入瞭解。
 4. 理論模型雖不理想，但已盡力。
 5. 作者之中，有的很有想像力。