

# 有趣的湊錢法

## 高小組數學科第三名

桃園縣立西門國民小學

作者：徐得彬、張啟程

邱雅齡、廖婉如

指導老師：鄭鳳珠、王添義



### 一、研究動機和目的

有一天上數學課的時候，老師忽然提出了一個問題：「用 1 元、5 元、10 元、50 元和 100 元的錢幣湊成 1256 元，有幾種湊法？」我們覺得這個問題很有趣，但是一時之間答不上來，課後三五成羣，聚在一起討論，拿出錢幣排排看，發現情形錯綜複雜、種類繁多，無從著手，於是想到分類整理，作圖解，第二天提出了許多不同的答案，…… 414 種，102 種……九百多種，二千多種……，但都沒有



5 元硬幣數	0	1	2	3
1 元硬幣數	18	13	8	3
湊成的錢數	18	18	18	18

(2) 只做一個例子，很難發現規律，所以我們從 0 元開始做了許多例子，分別列表，此處因受版面限制，所以只舉例如表(二)及表(三)。

5 元硬幣數	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	3	.....			
1 元硬幣數	0	1	2	3	4	5	0	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5	0	11	6	1	12	7	2	13	8	3	14	9	4	15	10	5	0	.....
湊成的錢數	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12	12	13	13	13	14	14	14	15	15	15	.....	

(表二)

錢 數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	.....	
湊 法	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	.....

(表三)

#### 4. 分析規律：

- (1) 從上面三個表中，可看出錢數每增加 5 元，湊法就多一種。
- (2) 從表(三)，我們發現：湊錢法只在 5、10、15、20.....時增加 1，其他時候是沒有變化的，例如：1~4 元，湊法和 0 元一樣都是 1 種，6~9 元和 5 元一樣都是 2 種.....等。

#### 5. 歸納算法：

- (1) 把錢數為 5、10、15、20.....等的情形列表如下：

錢 數	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	.....
湊 法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	.....

(表四)



10元硬幣數	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2
5元硬幣數	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	0	1
1元硬幣數	28	23	18	13	8	3	18	13	8	3	8	3
湊成的錢數	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28

(一)                      (二)                      (三)

用 0 張 10 元

用 1 張 10 元

用 2 張 10 元

用 0 張 10 元

至少用 1 張 10 元

||

||

||

||

||

只用 1 元 5 元

只用 1 元 5 元

只用 1 元 5 元

只用 1 元 5 元

只用 1 元、5 元、10 元

湊 28 元

湊 18 元

湊 8 元

湊 28 元

湊 18 元

$$\boxed{28 \div 5 + 1}$$

$$\hookrightarrow(28) = 6$$

$$\hookrightarrow(28) = \hookrightarrow(28) + \hookrightarrow(28 - 10) + \hookrightarrow(28 - 20)$$

$$= 6 + 4 + 2$$

$$= 6 + 6$$

$$= 12$$

$$\boxed{18 \div 5 + 1}$$

$$\hookrightarrow(18) = 4$$

$$\boxed{8 \div 5 + 1}$$

$$\hookrightarrow(8) = 2$$

⇒

$$\hookrightarrow(28) = 6$$

$$\hookrightarrow(18) = 4 + 2 = 6$$

$$\hookrightarrow(28) = \hookrightarrow(28) + \hookrightarrow(28 - 10)$$

$$= 6 + 6$$

$$= 12$$

10元硬幣數	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2
5元硬幣數	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	0	1
1元硬幣數	28	23	18	13	8	3	18	13	8	3	8	3
湊成的錢數	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28

(一)                      (二)

3. 歸納：

做了許多例子以後（見附件丙），我們覺得用表(五)表示湊錢法太囉嗦，太麻煩，而可以應用  $f(28) = f(28) + f(28 - 10)$  的算法，簡化成下表：

(表六)

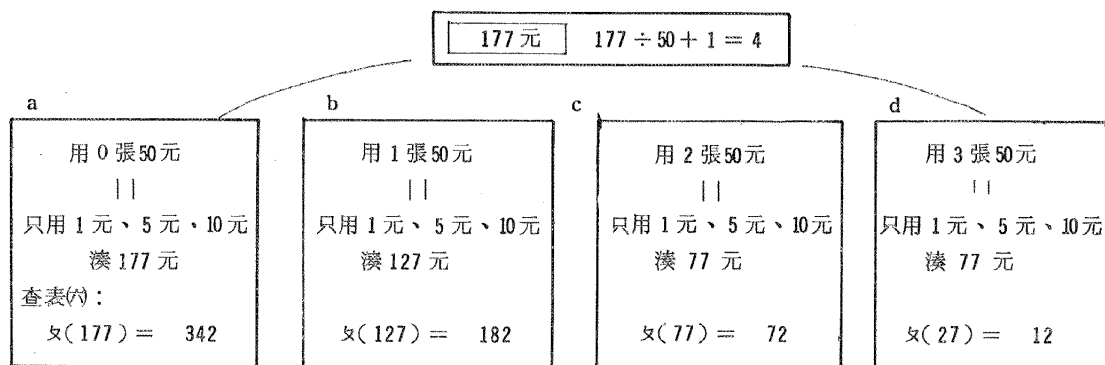
種數 湊法	錢數	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	...
勺		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
女		1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	72	81	90	...

~ 研習(三) ~

1元、5元、10元和50元的湊法用口表示，1元、5元、10元、50元和100元的湊法用ㄐ表示，兩種湊錢法的研習過程，可以仿照研習(二)，因受版面限制舉例如下

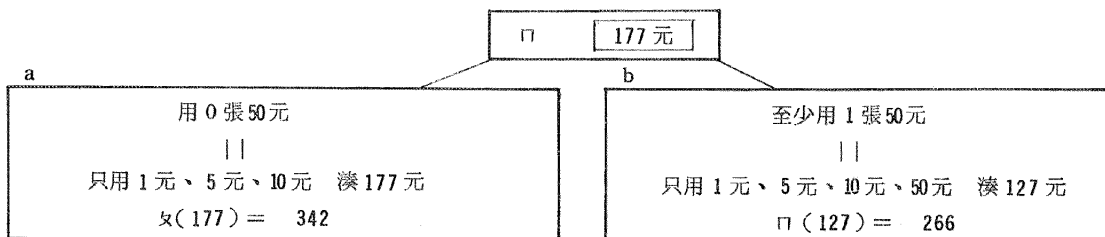
1. 用口湊成 177 元的方法口(177)：

(1) 分析算法：



$$\square(177) = f(177) + f(177 - 50) + f(177 - 100) + f(177 - 150) = 342 + 182 + 72 + 12 = 342 + 266 = 608$$

⇒



$$\square(177) = f(177) + \square(177 - 50) = 342 + 266 = 608$$

(2)歸納列表： (表七)

種數 錢數 湊法	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	80	80	85	...
ㄅ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
ㄆ	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	72	81	90	...
ㄇ	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	37	44	53	62	73	84	97	110	...

※ 錢數小於50元時，湊法和ㄆ(用1元、5元、10元)的方法數一樣。

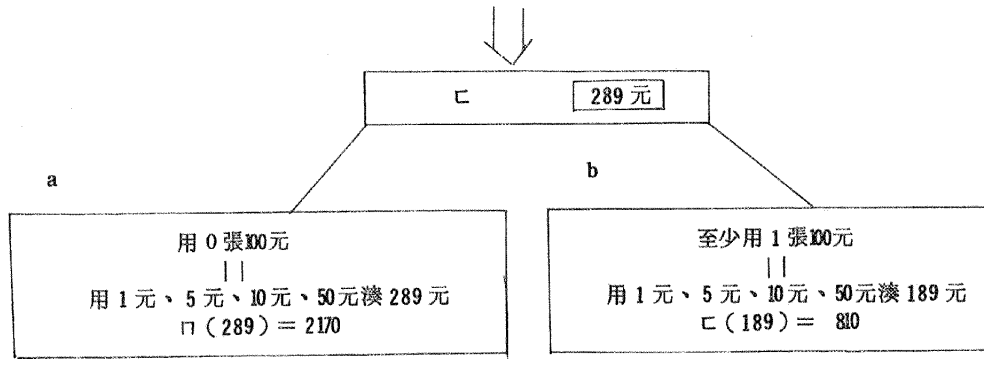
2. 用ㄇ湊成289元的方法 ㄇ(289) :

(1)分析算法：

$$\boxed{289} \quad 289 \div 100 + 1 = 3$$

<p>a</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;">                 用 0 張 100 元                                      用 1 元、5 元、10 元、50 元                  湊 289 元                  查表(ㄇ)  <math>\pi(289) = 2170</math> </div>	<p>b</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;">                 用 1 張 100 元                                      用 1 元、5 元、10 元、50 元                  湊 189 元  <math>\pi(189) = 700</math> </div>	<p>c</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;">                 用 2 張 100 元                                      用 1 元、5 元、10 元、50 元                  湊 89 元  <math>\pi(89) = 110</math> </div>
--	--	--

$$\pi(289) = \pi(289) + \pi(189) + \pi(89) = 2170 + 700 + 110 = 2170 + 810 = 2980$$



$$\pi(289) = \pi(289) + \pi(289 - 100) = 2170 + 810 = 2980$$

(2)歸納列表： (表八)

錢數 湊法	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
ㄅ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ㄆ	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	72	81	90
ㄇ	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	37	44	53	62	73	84	97	110
ㄏ	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	37	44	53	62	73	84	97	110

錢數 湊法	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175
ㄅ	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
ㄆ	100	110	121	132	144	156	169	182	196	210	225	240	256	272	289	306	324	342
ㄇ	125	140	158	176	197	218	242	266	293	320	350	380	414	448	486	524	566	608
ㄏ	125	140	159	178	201	224	251	278	309	340	375	410	451	492	539	586	639	692

※錢數小於100元時湊法和ㄇ(用1元、5元、10元、和50元)的方法數一樣。

#### 四、結論與心得

- 應用表(八)，我們在附件已詳細列表，推算出原來的問題，用ㄏ湊成1256元的方法數共有：535,444種，真是有趣，多得令人咋舌！
- 從這次的研習活動中，我們發現各種錢數在ㄅ、ㄆ、ㄇ、ㄏ四種不同情況下，都有共同的規則：
  - 每增加5元，就多一種湊法，湊錢法只在錢數為5、10、15、20……時增加1，其他時候是沒有變化的。
  - 任何錢數全部用1元硬幣的方法，都一樣只有一種。
  - 錢數較大時，湊法可分數段計算，段數的決定依序以5元、10元、50元、100元的個數而定。
- 假如用n表示任何錢數，那麼每種情況的湊錢法，分別是：
 
$$\begin{aligned} \text{ㄏ}(n) &= \text{ㄇ}(n) + \text{ㄏ}(n-100), \text{ㄇ}(n) = \text{ㄆ}(n) \\ &+ \text{ㄇ}(n-50), \text{ㄆ}(n) = \text{ㄅ}(n) + \text{ㄆ}(n-10), \end{aligned}$$
 這些式子，老師告訴我們是一種遞迴式子，對於較大的ㄏ(n)，ㄇ(n)、ㄆ(n)都要依據較小的ㄅ(n)來計算，而ㄅ(n)有一個簡單的式子可算出： $n \div 5 + 1$ 。
- 依此可推廣成用1元、5元、10元、50元、100元和500元，或



用 1 元、5 元、10 元、50 元、100 元、500 元和 1000 元的錢幣來湊錢，這兩個問題可以仿照前述過程，分段算出結果，因為列表太長太繁，所以我們就不列出來了。

5. 以前看到數學題目總是頭痛，經過了這次的研究討論之後，覺得數學是多麼有趣呀！並且我們獲得了一種寶貴的學習方法：遇到難題時，要簡化問題、列表、分析、找規律、最後回到原問題就可找出結案了。

## 五、參考資料

科學教育第 24 期，青少年世界中的數學(一) 黃敏晃 教授譯

評語：學童們把握了將問題分析簡化後再處理的原則。