

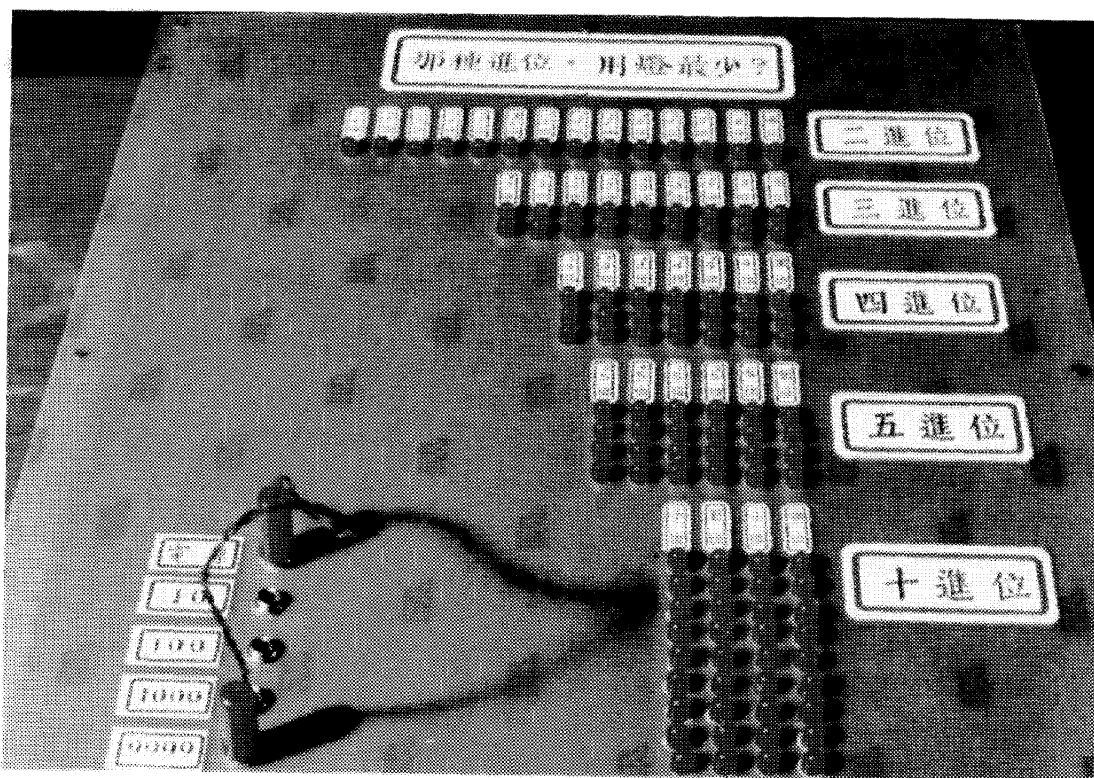
# 燈炮代表數

## 高小組數學科第一名

台北市立太平國民小學

作者：張瓊元、楊淑瑛

指導教師：連日標



### 一、研究動機

小學一年級，我們就學習計數：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10……，接著又練習計算： $1 + 1 = 2$ 、 $2 + 1 = 3$ 、 $3 + 1 = 4$ …… $9 + 1 = 10$ ……。如今我們已經習慣於做十進位的計數和算。逢十進一，這是天經地義，理所當然。

偶而在書上看到一則文字：“電腦在計算或處理問題時，不是使用十進位算法，而是使用二進位算法”。“哦，原來十進位不是全能——這就是我們的感受，於是我們就開始研究二進位、三進位、四進

位……，進而以燈代表數，看那一種進位，用燈最少。以下就是我們所做的。

## 二、研究經過和內容

### 1 十進位的計數和記數：

將 1 依照順序連加於前數就可以得到連續整數 1、2、3、4……。當個位數連加到十時。個位要寫零，將 1 進到它左邊一位當做十，這一位就是十位，十位數連加到十也要進到它左邊一位，當做百，以下類推。十進位法的規則是逢十進一。所用的阿拉伯數字共有十個。

### 2 二進位的記數：

二進位法的規則是逢二進一，所需要的數字有二，0 和 1，以下說明十以內的二進位的記法，括號外面的小字 10，表示括號內的數是十進位：

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{r} 0 \\ + 1 \\ \hline 1 \end{array} \rightarrow (1)_{10} & \begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ \hline 10 \end{array} \rightarrow (2)_{10} & \begin{array}{r} 10 \\ + 1 \\ \hline 11 \end{array} \rightarrow (3)_{10} & \begin{array}{r} 11 \\ + 1 \\ \hline 100 \end{array} \rightarrow (4)_{10} \\
 \begin{array}{r} 100 \\ + 1 \\ \hline 101 \end{array} \rightarrow (5)_{10} & \begin{array}{r} 101 \\ + 1 \\ \hline 110 \end{array} \rightarrow (6)_{10} & \begin{array}{r} 110 \\ + 1 \\ \hline 111 \end{array} \rightarrow (7)_{10} & \begin{array}{r} 111 \\ + 1 \\ \hline 1000 \end{array} \rightarrow (8)_{10} \\
 \begin{array}{r} 1000 \\ + 1 \\ \hline 1001 \end{array} \rightarrow (9)_{10} & \begin{array}{r} 1001 \\ + 1 \\ \hline 1010 \end{array} \rightarrow (10)_{10} & & 
 \end{array}$$

### 3 三進位的記數：

規則是逢三進一，所用數字有三：0、1 和 2。

記數法如上（小字 3 代表括號裏的數是三進位）：

$$\begin{aligned}
 (1)_3 &= (1)_{10} & (2)_3 &= (2)_{10} & (10)_3 &= (3)_{10} & (11)_3 &= (4)_{10} \\
 (12)_3 &= (5)_{10} & (20)_3 &= (6)_{10} & (21)_3 &= (7)_{10} & (22)_3 &= (8)_{10} \\
 (100)_3 &= (9)_{10} & (101)_3 &= (10)_{10} & & & & 
 \end{aligned}$$

### 4 四進位、五進位……九進位等記數方法：

規則分別是逢四進一，逢五進一，……逢九進一。需要數字分別是四個、五個……九個。記數方法如上。

5. 十一進位的記數：

規則是逢十一進一，需要數字是十一個，但阿拉伯數字只有十個，所以自創一個“尸”字代表十。記數 1 至 9 同十進位，  
 $(尸)_{11} = (10)_{10}$ ， $(10)_{11} = (11)_{10}$ ， $(11)_{11} = (12)_{10}$  …… $(19)_{11} = (20)_{10}$ ，  
 $(1尸)_{11} = (21)_{10}$ ， $(20)_{11} = (22)_{10}$  ……等。

6. 十二進位，十三進位……等任意進位的記數：

規則分別是逢十二進一，逢十三進一……等。需要數字分別是十二個、十三個……等。不足數字還是要自創。

7. 用燈代表數：

觀察以上含有零的記數，例如：

$(10)_2 = 2$ ， $(100)_2 = 4 = 2^2$ ， $(1000)_2 = 8 = 2^3$  ……

$(10)_3 = 3$ ， $(100)_3 = 9 = 3^2$ ， $(1000)_3 = 27 = 3^3$  ……

不難發現任意進位的位名可用其進位數的自乘方式來表示。下面所列的是幾種不同進位代表一萬以內的所有數應包含的位名。

$2^{13}$	$2^{12}$	$2^{11}$	$2^{10}$	$2^9$	$2^8$	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	2	個位	…二進位
					$3^8$	$3^7$	$3^6$	$3^5$	$3^4$	$3^3$	$3^2$	3	個位	…三進位
							$4^6$	$4^5$	$4^4$	$4^3$	$4^2$	4	個位	…四進位
								$5^5$	$5^4$	$5^3$	$5^2$	5	個位	…五進位
								$6^5$	$6^4$	$6^3$	$6^2$	6	個位	…六進位
									$7^4$	$7^3$	$7^2$	7	個位	…七進位
									$8^4$	$8^3$	$8^2$	8	個位	…八進位
									$9^4$	$9^3$	$9^2$	9	個位	…九進位
									$10^4$	$10^3$	$10^2$	10	個位	…十進位
										$11^3$	$11^2$	11	個位	…十一進位

把燈依照上表的順序由右至左排列，用以代表各位數；每位數

所需要的燈數恰為該進位法所需數字減 1，因為某位若燈全不亮，即代表該位是 0。例如十進位每位所需燈數為 9，若某位的 9 個燈全不亮即代表該位是 0。

8. 燈所代表的數值：

二 進 位

$2^{13}$	$2^{12}$	$2^{11}$	$2^{10}$	$2^9$	$2^8$	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	2	個位	
8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	亮一個燈

三 進 位

$3^8$	$3^7$	$3^6$	$3^5$	$3^4$	$3^3$	$3^2$	3	個位	
6561	2187	729	243	81	27	9	3	1	亮一個燈
13122	4374	1458	486	162	54	18	6	2	亮二個燈

四 進 位

$4^6$	$4^5$	$4^4$	$4^3$	$4^2$	4	個位	
4096	1024	256	64	16	4	1	亮一個燈
8192	2048	512	128	32	8	2	亮二個燈
12288	3072	768	192	48	12	3	亮三個燈

五 進 位

$5^5$	$5^4$	$5^3$	$5^2$	5	個位	
3125	625	125	25	5	1	亮一個燈
6250	1250	250	50	10	2	亮二個燈
9375	1875	375	75	15	3	亮三個燈
12500	2500	500	100	20	4	亮四個燈

### 六 進 位

$6^5$	$6^4$	$6^3$	$6^2$	6	個位	
7776	1296	216	36	6	1	亮一個燈
15552	2592	432	72	12	2	亮二個燈
23328	3888	648	108	18	3	亮三個燈
31104	5184	864	144	24	4	亮四個燈
38880	6480	1080	180	30	5	亮五個燈

### 七 進 位

$7^4$	$7^3$	$7^2$	7	個位	
2401	343	49	7	1	亮一個燈
4802	686	98	14	2	亮二個燈
7203	1029	147	21	3	亮三個燈
9604	1372	196	28	4	亮四個燈
12005	1715	245	35	5	亮五個燈
14406	2058	294	42	6	亮六個燈

### 八 進 位

$8^4$	$8^3$	$8^2$	8	個位	
4096	512	64	8	1	亮一個燈
8192	1024	128	16	2	亮二個燈
12288	1536	192	24	3	亮三個燈
16384	2048	256	32	4	亮四個燈
20480	2560	320	40	5	亮五個燈
24576	3072	384	48	6	亮六個燈
28672	3584	448	56	7	亮七個燈

### 九 進 位

$9^4$	$9^3$	$9^2$	9	個位	
6561	729	81	9	1	亮一個燈
13122	1458	162	18	2	亮二個燈
19683	2187	243	27	3	亮三個燈
26244	2916	324	36	4	亮四個燈
32805	2645	405	45	5	亮五個燈
39366	4374	486	54	6	亮六個燈
45927	5103	567	63	7	亮七個燈
52488	5832	648	72	8	亮八個燈

### 十 進 位

$10^4$	$10^3$	$10^2$	10	個位	
10000	1000	100	10	1	亮一個燈
20000	2000	200	20	2	亮二個燈
30000	3000	300	30	3	亮三個燈
40000	4000	400	40	4	亮四個燈
50000	5000	500	50	5	亮五個燈
60000	6000	600	60	6	亮六個燈
70000	7000	700	70	7	亮七個燈
80000	8000	800	80	8	亮八個燈
90000	9000	900	90	9	亮九個燈

#### 9. 代表某數所需要的燈數：

代表十以內、百以內、千以內或萬以內的數所需要的燈數各是多少呢？利用上表由右至左累加各位數最下面的數，直到超過十、百、千或萬為止，然後在累加停止的那一位上找出，能使

“累加和”超出較少的數，把它畫個記號（如上表中的圈），然後看看該數從個位右數來是第幾個，就知道所需要的燈數。

代表不超過 10、100、1000、10000 所需要的燈數列表於下，再根據這個表，畫燈數和顯示數的關係圖於其後。

代表某數所需要的燈數

要代表的數	10 以內	100 以內	1000 以內	10000 以內
二進位	4	7	10	14
三進位	5	9	13	17
四進位	5	10	15	20
五進位	6	12	17	23
六進位	6	12	19	26
七進位	7	14	20	28
八進位	8	15	22	30
九進位	9	17	25	33
十進位	10	19	28	37

10. 各進位間的關係：

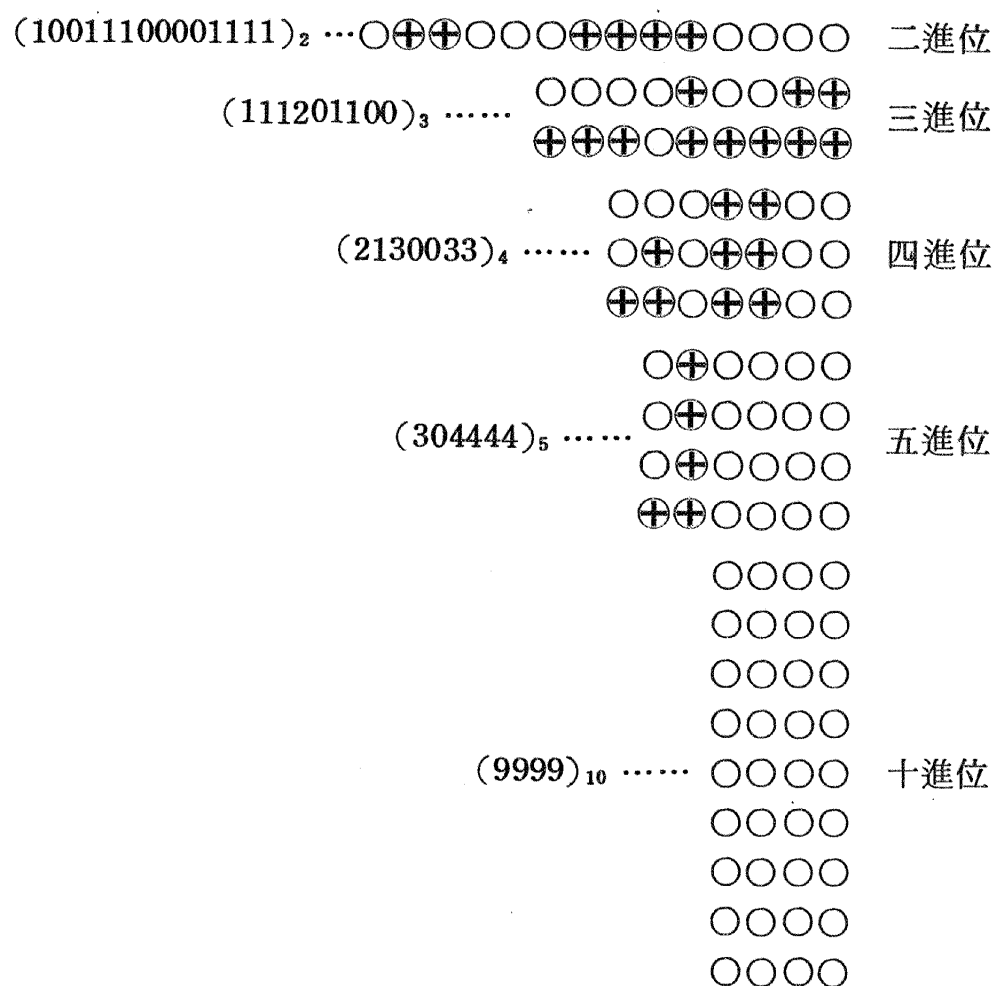
$$(10)_{10} = (1010)_2 = (101)_3 = (22)_4 = (20)_5 = (14)_6 \\ = (13)_7 = (12)_8 = (11)_9 = (\mathcal{A})_{11}$$

$$(100)_{10} = (1100100)_2 = (10201)_3 = (1210)_4 = (400)_5 \\ = (244)_6 = (202)_7 = (144)_8 = (121)_9 = (91)_{11}$$

$$(1000)_{10} = (1111101000)_2 = (1101001)_3 = (33220)_4 \\ = (13000)_5 = (4344)_6 = (2626)_7 = (1750)_8 \\ = (1331)_9 = (82\mathcal{A})_{11}$$

$$(9999)_{10} = (10011100001111)_2 = (111201100)_3 \\ = (2130033)_4 = (304444)_5$$

將最後一行的關係，用燈示法表示如下（○表示燈亮，⊕表示燈不亮）：



### 三、結 論

從上面燈數和顯示數的關係圖得知：

在二進位至十進位中

- 1 二進位法用燈最少。
- 2 進位數愈大，用燈愈多。
- 3 要表示的數愈大，要用的燈愈多，各進位間用燈的差距也愈大。

末尾說明：

- 1 製作過程中遇到的困難是：幾十個燈泡並聯時，乾電池不容易把燈點亮。改用發光二極體後，困難就解決了。不過各個發光



二極體性質不盡相同，所以亮度也就不很均勻。

- 2 本作品先闡釋任意進位的概念，再比較二至十進位“燈示法”的難易，發現二進位法較其他進位法“燈示”容易。這比較過程和模型製作並無參考他書或模仿他人作品。

評語：學童們比較不同進位法所用之亮燈數發現二進位法較優，頗具創意，值得鼓勵。