

挑戰！再挑戰

初小組數學科第二名

台中市立太平國民小學

作者：王集福、孔德正
陳立勳、邱和源
趙慧萍

指導老師：傅癸妹、林勝鳳

一、研究動機

第八次的「我來挑戰」是這樣一個數學題：「小明的媽媽宣布：『考試滿分第一次給獎金 10 元，以後每增加一次，獎金是前一次的二倍。』小明在上學期一共得到十次滿分，他總共得到多少獎金？」我交出答案紙後，覺得用一次一次連加的方法，次數一多，不但麻煩，而且容易出錯。如果能找出簡便的算法，可適用於不同的獎金倍數和次數，那該多好！我把這個想法和同學討論，他們也認為這是個好主意，就去請教老師，要怎樣做才能找出這個公式？老師說我們能進行自我的再挑戰，真是太好了。這類問題在數學上是等比級數求總和的方法，就指導我們進行下列的研究。

二、研究目的

求出等比級數求總和的公式。

三、研究過程

1 研究挑戰題：

比較同學們的答案紙，覺得列表比較清楚，就將挑戰題作成表一，希望能從表中找出規則來，結果發現了：

第二次累積獎金（30 元）＝第三次獎金（40 元）－ 10 元

第三次累積獎金（70 元）＝第四次獎金（80 元）－ 10 元

第四次累積獎金（150 元）＝第五次獎金（160 元）－ 10 元

第五次累積獎金(310元) = 第六次獎金(320元) - 10元
 第六次累積獎金(630元) = 第七次獎金(640元) - 10元
 第七次累積獎金(1270元) = 第八次獎金(1280元) - 10元
 第八次累積獎金(2550元) = 第九次獎金(2560元) - 10元
 第九次累積獎金(5110元) = 第十次獎金(5120元) - 10元

表一

次 數	獎 金	累 積 獎 金
1	10	10
2	20	30
3	40	70
4	80	150
5	160	310
6	320	630
7	640	1270
8	1280	2550
9	2560	5110
10	5120	10230

2. 驗證公式(-):

(1) 研究題 1 : 第一次給獎金 1 元, 以後每次給獎金額是前次的 2 倍, 6 次共得獎金多少元?

a 先用公式(-)算出:

$$\text{累積獎金} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 10 = 54$$

b 再列表二對照:

表二

次 數	獎 金	累 積 獎 金
1	1	1
2	2	3
3	4	7
4	8	15
5	16	31
6	32	63

c 比較公式(一)和表二的答案： $54 \neq 63$

(2)結果：公式(一)不正確。

3.發現：由表二我們發現：累積獎金=下次獎金-1元(公式(一))

4.比較公式(一)和公式(二)：兩個公式的差別在所減的數字不一樣。
爲什麼會有這點差別呢？比較導出這二個公式的問題，同樣是2倍，但第一次給獎金額不一樣，而所減的數目正是第一次給獎的金額，因此，我們做了以下的修正。

5.修正公式(一)和公式(二)：

累積獎金=下次獎金-第一次獎金………公式(二)

6.驗證公式(二)：

(1)研究題2：第一次給獎金2元，以後每次給獎金額是前次的2倍，8次共得獎金多少元？

a 以公式(二)算出：

$$\begin{aligned} \text{累積獎金} &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 2 \\ &= 510 \end{aligned}$$

b 再列表三對照：

表三

次 數	獎 金	累 積 獎 金
1	2	2
2	4	6
3	8	14
4	16	30
5	32	62
6	64	126
7	128	254
8	256	510

c 比較公式(二)和表三的答案： $510 = 510$

(2)結果：公式(二)是正確的。

7.利用公式(二)可計算3倍的給獎問題嗎？

(1)研究題3：第一次給獎金3元，以後每次給獎金額是前次的

3 倍，6 次共得獎金多少元？

a 先以公式(三)算出：

$$\text{累積獎金} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 - 3 = 2184$$

b 再列表四對照：

表四

次 數	獎 金	累 積 獎 金
1	3	3
2	9	12
3	27	39
4	81	120
5	243	363
6	729	1092

c 比較公式(三)和表四的答案：2184 \neq 1092

(2)結果：利用公式(三)不能計算 3 倍的給獎問題。

8. 修正公式(三)：再提出 3 倍給獎的問題列表求出答案，再作比較。

(1)研究題 4：第一次給獎 1 元，以後每次給獎金額是前次的 3 倍，9 次共得獎金多少元？

a 列表五求答案：

表五

次 數	獎 金	累 積 獎 金
1	1	1
2	3	4
3	9	13
4	27	40
5	81	121
6	243	364
7	729	1093
8	2187	3280
9	6561	9841

b 比較公式(三)和表四表五的答案，對公式(三)作了以下的修正

(2)結果：累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) ÷ 2 ... 公式(四)

9. 驗證公式(四)：

(1)研究題 5：第一次給獎金 4 元，以後每次給獎金額是前一次的 3 倍，5 次共得獎金多少元？

a 先以公式(四)算出：

$$\text{累積獎金} = (4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 - 4) \div 2 = 484$$

b 再列表六對照：

表六

次 數	獎 金	累 積 獎 金
1	4	4
2	12	16
3	36	52
4	108	160
5	324	484

c 比較公式(四)和表六的答案 $484 = 484$

(2)結果：公式(四)是正確的。

10. 利用公式(四)可計算 4 倍給獎的問題嗎？

(1)研究題 6：第一次給獎金 2 元，以後每次給獎金額是前次的 4 倍，7 次共得獎金多少元？

a 先利用公式(四)算出：

$$\text{累積獎金} = (2 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 - 2) \div 2 = 16383$$

b 再列表七對照：

表七

次 數	獎 金	累 積 獎 金
1	2	2
2	8	10
3	32	42
4	128	170
5	512	682
6	2048	2730
7	9192	10922

c 比較公式(四)和表七的答案 $16383 \neq 10922$

(2)結果：公式(四)不正確。

- 11.修正公式(四)：經過討論，我們發現如果將公式(四)中的 $\div 2$ 改為 $\div 3$ ，公式(四)和表七的答案就一致了。因此我們將公式(四)修正為：

$$\text{累積獎金} = (\text{下次獎金} - \text{第一次獎金}) \div 3 \dots\dots \text{公式(五)}$$

- 12.驗證公式(五)：

- (1)研究題 7：第一次給獎金 1 元，以後每次給獎金額是前次的 4 倍，4 次共得獎金多少元？

a 先利用公式(五)算出：

$$\text{累積獎金} = (1 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 - 1) \div 3 = 85$$

b 再列表八對照：

表八

次 數	獎 金	累 積 金 額
1	1	1
2	4	5
3	16	21
4	64	85

c 比較公式(五)和表八： $85 = 85$

(2)結果：公式(五)是正確的。

- 13.修正公式(三)~公式(五)：

我們發現不同的給獎倍數，就必須用不同的公式，像這樣的公式，無法普遍應用於同類的問題，表示公式仍有偏失，一定要加以修正。

- (1)研究題 8：如何找出其他倍數的公式呢？

a 列表：將倍數和公式列成表九，希望從中能有所發現：

倍 數	公 式
2	累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) $\dots\dots$ 公式(三)
3	累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) $\div 2$ 公式(四)
4	累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) $\div 3$ 公式(五)

表九

b 推想：由表九，我們推想出 5 倍、6 倍、7 倍的給獎公式，如表十。

表十

倍數	公 式
5	累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) ÷ 4 … 公式(六)
6	累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) ÷ 5 … 公式(七)
7	累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) ÷ 6 … 公式(八)

14. 驗證推想的公式：

(1) 研究題 9：第一次給獎金 2 元，以後每次給獎金額是前次的 5 倍，6 次共得獎金多少元？

a 5 倍的給獎公式，依表十是用公式(六)來計算：

$$\begin{aligned} \text{累積獎金} &= (2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 - 2) \div 4 \\ &= 7812 \end{aligned}$$

b 再列表十一對照：

表十一

次 數	獎 金	累 積 獎 金
1	2	2
2	10	12
3	50	62
4	250	312
5	1250	1562
6	6250	7812

c 比較公式(六)和表十一的答案： $7812 = 7812$

(2) 結果：公式(六)是正確的。那麼，推想出來的公式(六)(七)(八)都是正確的。

15. 如何找出正確的公式呢？

(1) 比較公式(三)~公式(八)：

將公式(三)~公式(八)全列出來，對倍數和公式做進一步的比較，或許可以有所發現。

表十二

倍數	公 式
2	累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) 公式(三)
3	累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) ÷ 2 公式(四)
4	累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) ÷ 3 公式(五)
5	累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) ÷ 4 公式(六)
6	累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) ÷ 5 公式(七)
7	累積獎金 = (下次獎金 - 第一次獎金) ÷ 6 公式(八)

(2)發現：3 ~ 7 倍的公式，在下次獎金減第一次獎金後，必須除以一个數，而且該除數和倍數間有一定的關係，即除數比倍數少 1。如表十三

表十三

倍 數	除 數
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6

(3)修正公式(三)：

根據我們的發現，2 倍給獎的公式(三)應該修正為：

$$\text{累積獎金} = (\text{下次獎金} - \text{第一次獎金}) \div 1 \dots\dots \text{公式(九)}$$

(4)歸納：比較公式和倍數的關係，除數是倍數減 1。

(5)修正公式(四)~(九)：

$$\text{累積獎金} = (\text{下次獎金} - \text{第一次獎金}) \div (\text{倍數} - 1) \dots\dots \text{公式(十)}$$

16. 驗證公式(十)：

(1)驗證題 1：第一次給獎金 4 元，以後每次給獎金額是前次的 6 倍，4 次共得獎金多少元？

a 先以公式(十)計算：

$$\begin{aligned} \text{累積獎金} &= (4 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 - 4) \div (6 - 1) \\ &= 1036 \end{aligned}$$

b 再列表十四對照：

表十四

次 數	獎 金	累 積 獎 金
1	4	4
2	24	28
3	144	172
4	864	1036

c 比較公式(+)和表十四的答案 $1036 = 1036$

d 結果：公式(+)是正確的。

(2) 驗證題 2：第一次給獎金 2 元，以後每次給獎金額是前次的 10 倍，5 次共得獎金多少元？

a 先以公式(+)計算：

$$\begin{aligned} \text{累積獎金} &= (2 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 - 2) \div \\ & (10 - 1) = 22222 \end{aligned}$$

b 再列表十五對照：

表十五

次 數	獎 金	累 積 獎 金
1	2	2
2	20	22
3	200	222
4	2000	2222
5	20000	22222

c 比較公式(+)和表十五的答案： $22222 = 22222$

d 結果：公式(+)是正確的。

(3) 驗證題 3：第一次給獎金 1 元，以後每次給獎金額是前次的 3 倍，8 次共得獎金多少元？

a 先以公式(+)計算：

$$\text{累積獎金} = (1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 - 1)$$

$$\div (3 - 1) = 3280$$

b 再列表十六對照：

表十六

次 數	獎 金	累 積 獎 金
1	1	1
2	3	4
3	9	13
4	27	40
5	81	121
6	243	364
7	729	1093
8	2187	3280

c 比較公式(+)和表十六的答案： $3280 = 3280$

d 結果：公式(+)是正確的。

四、結 果

我們獲得有關倍數給獎共得多少獎金的公式如下：

$$\text{累積獎金} = (\text{下次獎金} - \text{第一次獎金}) \div (\text{倍數} - 1)$$

五、討 論

1 獲得公式的過程正確嗎？

我們從許多實際問題出發，採用列表比較的方式，找出規則來，作為假設的公式，再將假設公式加以驗證，並透過推想和歸納的活動，最後得到的公式也加以驗證，獲得公式的過程是正確的，所以最後得到的公式也是正確的。

2 如何轉化為等比級數求總和的問題？

倍數給獎求總和的問題＝等比級數求總和的問題，而

$$\text{累積獎金} = \text{總和}$$

$$\text{第一次獎金} = \text{第一數}$$

$$\text{下次獎金} = \text{第一數} \times \text{倍數}^{\text{次}}$$

六、結 論

等比級數求總和的公式是

$$\text{總和} = (\text{第一數} \times \text{倍數}^{\text{次}} - \text{第一數}) \div (\text{倍數} - 1)$$

1 困難的克服：

在研究過程中，二倍給獎的公式，我們很容易就發現了，但三倍給獎的公式，我們無法一下子就找出來，指導老師建議我們從二倍給獎的公式中，很清楚的可以發現累積獎金和下次獎金有關係，不妨朝這個方向思考，我們試著尋求，經過共同討論，終於發現如果在下次獎金減第一次獎金之後，必須除以二才是累積獎金。往後四倍、五倍的問題，我們就在除數上思考，果然很快就得到了答案。

2 本作品對數學公式採用不同的方法來獲得，所以沒有參考任何書籍，是我們驗證思考的結果。

3 在四上的數學課，曾教過 2×2 ，就是 2^2 ，老師對我們資優實驗班的同學上課時，曾教過 $2 \times 2 \times 2$ 就是 2^3 ， $2 \times 2 \times 2 \times 2$ 就是 2^4 ，以此類推，因此在結論時，第一數乘以倍數的次數，我們就以第一數 \times 倍數^次 來表示。

評語：小朋友從假想獲得不同額獎金的倍數和次數。假設一個計算累積獎金的公式再從實際得獎以驗證其正確性最後與等比級數之求和公式殊途同歸。以實驗方法推演出較高深的學理，值得鼓勵。