平方和問題的一些探討
國中教師組數學科第一名

台北市立民族國民中學　　　　作　者：童明聰

一、研究動機

在直角三角形中，最重要的性質就是畢氏定理 $x^2+y^2=z^2$。當 x，y，z 都是整數時，這種解有那些？這是平方和的最基本問題，這個問題，在數論上早已經解決了，並且證出了許多美好的結果。這類問題令人質疑又令人感興趣的就是 Fermat 最後問題"當 $n \geqslant 3$ 時，方程式 $x^n+y^n=z^n$ 有沒有正整數解？"

二、研究問題

1. 在此我們考慮此類的方程式

$$x^2+y^2+z^2=xyz$$
$$x^2+y^2+z^2=2xyz$$
$$x^2+y^2+z^2=3xyz$$
$$x^2+y^2+z^2=4xyz$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

那些方程式有正整數解，它的解又如何？

(1) $x^2+y^2+z^2=xyz$，顯然有解 $x=3$，$y=3$，$z=3$，是它的一組解。

(2)考慮 $x^2+y^2+z^2=2xyz$，若有解的話可令

$$x=2^{\alpha}(2l+1)$$
$$y=2^{\beta}(2m+1)$$
$$z=2^{\gamma}(2n+1)$$

α, β, γ；$l, m, n \in N \cup \{0\}$

不是一般性，可設 $\alpha \leq \beta \leq \gamma$

將上列各式代入方程式　$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$

得　$2^{2\alpha}(2l+1)^2 + 2^{2\beta}(2m+1)^2 + 2^{2\gamma}(2n+1)$

$= 2\,[2^{\alpha}(2l+1)]\,[2^{\beta}(2m+1)]\,[2^{\gamma}(2n+1)]$

$(2l+1)^2 + 2^{2\beta-2\alpha}(2m+1)^2 + 2^{2\gamma-2\alpha}(2n+1)^2$

$= 2(2l+1)2^{\beta-\alpha}(2m+1)2^{\gamma}(2n+1)$

(a)若 $\alpha < \beta \leq \gamma$　則

左邊爲一奇數與二偶數的和，右邊爲偶數，不合，無解

(b)若 $\alpha = \beta < \gamma$，則 $2\gamma - 2\alpha \geqslant 2$

左邊是 2 的倍數，但不是 4 的倍數，右邊是 4 的倍數，不合。

(c)$\alpha = \beta = \gamma$，則

左邊是奇數，右邊爲偶數，不合。

由(a)(b)(c)知　$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ 無正整數解

(3) $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$，$x = 1$，$y = 1$，$z = 1$ 是一解

(4)考慮一般式 $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$

引理 1：若 x_0，y_0，z_0 爲正整數，滿足

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$$

則 $kx_0y_0 - z_0$ 爲正，且 x_0，y_0 與 $kx_0y_0 - z_0$ 亦爲方程式一解。

證：$x_0^2 + y_0^2 + (kx_0y_0 - z_0)^2$

$= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + k^2x_0^2y_0^2 - 2kx_0y_0z_0$

$= kx_0y_0z_0 + k^2x_0^2y_0^2 - 2kx_0y_0z_0$

$= k^2x_0^2y_0^2 - kx_0y_0z_0$

$= kx_0y_0(kx_0y_0 - z_0)$　　　得證。

若 x_0，y_0，z_0 爲正整數滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$，首先我們證明存在 x'，y'，z' 爲一解，且同時滿足

$$x' \leq \frac{ky'z'}{2}, \quad y' \leq \frac{kx'z'}{2}, \quad z' \leq \frac{kx'y'}{2} \quad \cdots\cdots(1)$$

證明：若 $z_0 > \frac{kx_0y_0}{2}$ ，由引理 1 知，存在另一組解

x_0 ， y_0 ， $z_1 = kx_0y_0 - z_0$ ，則

$z_1 < \frac{kx_0y_0}{2}$ 。

故若 x_0 ， y_0 ， z_0 中，有存在使(1)式的三個式子不能全部成立，則可繼續重複上法，遞減有限多次，直到 x ， y ， z 不能再減少，即(1)式成立。

我們設 $x_0 \leq y_0 \leq z_0$ ，且(1)式成立

則 $y_0 \leq z_0 \leq \frac{kx_0y_0}{2}$

故 $1 \leq \frac{kx_0}{2}$ $2 \leq kx_0$ ……………………(2)

因 $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - kx_0y_0z_0 = 0$

$$x_0^2 + y_0^2 + \left(\frac{kx_0y_0}{2}\right)^2 - kx_0y_0z_0 + z_0^2$$

$$= \left(\frac{kx_0y_0}{2}\right)^2$$

得 $x_0^2 + y_0^2 + \left(\frac{kx_0y_0}{2} - z_0\right)^2 = \left(\frac{kx_0y_0}{2}\right)^2$

但 $z_0 \leq \frac{kx_0y_0}{2}$， $y_0 \leq z_0$ 代入得

$$x_0^2 + y_0^2 + \left(\frac{kx_0y_0}{2} - y_0\right)^2 \geqslant \frac{k^2x_0^2y_0^2}{4}$$

即 $x_0^2 + 2y_0^2 \geqslant kx_0y_0^2$

得 $3y_0^2 \geqslant kx_0y_0^2$

即 $3 \geqslant kx_0$ ………………………(3)

由(2)(3)得 $2 \leq kx_0 \leq 3$

若 $kx_0 = 2$ ，則方程式 $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2y_0z_0$

$$x_0^2 + (y_0 - z_0)^2 = 0$$

得　$x_0 = 0$，不合

故　$kx_0 = 3$ ………………(4)，即 $k = 1$ 或 $k = 3$

由(1)及(3)的討論知　$k = 1$ 或 $k = 3$ 有解

定理 1：$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ 的所有正整數解，可經引理 1 的方法，由 $x = y = z = 3$ 得出之。

證明：(1)若　$x = y = z$，則得　$x = y = z = 3$

(2)若　$x = y \neq z$，則

$$2x^2 + z^2 = x^2 z \quad \Rightarrow \quad z^2 = x^2 (z - 2)$$

故　$x^2 \mid z^2$，即　$x \mid z$，令　$z = \alpha x$　得

$$2x^2 + \alpha^2 x^2 = x^2 \alpha x$$

即　$2 + \alpha^2 = \alpha x \quad \Rightarrow \quad 2 = \alpha (x - \alpha)$

故　$\alpha \mid 2$，　$\alpha = 2$ 或 1，　但 $x \neq z$，

故　$\alpha \neq 1$

即　$\alpha = 2$，代入方程式

得　$x = 3$　$y = 3$　$z = 6$

此由 $x=3$，$y=3$，$z=3$，經引理 1 方法可得

(3)設　$x < y < z$

欲證若 $x < y < z$，則 $xy - z < z$

若此式成立，則可逐步變小，x，y，z 之值，有限次後，必使 x，y，z，中二者（或三者）相等，即歸入(1)(2)之中

證明：由 $z^2 - xyz + x^2 + y^2 = 0$

知　$2z = xy \pm \sqrt{x^2y^2 - 4 (x^2 + y^2)}$

若　$2z = xy - \sqrt{x^2y - 4 (x^2 + y^2)}$，

由(4)式　$x \geqslant 3$

$$\text{則}\quad 2z = xy - \sqrt{\frac{1}{9}x^2y^2 + 4x^2(\frac{1}{9}y^2 - 1) + 4y^2(\frac{1}{9}x^2 - 1)}$$

$$< xy - \sqrt{\frac{1}{9}x^2y^2} = \frac{2}{3}xy,$$

即　$3Z < xy$

但　$xyz = x^2 + y^2 + z^2 < 3z^2$

即　$xy < 3z$　矛盾

故　$2z = xy + \sqrt{x^2y^2 - 4(x^2 + y^2)}$

$\therefore$　$2z > xy$

即　$z > xy - z$

定理2：$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ 的所有正整數解，可經引理1方法，由 $x = y = z = 1$ 得出之。

證明：(1)若　$x = y = z$，則　$x = y = z = 1$

(2)若　$x = y \neq z$，則

$$2x^2 + z^2 = 3x^2z，z^2 = x^2(3z - 2)$$

此　$x^2 \mid z^2$，即 $x \mid z$，命 $z = wx$，則

$$2x^2 + \omega^2x^2 = 3x^2\omega x$$

$\Rightarrow$　$2 + \omega^2 = 3\omega x$

$2 = \omega(3x - \omega)$，即 $\omega \mid 2$，故 $\omega = 1$ 或 2

但　$x \neq z$，故 $\omega \neq 1$

$\omega = 2$，　則 $x = 1$，　$y = 1$，　$z = 2$

此由　$x = 1$，　$y = 1$，　$z = 1$，經引理1可得

(3)設 $x < y < z$

欲證　$3xy - z < z$ 成立。

若此式成立，則可逐步變小 x，y，z 之值有限次後，必使 x，y，z 中二者（或三者）相等。卽歸入(1)(2)中

證明：$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

$$z^2 - 3xyz + x^2 + y^2 = 0$$

$$2Z = 3xy \pm \sqrt{9x^2y^2 - 4(x^2 + y^2)}$$

$$= 3xy - \sqrt{x^2y^2 + 4x^2(y^2 - 1) + 4y^2(x^2 - 1)}$$

$$< 3xy - \sqrt{x^2y^2} = 2xy$$

即　$z < xy$

但　$3xyz = x^2 + y^2 + z^2 < 3z^2$

即　$xy < z$ 矛盾

故　$2z = 3xy + \sqrt{9x^2y^2 - 4(x^2+y^2)}$

$\therefore$　$2z > 3xy$

即　$3xy - z < z$

2. 考慮一般式，n 個未知數　$k \in N$

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2 = kx_1x_2 \cdots\cdots x_n$ 的正整數解

引理 2：若 x_1'，$x_2' \cdots\cdots x_n'$ 為正整數，且滿足

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2 = kx_1x_2 \cdots\cdots x_n$

則 $kx_1'x_2' \cdots\cdots x_{n-1}'$ 為正整數，且 x_1'，x_2'，$\cdots\cdots x_{n-1}'$

與 $x_n'' = kx_1' \cdots\cdots x_{n-1}' - x_n'$ 亦為方程式的一解

首先證明存在 x_1'，x_2'，$\cdots\cdots$，x_n' 為一解，且滿足（同時）

$$x_1' \le \frac{kx_2'x_3' \cdots\cdots x_n'}{2}, \quad x_2' \le \frac{kx_1'x_3' \cdots\cdots x_n'}{2}, \cdots\cdots,$$

$$x_n' \le \frac{kx_1'x_2' \cdots\cdots x_{n-1}'}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

證明：若 $x_n > \dfrac{kx_1x_2 \cdots\cdots x_{n-1}}{2}$，由引理 2，知存在另一解，

x_1，x_2，$\cdots\cdots$，x_{n-1}，$x_1' = kx_1 \cdots\cdots x_{n-1} - x_n$，

則　$x_n' < \dfrac{kx_1 \cdots\cdots x_{n-1}}{2}$

若 x_1，x_2，$\cdots\cdots x_n$ 有存在使(5)式的 n 個式子，不能同時成立，則可繼續重複上面方法，遞減有限多次，直到不能減少，即(5)式成立。

設　$x_1 \le x_2 \le \cdots\cdots \le x_n$，且滿足(5)式

$$x_{n-1} \le x_n \le \frac{kx_1 \cdots\cdots x_{n-1}}{2} \Rightarrow 1 \le \frac{kx_1x_2 \cdots\cdots x_{n-2}}{2}$$

即　$kx_1x_2 \cdots\cdots x_{n-2} \geqslant 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

因　$x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_{n-1}^2 + \left(\dfrac{kx_1 \cdots\cdots x_{n-1}}{2} - x_n\right)^2$

$$= \left(\frac{kx_1 \cdots x_{n-1}}{2}\right)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_{n-1}^2 + \left(\frac{kx_1\cdots\cdots x_{n-1}}{2} - x_{n-1}\right)^2$$

$$\geqslant \left(\frac{kx_1\cdots\cdots x_{n-1}}{2}\right)^2$$

得 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_{n-2}^2 + 2x_{n-1}^2 \geqslant kx_1\cdots\cdots x_{n-2}x_{n-1}^2 \cdots\cdots(7)$

$n\,x_{n-1}^2 \geqslant kx_1\cdots\cdots x_{n-2}x_{n-1}^2$

即 $n \geqslant kx_1x_2\cdots\cdots x_{n-2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

由(6)(8)知 $n \geqslant kx_1x_2\cdots\cdots x_{n-2} \geqslant 2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

在此考慮 $n = 4$

即 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = kx_1x_2x_3x_4$ 的正整數解。

由(9)式知 $4 \geqslant kx_1x_2 \geqslant 2$

(1)當 $kx_1x_2 = 2$ 代入方程式

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2x_3x_4$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3x_4 + x_4^2 = 0$

$x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - x_4)^2 = 0$

得 $x_1 = x_2 = 0$

不合，無解。

(2) $kx_1x_2 = 3$ 代入方程式

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3x_3x_4$

當 $k = 3$， 則 $x_1 = x_2 = 1$

$2 + x_3^2 + x_4^2 = 3x_3x_4$

則 x_3 ，x_4 必須皆爲偶數，故左邊爲 2 的倍數，不爲 4 的倍數，左邊爲 4 的倍數。不合。

當 $k = 1$ ，$x_1 = 1$ ，$x_2 = 3$ 同理無解。

(3) $kx_1x_2 = 4$

(a)若 $k = 1$， $x_1 = 2$， $x_2 = 2$ 時

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ 爲方程式之一解，

若 $k = 1$， $x_1 = 1$， $x_2 = 4$ 代入方程式

$1 + 16 + x_3^2 + x_4^2 = 4x_3x_4$

則必須 x_3 與 x_4 爲一奇一偶，但左邊是 2 的倍數，不是 4 的

倍數。右邊是 4 的倍數，不合。

(b)若 $k = 2$， $x_1 = 1$， $x_2 = 2$ 代入方程式

$$1 + 4 + x_3^2 + x_4^2 = 4x_3x_4$$

則必須 x_3 與 x_4 為一奇一偶，但左邊是 2 的倍數，不是 4 的倍數。右邊是 4 的倍數，不合。

(c)當 $k = 4$ 時，則 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ 是一解。

綜合上面的討論知

方程式 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = kx_1x_2x_3x_4$

只有當 $k = 1$ 及 $k = 4$ 才有正整數解。

定理 3：$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1x_2x_3x_4$ 的所有正整數解可由 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$，經引理 2 的方法，可得之。

證明：我們繼續上面的討論，知可設

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4, \quad x_4 \leq \frac{x_1x_2x_3}{2}$$

且 $x_1 = x_2 = 2$， 由(7)式知

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \geqslant 4x_3^2$$

$$4 + 4 \geqslant 2x_3^2 \quad \Rightarrow \quad 4 \geqslant x_3^2$$

但 $x_3 \geqslant x_2$ $\therefore$ $x_3 = 2$，進一步可得 $x_4 = 2$

$\therefore$ 方程式的所有正整數解，可由 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$，經引理 2 可得。

至於 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4x_1x_2x_3k_4$ 的解，我們由下列一般式來討論。

一般式 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2 = nx_1x_2\cdots\cdots x_n$

顯然 $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_n = 1$ 是一解。

定理 4：$x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2 = nx_1x_2\cdots\cdots x_n$，$n \geqslant 3$ 的所有正整數解，可由 $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_n = 1$ 經引理 2 的方法，可得之。

證明：我們繼續上面的討論

由(9)式知，$n \geqslant kx_1\cdots\cdots x_{n-2} \geqslant 2$

取 $k = n$， 即 $n \geqslant nx_1\cdots\cdots x_{n-2}$

故 $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_{n-2} = 1$

代入(7)式得 $n-2+2x_{n-1}^2 \geqslant n x_{n-1}^2$

$n-2 \geqslant (n-2)x_{n-1}^2$ 得 $x_{n-1} = 1$

進一步可得 $x_n = 1$

∴ 方程式的所有正整數解，可由 $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_n = 1$ 經引理 2 的方法，可得之。

三、討　　論

1. 方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ $k \in N$

只 $k = 1$ 或 3 時，才有正整數解。

(1) $k = 1$ 時，$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ 的所有正整數解，可由 $x = y = z = 3$，經引理 1 方法得之。且它的解，x，y，z 必都爲3 的倍。

(2) $k = 3$ 時，$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ 的所有正整數解，可由 $x = y = z = 1$，經引理 1 的方法得之。

(3)若 (x_0, y_0, z_0) 爲 $x^2 + {}^2 + z^2 = xyz$ 之一解，則

$\left(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0}{3}, \frac{z_0}{3}\right)$ 爲 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ 之一解。

反之亦成立。

2. 方程式 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = kx_1x_2x_3x_4$ $k \in N$

只有 $k = 1$ 或 $k = 4$ 時，才有正整數解。

(1) $k = 1$ 時，$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1x_2x_3x_4$ 的所有正整數解，可由 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$，經引理 2 方法得之，且它的解 x_1，x_2，x_3，x_4 必都爲偶數。

(2) $k = 4$ 時，$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4x_1x_2x_3x_4$ 的所有正整數解，可由 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$，經引理 2 方法得之。

(3)若 (x_1, x_2, x_3, x_4) 是 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1x_2x_3x_4$ 之一解，則 $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{2}\right)$ 是 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

$= 4x_1x_2x_3x_4$ 之一解。反之亦成立。

3. 方程式 $x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=nx_1x_2\cdots\cdots x_n$ 的所有正整數解，可由 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=1$，經引理2的方法可得之。

4. 方程式 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=x_1x_2x_3x_4x_5$ 的所有正整數解，可由 $x_1=x_2=1$，$x_3=x_4=3$，$x_5=4$ 經引理2方法得之。（因篇幅關係，在此不加證明）。

5. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=kx_1x_2x_3x_4x_5$
只有當 $k=1$，4，5時，才有正整數解。

6. $x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=kx_1x_2\cdots\cdots x_n$，$n\geqslant 3$
當 $k>n$ 時，無正整數解。
證：由(9)式可知。

四、參考書籍

1. 數論導引
2. 趙文敏：數論淺談
3. Andrews：Number theory

評語：1. 在整數論中有關平方和的問題有深入的研究，對於本問題的處理方法頗有創見。
2. 本研究的結論相當完整，是件很好的作品。
3. 作者在教學之餘，潛心研究，精神可嘉。