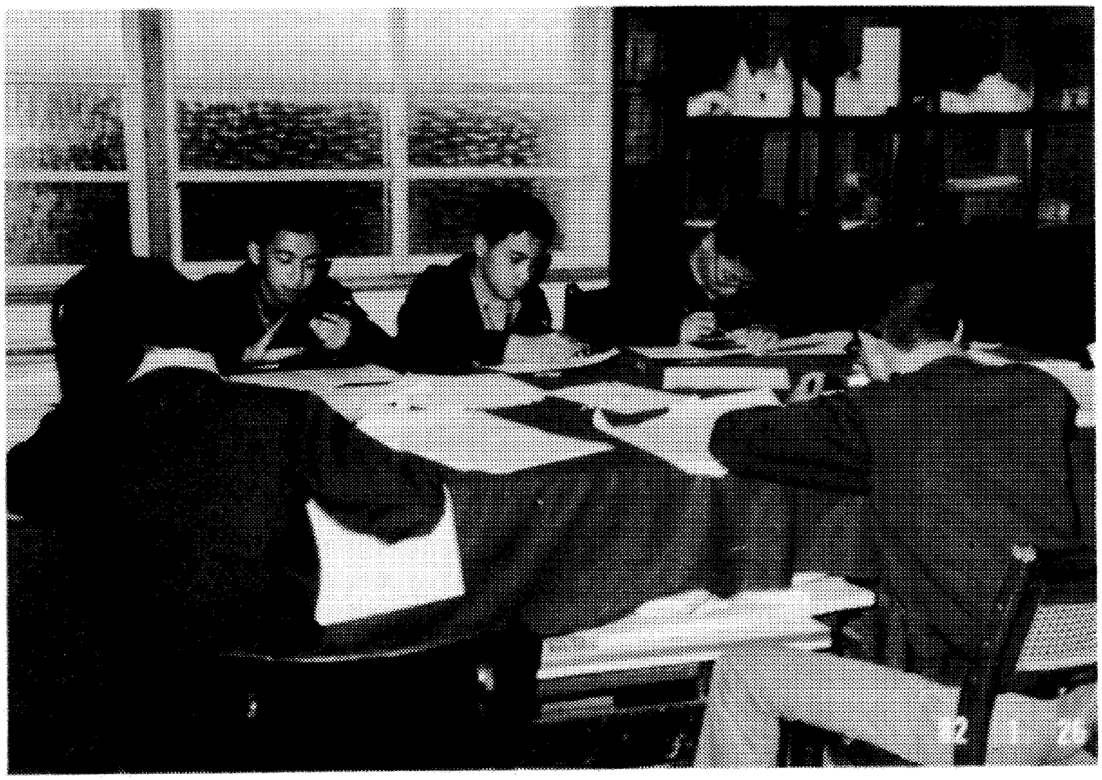
畢氏組數的「克」星——高商尺的發現

國中組數學科第三名

宜蘭縣立東光國民中學

作　者：潘政光、邱鄭斌
許周禮、謝忠偉
劉靜怡
指導老師：林政雄



一、研究動機

國中課本第五册第 141 頁 5－4 練習第六題，我國民間相傳有下列五邊形的近似作法"九五頂五九，八五分兩邊"經過幾次的畫法，均發現並非眞正五邊形，其誤差雖極小，仍困擾著我們的求知欲，因而請教於老師。

二、研究目的

如何利用便捷的方法，求出勾、股、弦，及利用黃金分割證明數學定理。

三、實驗器材

電子計算機、米達尺、壓克力。

四、研究過程

老師告訴我們，那是相傳的近似作法，並非眞正正五邊形之解法，正五邊形的純幾何解法，必須根據"黃金分割"的原理來作。

1.何謂黃金分割點與黃金分割數。

(1)設$\overline{AB}$爲一線段，而C爲$\overline{AB}$上的一點，$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$，則稱C點爲線段$\overline{AB}$的黃金分割，或稱C爲$\overline{AB}$的一個黃金分割點，而上述的比值稱爲黃金分割數，以"　"表示，"　"又是多少呢？把$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{BC}$，而$\overline{AC}=a\cdot\overline{BC}$，

於是$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$　$\dfrac{\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{a\cdot\overline{BC}}{\overline{BC}}$，

$1+\dfrac{\overline{BC}}{a\cdot\overline{BC}}=a$，$1+\dfrac{1}{a}=a$，$a+1=a^2$

$a^2-a-1=0$，$a=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

，但因a爲正值數 $a=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

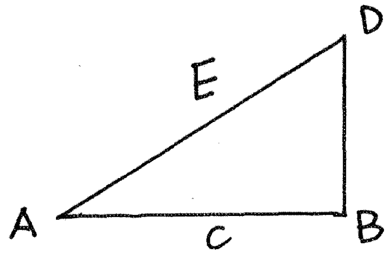
(2)黃金分割點之求法：設$\overline{AB}$爲一線段，過B作一線段$\overline{BD}$，使$\overline{BD}$與$\overline{AB}$垂直，而且$\overline{AB}=2\overline{BD}$，其次在線段$\overline{AD}$上取一點E，使$\overline{DE}=\overline{BD}$，最後在線段$\overline{AB}$上取一點C，使$\overline{AC}=\overline{AE}$，則C點就是$\overline{AB}$的黃金分割點。

△ABD是一個直角△，而$\overline{AB}=2\overline{BD}$，根據畢氏定理，$\overline{AD}=\sqrt{5}\,\overline{BD}$，$\overline{AC}=(\sqrt{5}-1)$

$\overline{BD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ \overline{AB}$，

$\overline{BC} = \overline{AB} - \overline{AC}$

$= \frac{3-\sqrt{5}}{2}$



$\overline{AB} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\ \overline{AC}$

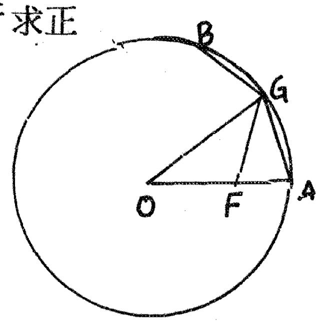
$= \frac{\sqrt{5-1}}{2}\ \overline{AC}$

由此可知，

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ 即 C爲黃金分割點。

(3)正五邊形之作法由此而產生：

設F爲線段$\overline{OA}$的黃金分割點，即$\overline{OA} = a \cdot \overline{OF}$，在圓O上取一點G，使$AG = \overline{OF}$，最後在圓O上取一點B，使$\overline{BG} = \overline{OF}$而$A \neq B$，則$\overline{AB}$爲所求正五邊形之一邊因爲$\angle GOA = 36$度，理由$\overline{OF} = \overline{GA}$，



在$\angle AOG$中，

$\frac{\overline{OG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{FA}}$，於是

$\overline{GF}$是$\angle OGA$的分角線，

其次在$\triangle AOG$及$\triangle AGF$中，$\angle A = \angle A$，$\frac{\overline{OA}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{GA}}{\overline{FA}}$

$\triangle AOG$與$\triangle AGF$相似，於是$\overline{GF} = \overline{GA} = \overline{OF}$即$\triangle FOG$是一個等腰三角形，故$\angle AOG = \angle OGF = 1/2\ \angle AFG$

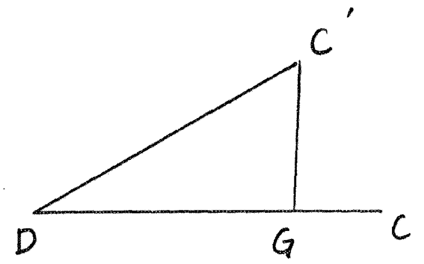
因此可知：$\angle AOG = 36$度，於是$\angle AOB = 72$度。

2. 黃金分割更肯定了畢氏定理之存在與可靠性，經老師指導之後，使我們聯想到何不用黃金分割來證明所有數學上之定理與性

質。

(1)首先取 10 公分的線段$\overline{CD}$，

再取黃金分割點G，而$\dfrac{\overline{DC}}{\overline{DG}}$ $=\dfrac{\overline{DG}}{\overline{CG}}$，即 $\overline{DG}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\overline{DC}$，$\overline{GC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{DG}$，



測得$\overline{DG}=6.180339887$，$\overline{CG}=3.819660112$

其次把$\overline{CG}$摺成垂直$\overline{DG}$，即形成$\overline{C'G}\perp\overline{DG}$，再量出$\overline{DC'}=7.265425279$

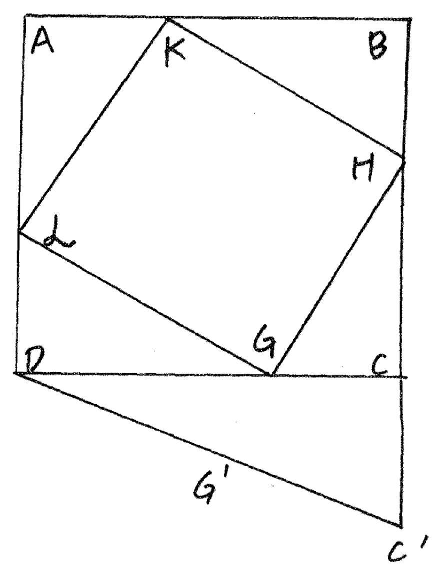
恰爲$\overline{DG}^2+\overline{GC}^2=(\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4})\,\overline{DC}^2+\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4})$

$\overline{DG}^2=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}(\overline{DC}^2+\overline{DG}^2)=52.78640448$

$=(7.265425279)^2=(\overline{DC})^2=\overline{DC'}^2$

(2)如此無數次作 11 公分、12 公分、13 公分，……均能成立

(3)故我們以$\overline{DC}=10$ 公分作一正方形，並取黃金分割點 G，分別在四邊形作$\overline{CH}=\overline{BK}=\overline{AL}=\overline{DG}$，作連接$\overline{KH}$、$\overline{KL}$、$\overline{LG}$、$\overline{HG}$，得$\overline{CG}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\overline{DG}=3.819660112$ 而$\overline{CH}=6.180339887$，而測得$\overline{HG}=(7.265425279)$



即$\overline{CH}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{HG}^2$ 因(3.819660112)^2 + (6.180339887)^2 = (7.26545279)^2 無可懷疑的，再次肯定畢氏定理之存在。

3. 現在我們把傳統上畢氏定理的證法以教具拼排做一說明：

(1)與 rt△ABC全等的三個直角△BEF、DEG、DHA 如上圖排列之，則CFGH、BEDA爲正方形，設$\overline{AB}$=C、$\overline{AC}$=a、$\overline{BC}$=b

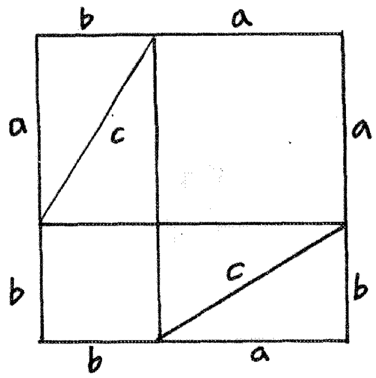
則 $\overline{CF} = \overline{CB} + \overline{BF} = b + a$

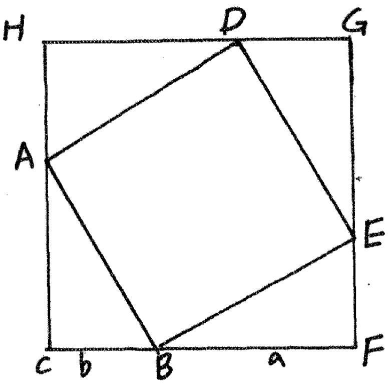
從□BADE+4△ABC=□CFGH；得$C^2 + 4 \times 1/2\ ab = (a+b)^2$

$\Rightarrow c^2 + 2ab$

$= a^2 + b^2 + 2ab$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$





(2)c^2 = 4 個直角△+(a − b)的正方形

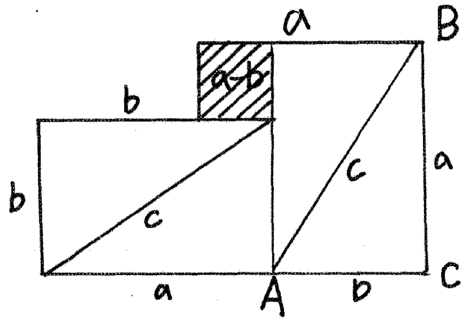
$= 4 \times 1/2\ ab + (a-b)^2$

$= 2ab + a^2 - 2ab + b^2$

$= a^2 + b^2$

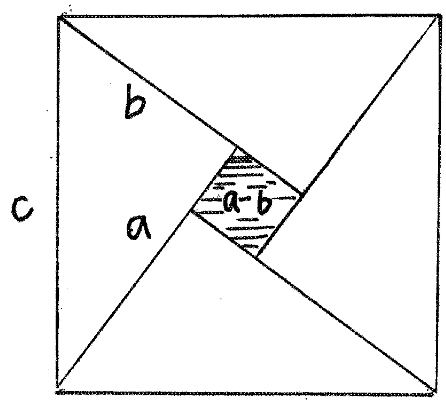
即 $c^2 = a^2 + b^2$

與rt △ABC全等的直角△，如下圖之排列，則圖形中斜線部份爲正方形，其面積爲

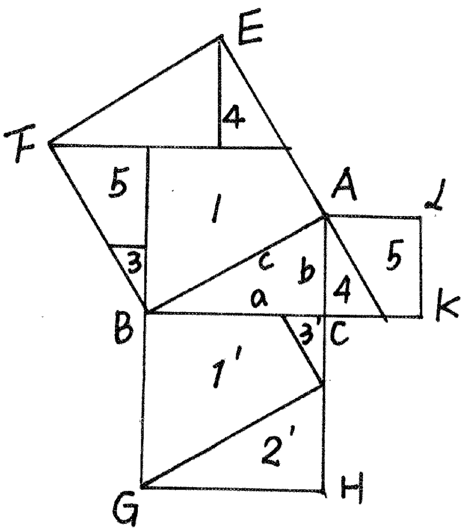


(a －b)² 故上圖面積＝下圖面積

即 $c^2 = a^2 + b^2$



(3)如圖，作一直角△，兩股分別爲 a 、b ，斜邊爲c ，再以 a 、b 、c 作正方形 ACKL、B C H G 、A E F B，而把正方形 A L K C分割成5 、4 ，正方形B C H G分割成1 、2 、3 ，正方形 A E F B分割成1 、2 、3 、4 、5 ，則 1 = 1′、2 = 2′、4 = 4′、5 = 5′，3 = 3′，故 $a^2 + b^2 = c^2$



(4)而傳統上的幾何證法：

①連接 $\overline{AK}$ 、$\overline{CD}$

②在△ A B K和△ B D C中$\overline{AB} = \overline{BD}$，$\overline{BK} = \overline{BC}$，∠A B K

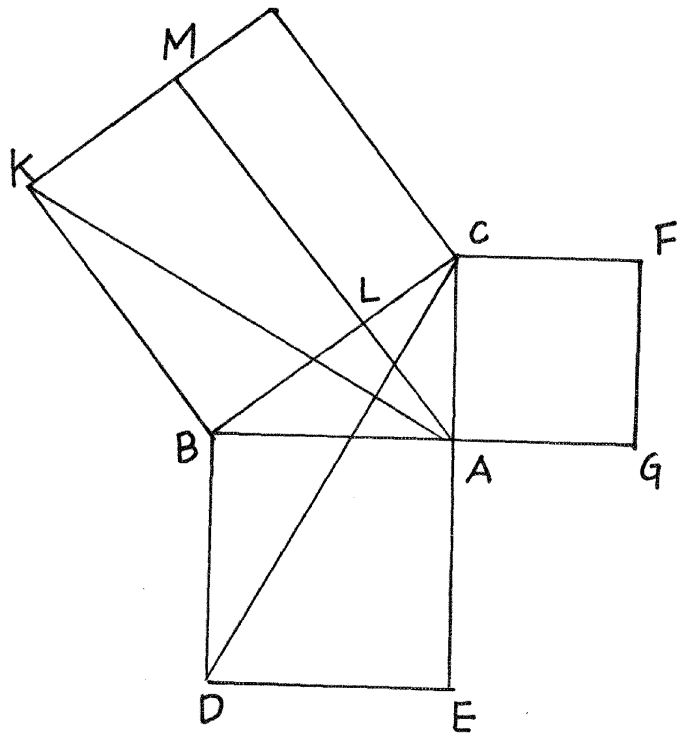
＝∠A B C＋90度

＝∠D B C，

由 S A S 知△A B K≅△B D C

③過 A 點作 $\overline{BC}$ 的垂線交$\overline{BC}$ 於 L 、交 $\overline{KH}$ 於M，則△ A B K＝1/2□ B L M K（底同是$\overline{BK}$ ，高同是$\overline{BL}$ ）

$\triangle BDC = 1/2\,\square ABDE$（同爲 $\overline{BD}$ 底，高爲 $\overline{AB}$）



④由②、③得 $\square BLMK = \square ABDE$ ‥（a）

同理可證 $\square LCHM = \square ACFG$ ‥（b）

（a）+（b）：$\square BCHK = \square BLMK + \square LCHM = \square ABDE + \square ACFG$

即 $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$

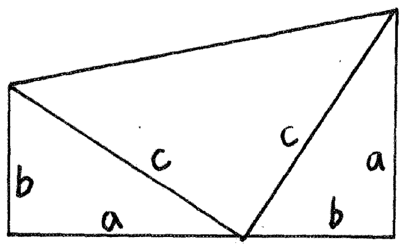
(5)梯形面積＝3個直角△面積之和 $1/2(a+b)(a+b)$

$= 1/2\,ab + 1/2\,c^2 + 1/2\,ab$

$1/2(a^2+2ab+b^2) = ab + 1/2\,c^2$

$1/2\,a^2 + 1/2\,b^2 = 1/2\,c^2$

即 $a^2 + b^2 = c^2$

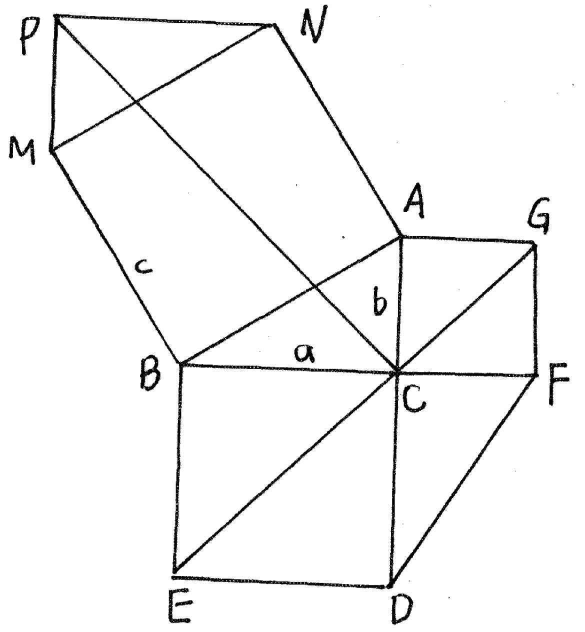


(6)①連接 $\overline{FD}$，則 $\triangle CFD \cong \triangle CAB$（S・A・S）

②如圖，作一直角△PMN，使$\overline{PM}=\overline{AC}$，$\overline{PN}=\overline{BC}$則△ABC≅△MNP≅△FDC，

③連接$\overline{PC}$，又連接$\overline{EC}$、$\overline{CG}$ 則∠ECG＝∠GCF＋∠FCD＋∠DCE＝45度＋90度＋45度＝180度

即E、C、G共線



④$\overline{ED}=\overline{BE}=\overline{BC}=\overline{PN}$，$\overline{FD}=\overline{AB}=\overline{BM}=\overline{NA}$，$\overline{FG}=\overline{AG}=\overline{PM}=\overline{AC}$

⑤∠EDF＝∠EBA＝∠PNA＝∠MBC＝（90度＋∠ABC）

⑥∠GFD＝∠GAB＝∠PMB—∠NAC＝（90度＋∠BAC）

⑦由疊合證法可知，四邊形EDFG≅四邊形PNAC≅四邊形CBMP≅四邊形EBAG

⑧於是六邊形PNACBM＝六邊形BEDFGA

兩邊同減去△ABC＋△MPN＝△ABC＋△FCD

即得□ANMB＝□AGFC＋□EBCD

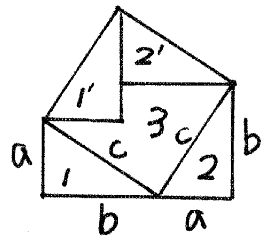
⑨四邊形ACPN＝四邊形AGEB，四邊形BCPM＝四邊形DEGF兩式相加，各減去相同的部分，

△ABC及相等部分

△PMN及△CFD

後即得。

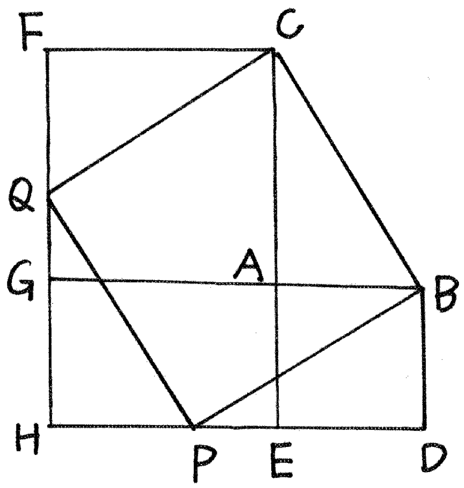
(7) $1'=1$，$2'=2$，$1+2+3=1'+2'+3'$，$a^2+b^2=c^2$



(8)證明：與直角△ABC全等的三個直角三角形

①CFQ、QHP、PDB如圖(一)排列之，得正方形ABDE、ACFG、BCQP及矩形AEHG。

②於是□BCQP＋△CFQ＋△QHP＋△BPQ＝□ACFG＋□ABDE＋▭AEHG＋△ABC。



③但△CAB≅△CFQ≅△QHP≅△PDB

④且▭AEHG $=\overline{AE}\times\overline{AG}$ $=\overline{AB}\times\overline{AC}$ $=2$△ABC

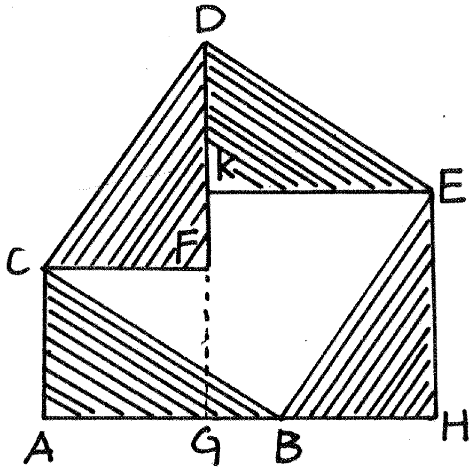
∴□BCQP＝□ACFG＋□ABDE

即 $\overline{CB}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$

(9)證明：

①與直角△CBA全等的直角三角形BEH、DEK、CDF如圖排列之，則得正方形BCDE、ACFG、GHEK。

②則□ＢＣＤＥ＝空白的五邊形ＢＥＫＦＣ＋△ＤＥＫ＋△ＣＤＦ＝空白部分的五邊形ＢＥＫＦＣ＋△ＡＢＣ＋△ＢＥＨ＝□ＡＣＦＧ＋□ＧＨＥＫ



③即□ＢＣＤＥ＝□ＡＣＥＧ＋$\overline{AB}^2$

$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$

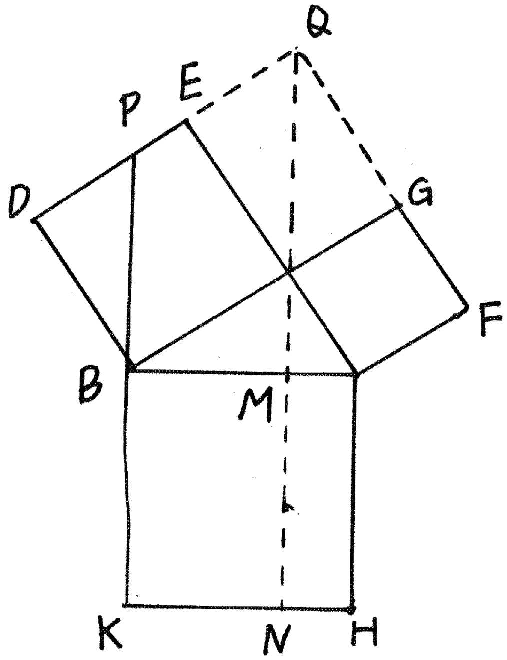
⑽證明：

①設$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{FG}$相交於Ｑ，則ＡＥＱＧ爲一矩形

②∴ $\overline{EQ}=\overline{AG}=\overline{AC}$，由ＳＡＳ知△ＡＥＱ≅△ＢＡＣ，∴ $\overline{AQ}=\overline{BC}$

③延長$\overline{QA}$與$\overline{BC}$、$\overline{KH}$各交於Ｍ、Ｎ，則此比較，∠ＡＭＣ＝∠ＡＥＱ＝９０度

∴ $\overline{BP}=\overline{AQ}$



④即ＡＢＰＱ成一平行四邊形

⑤∴□ＡＢＤＥ＝□ＡＢＰＱ（同底$\overline{AB}$，等高是兩平行線$\overline{PQ}$、$\overline{AB}$間的距離）

⑥又因$\overline{BP}=\overline{BK}$，$\overline{PK}\parallel\overline{QN}$，

∴ ▭ABPQ＝▭BKNM

⑦同底$\overline{BP}=\overline{BK}$，等高是二平行線間的距離

⑧故□ABDE＝□BKNM………(一)

同理可證：□ACFG＝□MNHC………(二)

(一)＋(二) □ABDE＋□ACFG＝□BCHK

∴ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

(11)證明：

①設$\overline{IL}=a$，$\overline{AD}=c$，$\overline{HE}=\ell$

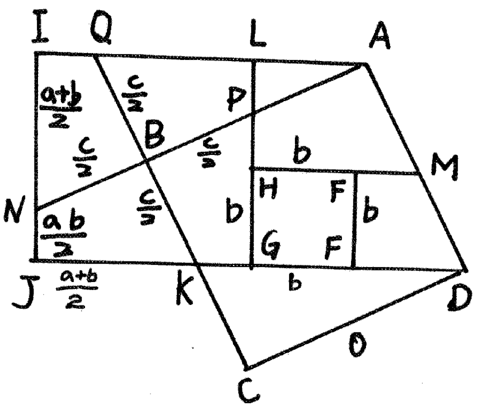
②取$\overline{CB}$中點K，$\overline{AB}$

之中點P, $\overline{IN}=\dfrac{a+b}{2}$

，$\overline{KJ}=\dfrac{a-b}{2}$，

$\overline{IQ}=\dfrac{a-b}{2}$

$\overline{QL}=\dfrac{a+b}{2}$



③連接QB、BN

④四邊形IQBN＝四邊形FOCK，四邊形QLPB＝四邊形DMEO四邊形NJKB＝四邊形PHMA

⑤∴□ABCD＝四邊形APHM＋四邊形GKBP＋四邊形HPAM＋四邊形MDOE＋四邊形OFKC＋□HEFG＝四邊形IQBN＋四邊形QLPB＋四四邊形BNJK＋四邊形PBKG＋□HEFG＝□LIJG＋□HEFG

∴ $c^2=a^2+b^2$

(12)證明

在下圖最外邊之正方形各邊長（a＋b），

則面積$(a+b)^2$恰為$1/2\times4ab+c^2$

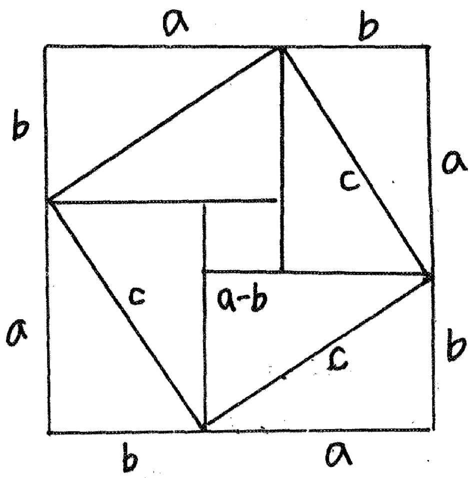
$\Rightarrow (a+b)^2$

$= 2ab + c^2$

$a^2 + 2ab + b^2$

$= 2ab + c^2$

$\therefore a^2 + b^2 = c^2$



再以坐標證明

已知：

$A(x_1, y_1)$、

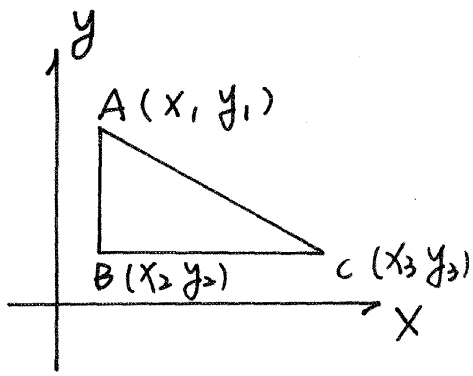
$B(x_2, y_2)$、

$C(x_3, y_3)$

求證：$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

$= \overline{AC}^2$

證明：



①$\overline{AB} = |y_1 - y_2|$

，$\overline{BC} = |x_3 - x_2|$

$\overline{AC} = \sqrt{(x_1 - x_2}^2 +$

$\sqrt{(y_1 - y_2)^2}$

②$\overline{AB}^2 = (y_1 - y_2)^2$

$\overline{BC}^2 = (x_3 - x_2)^2 = (x_3 - x_1)^2$

$= (x_1 - x_3)^2$

③$\overline{AC}^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

⒀右列正方形各邊長爲c

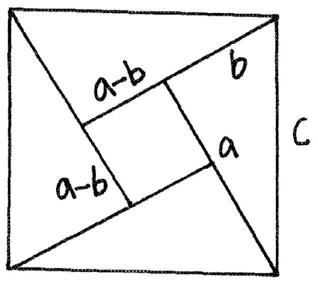
$c^2 = a \cdot b \times 1/2 \times 4$

$+ (a+b)^2$

$= 2ab - 2ab + a^2 + b^2$

$= a^2 + b^2$

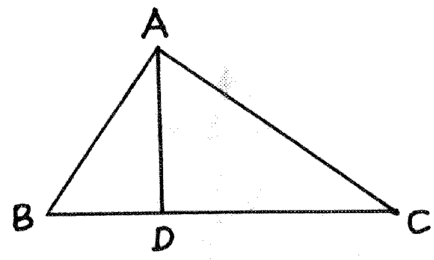
$c^2 = a^2 + b^2$



⒁從教本上之證明：

已知：

$\angle A = 90$ 度，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$



求證：

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

證明：

①$\angle A = 90$ 度，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$

②$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \times \overline{BD}$

③$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{DC}$

④$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC} \times \overline{BD} + \overline{BC} \times \overline{DC}$

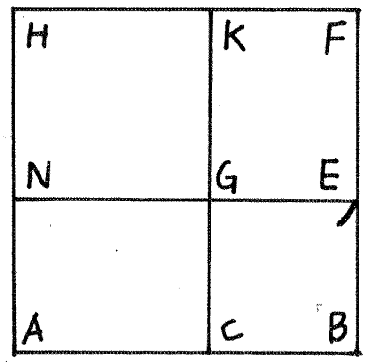
$= \overline{BC} \times (\overline{BD} + \overline{DC})$

$= \overline{BC}^2$

由此可知：每種證法無所謂好與壞，僅表繁與簡，而任何證明均有它存在之價值。

4. 黃金分割還可用來證明平方和、平方差、及立方和、立方差之公式

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



①取 $\overline{AB} = 7.5$ 公分

②在 $\overline{AB}$ 上取黃金分割點 C，$\overline{AC} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \times 7.5\,\text{cm} = 4.63525491$ 公分

則 $\overline{CB} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \times \overline{AC} = 2.86474508$ 公分

③以 AB 作一正方形 ABFH，以 $\overline{CB}$ 作一正方形 BEGC

④則□ABFH $= 56.25\,\text{cm}^2$，□BCGH $= 8.20674373\,\text{cm}^2$

▭EFKG $= 2.86474508 \times 4.63525491$
$= 13.27882369$

▭ACGN $= 2.86474508 \times 4.63525491$
$= 13.27882369$

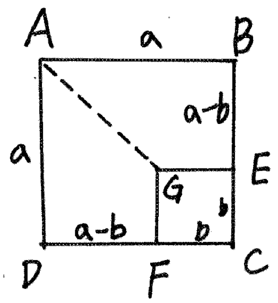
□HKGN $= (4.63525491)^2$
$= 21.48558808$

□BCGH＋▭ACGN＋▭EFKG＋
□HKGN $= 56.24999983 \text{cm}^2 =$ □ABFH

故 $\overline{AB}^2 = (\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2\,\overline{AC} \times \overline{CB})$
$= (\overline{AC} + \overline{CB})^2$
$= a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow (a+b)^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

①設ABCD爲一正方形，在$\overline{BC}$上取黃金分割點E，再作以$\overline{EC}$爲一邊之正方形EGFC



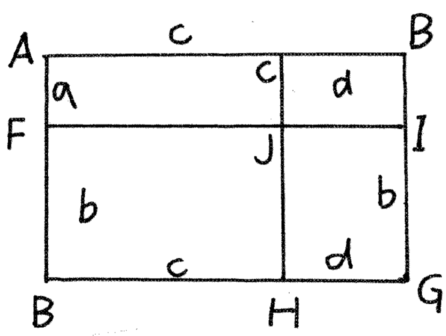
②設 $\overline{AB} = a$，$\overline{EC} = b$

③$a^2 - b^2 =$ □ABCD－□CEGF＝□ABEG＋□ACFG $= (a+b)(a-b) \times 1/2 \times 2$
$= (a+b)(a-b)$

(3) $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

①作一長方形ABGE

②在$\overline{AB}$上取黃金分割點C，在$\overline{AE}$上取黃金分割點F，並過C、F分別作長寬之平行線交於H、I。



③□ACJF＋□CDIJ＋□FJHE＋□IJHG

＝□ABGE

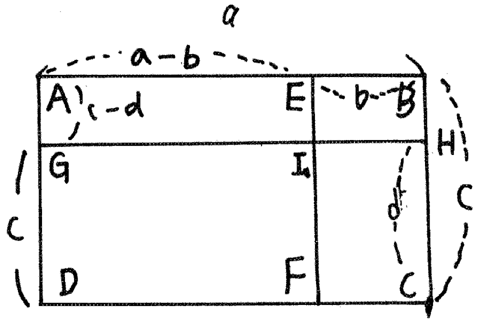
$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

④而當 $a=c$，$b=d$，變成 $(a+b)(a+b)$

$=a^2+2ab+b^2$

(4) $(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$

①在 $\overline{AB}$ 上取黃金分割點E，在 $\overline{AD}$ 上取黃金分割點G，並以E、G分別作長、寬之平行線交於FH



②□AEIG＝□ABCD－□EIHB－□HCFI－□IGDF

③ $(a-b)(c-d)=ac-[b(c-d)+bd+d\times(a-b)]$

$=ac-[bc-bd+bd+da-db]$

$=ac-ad-bc+bd$

④當 $a=c$，$b=d\Rightarrow(c-b)^2$

$=a^2-2ab+b^2$

(5) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

①在一正方形相鄰兩邊取黃金分割點E及G，分別作寬長之平行線交於F、H

②設 $\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\times$

$\overline{EB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\times\overline{AG}$

$=\overline{AD}$

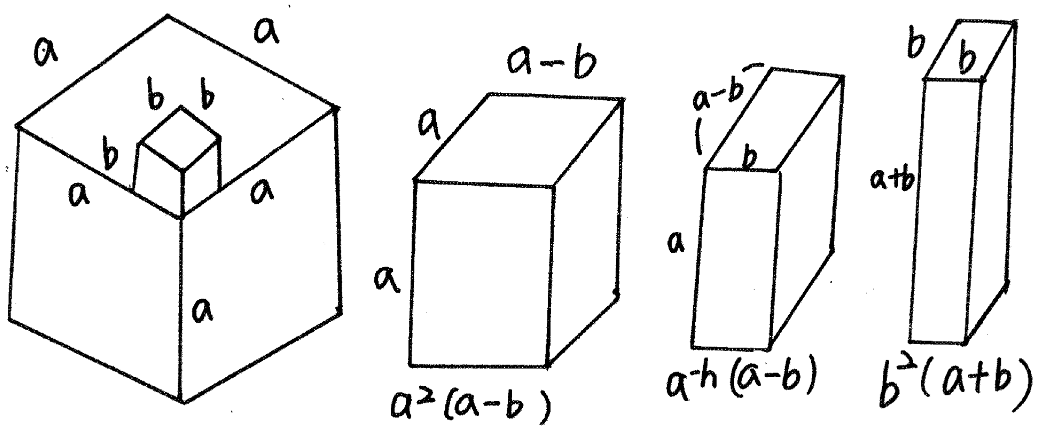
③□GJFD＝□ABCD－□AEJG－□CFJH
－□EBHJ

$$(a-b)^2=a^2-(a-b)\times b-b(a-b)-b^2$$
$$=a^2-ab+b^2-ab+b^2-b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

(6)設邊長 a 之正方體放上一邊長爲 b 之正方體，其體積和

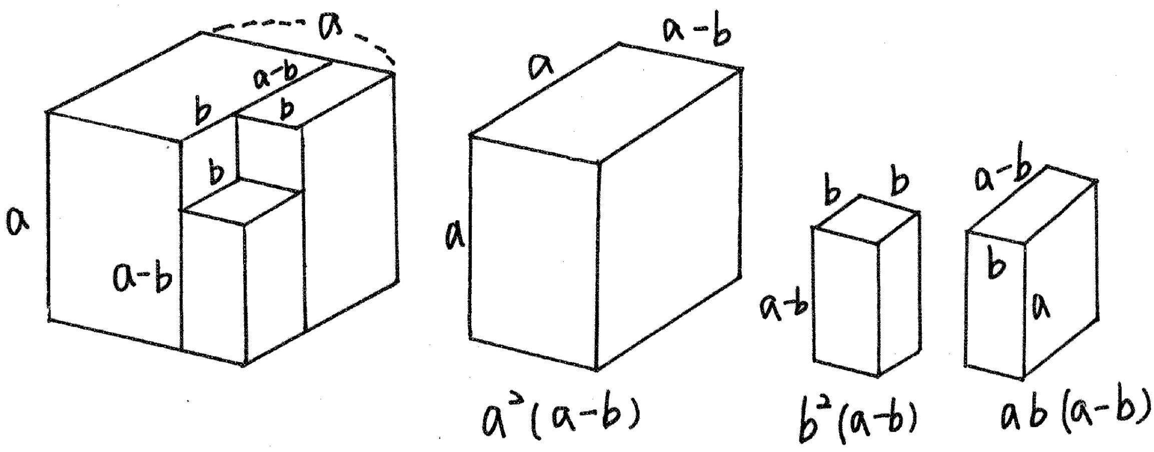
a^2+b^3

$$a^3+b^3=(a-b)a^2+ab(a-b)+b^2(a+b)$$
$$=a^3-a^2b+a^2b-cb^2+b^2(a+b)$$
$$=a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$



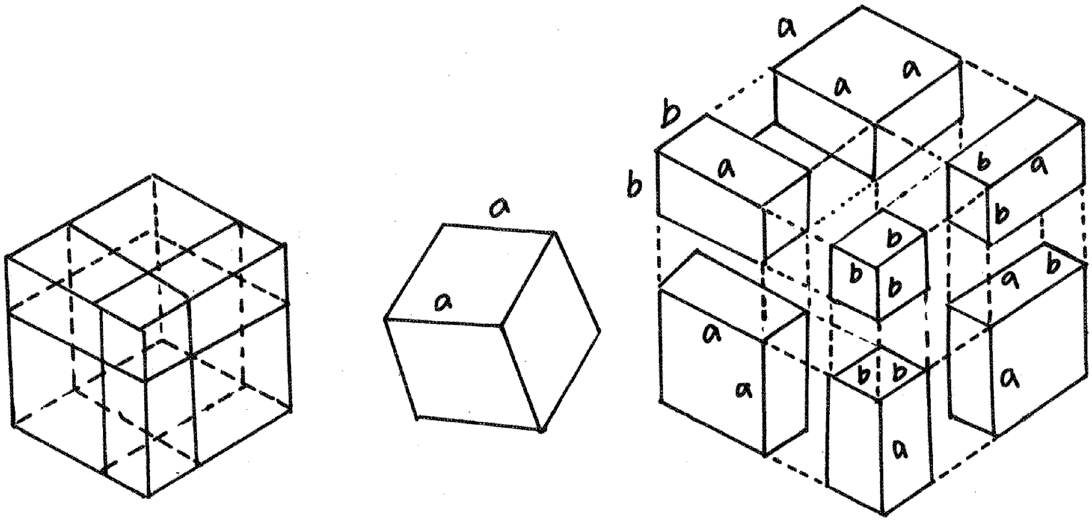
(7)邊長 a 之正立方體如挖去一邊長爲 b 之小正方體後

$$a^3-b^3=(a-b)a^2+(a-b)ab+(a-b)b^2$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$



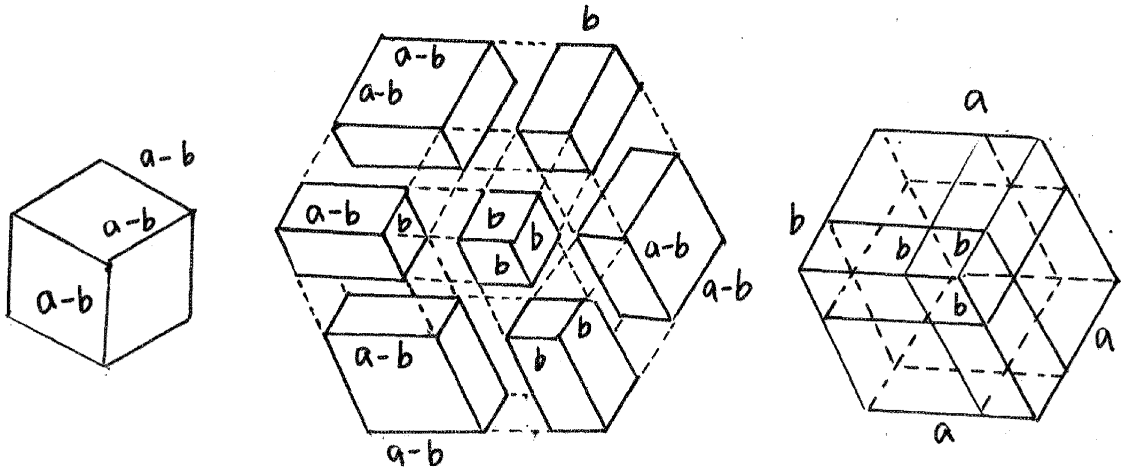
(8)在正立方體邊長a ＋b 中找黃金分割點使一段爲a 另一段爲b

$(a+b)^3 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^3$



(9)在正立方體a之邊長上找一點黃金分割點使一段爲a－b，一段爲b

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2$



5.我們知道畢氏組數：

在直角△ABC中，設$\overline{BC} = m^2 + n^2$，$\overline{AC} = 2mn$，

$\overline{AB}^2 = m^2 - n^2$

$\overline{BC}^2 = (m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$

$\overline{AB}^2 = (m^2 - n^2)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4$

$\therefore\ \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$

故而得不定方程式$x^2 + y^2 = z^2$的整數解可用

$x = m^2 - n^2$、$y = 2mn$，

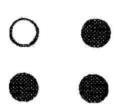
$z = m^2 + n^2$（m、n爲任一整數）

（Brah magrapta　於約600年前發現）

而我們又在圍棋之棋子下發現了

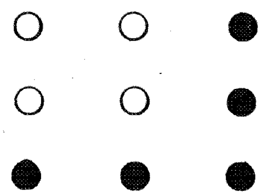
$1 = 1^2$，$1 + 3 = 2^2$

$\Rightarrow\ 1^2 + 3 = 2^2$



$1+3=2^2$，$1+3+5=3^2$

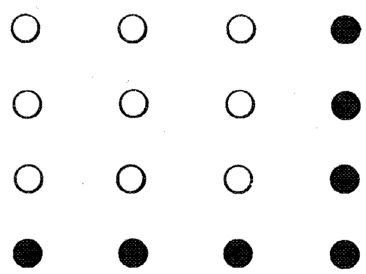
$\Rightarrow\ 2^2+5=3^2$



$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

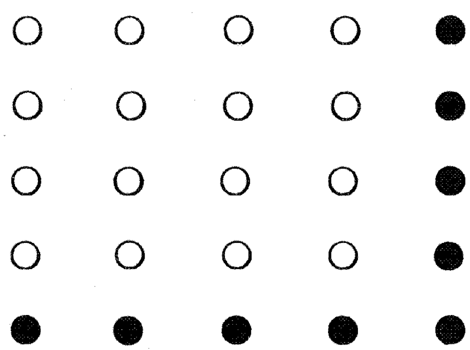
$\Rightarrow\ 3^2+7=4^2$



$1+3+5+7=4^2$

$1+3+5+7+9=5^2$

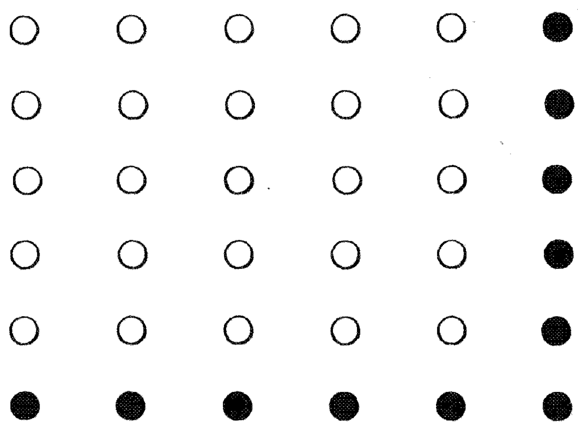
$\Rightarrow\ 4^2+9=5^2$



$1+3+5+7+9=5^2$

$1+3+7+5+9+11=6^2$

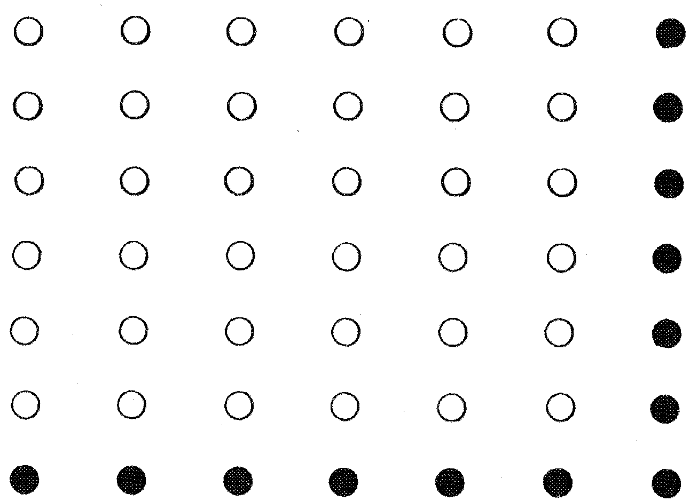
$\Rightarrow\ 5^2+11=6^2$



$1+3+5+7+9+11=6^2$

$1+3+5+7+9+11+13=7^2$

$\Rightarrow\ 6^2+13=7^2$



(1)此爲整奇數之畢氏組數求法而非整奇數之勾股弦關係又是如何呢？

(2)我們從勾、股、弦邊長關係中探討發現斜邊之增加數字愈大差距越小。設第一組之斜股分別爲 a b c，號二組斜股爲 a_2 b_2 c_2 則第二組斜邊增加$\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}$

$$\left(\sqrt{\frac{a_2^2+b_2^2}{a_1^2+b_1^2}}-1\right)$$

例：第一組 $a_1=1$　$b_1=2$　$c_1=2.236017977$

　　第二組 $a_2=2$　$b_2=3$　$c_2=3.60551275$

即 $\sqrt{1^2+2^2}\left(\sqrt{\dfrac{2^2+3^2}{1^2+2^2}}-1\right)$

$=\sqrt{5}\left(\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}-1\right)$

$=\sqrt{5}\left(\sqrt{2.6}-1\right)$

$=1.369483298$

要能速解此種問題，發現與對數有關若 $y=\log x$ 以全長爲75公分而言就有

$75\times\log 10=75\text{cm}$

$75\times\log 9=71.568188\text{cm}$

$75\times\log 8=67.731749\text{cm}$

$75\times\log 7=63.382553\text{cm}$

$75\times\log 6=58.361344\text{cm}$

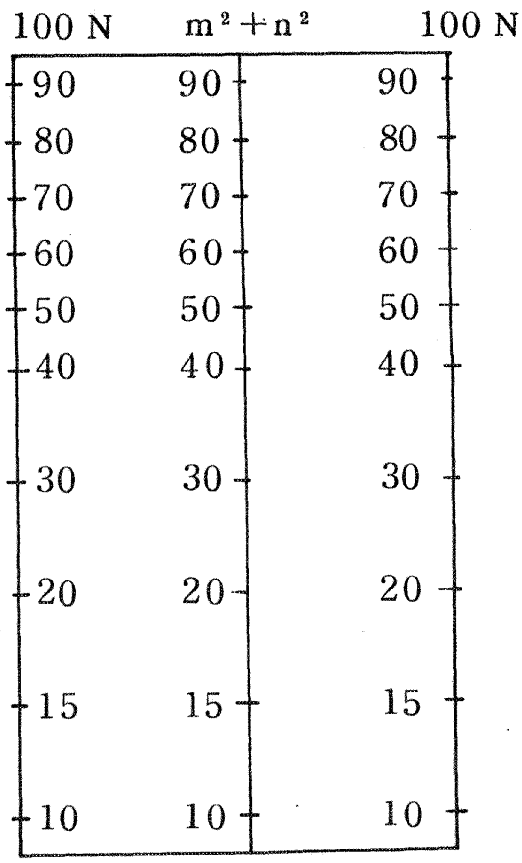
$75\times\log 5=52.42275\text{cm}$

$75\times\log 4=45.154499\text{cm}$

$75\times\log 3=35.784094\text{cm}$

$75\times\log 2=22.57725\text{cm}$

$75\times\log 1=0$



對數愈大距離愈接近，而老師又告訴我們若 $x=\sqrt{yz}$

則 $\log x = \frac{1}{2} \log yz = \frac{1}{2}(\log y + \log z)$

因此中線刻度即爲平均值

6. 高商尺之製作

(1)首先取全長七十五公分之西卡紙作爲尺之全長（若太長不方便攜帶太短刻度小不易刻出）

(2) $75 \times \log 10 = 75$ cm	作爲 100 刻度
$75 \times \log 9.9 = 74.6725$ cm	作爲 99 刻度
$75 \times \log 9.8 = 74.34195$ cm	作爲 98 刻度
$75 \times \log 9.7 = 74.0079$ cm	作爲 97 刻度
$75 \times \log 9.6 = 73.670325$ cm	作爲 96 刻度
$75 \times \log 9.5 = 73.3293$ cm	作爲 95 刻度
$75 \times \log 9.4 = 72.9846$ cm	作爲 94 刻度
$75 \times \log 9.3 = 72.636225$ cm	作爲 93 刻度
(3) $75 \times \log 9.2 = 72.2841$ cm	作爲 92 刻度
$75 \times \log 9.1 = 71.928075$ cm	作爲 91 刻度
$75 \times \log 9 = 71.568225$ cm	作爲 90 刻度
$75 \times \log 8 = 67.731749$ cm	作爲 80 刻度
$75 \times \log 7 = 63.382353$ cm	作爲 70 刻度
$75 \times \log 6 = 58.361344$ cm	作爲 60 刻度
$75 \times \log 5 = 52.42275$ cm	作爲 50 刻度
$75 \times \log 4 = 45.154499$ cm	作爲 40 刻度
$75 \times \log 3 = 35.784094$ cm	作爲 30 刻度
$75 \times \log 2 = 22.57725$ cm	作爲 20 刻度
$75 \times \log 1 = 0$	作爲 10 刻度

(4)然後再上下加壓克力高商尺即完成。

7. 高商尺使用方法

(1)首先求兩股的平方和　即 $a^2 + b^2$

(2)再將 $a^2 + b^2$ 的和因數成兩數相乘

(3)在高商尺兩邊緣找此二數，則此二數之對角連線與中線交點

上之刻度卽爲斜邊之長。

五、我們的話

1. 從此次實驗中得知數學體系之完整性，數與數之間的奧秘均有待我們學生親自去挖掘。
2. 用一種從未有的證明方法，來證明已存在的定理心中自覺無比的舒暢，因而培養出深入探討的興趣。
3. 本高商尺利用三角尺刻畫製作極爲方便，造價低廉，如果每位學生能人持一尺：今後在解題運算上，可節省不少時間。
4. 此作品的價值如何有待評審先生與參觀者的評估與獨到的見解，不吝指敎更是我們由衷的感激。

評語：本作品利用對數探討勾，股，弦邊長的關係，製作高商尺，已知勾，股，卽可利用高商尺查出弦的長，頗有創意。