分期付款

國中組數學科第二名

台北市立建成國民中學

作　者：楊菁華、張慧玲
指導老師：楊訓庭

一、研究動機

我國現已邁向開發國家之林，經濟繁榮，工商業發達，國民生活水準提高，於是「分期付款」盛行，我們發覺各種分期付款，每期總和一定高於售價很多，與銀行利息相比，是高或是低？是每一位消費者想要知道的。因此我們想要研究一最簡便的計算方法，來幫助大家解決這個問題。

二、研究目的

商人所講求的是利潤，但是利潤必須合理。購買者才不致吃虧。當我們以分期付款購買產品時，能儘快地計算出來利潤是否合理，以達經濟實惠的目的。

三、課中依據

國中數學第三册第四章	比例線段
國中數學第五册第二章	平行線的截線
國中數學第五册第五章	相似形
國中數學第六册第三章	等比級數

四、分期付款的意義

設購買一物品，若付現全需付 1 元，每期利率爲 1（100%）（即現金加倍），若不付現金則第一期須付 2 元，依此計算，若欲在第二期付給，則須付 4 元，依此類推。

再設一例，若購買一物，現金須付 3 元，假設利率同上，欲

在分兩期同額分期付清，可將3元分為2元及1元，2元在第一期應付4元，1元在第二期付則須4元。

現金　一期　二期

$\frac{a}{r^2} \rightarrow \frac{a}{r} \rightarrow a$

$\frac{a}{r} \rightarrow a$

$A = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2}$

若用文字式表示

則

A：本金

a：分期付款額

r：1＋利率（每期）

n：期數

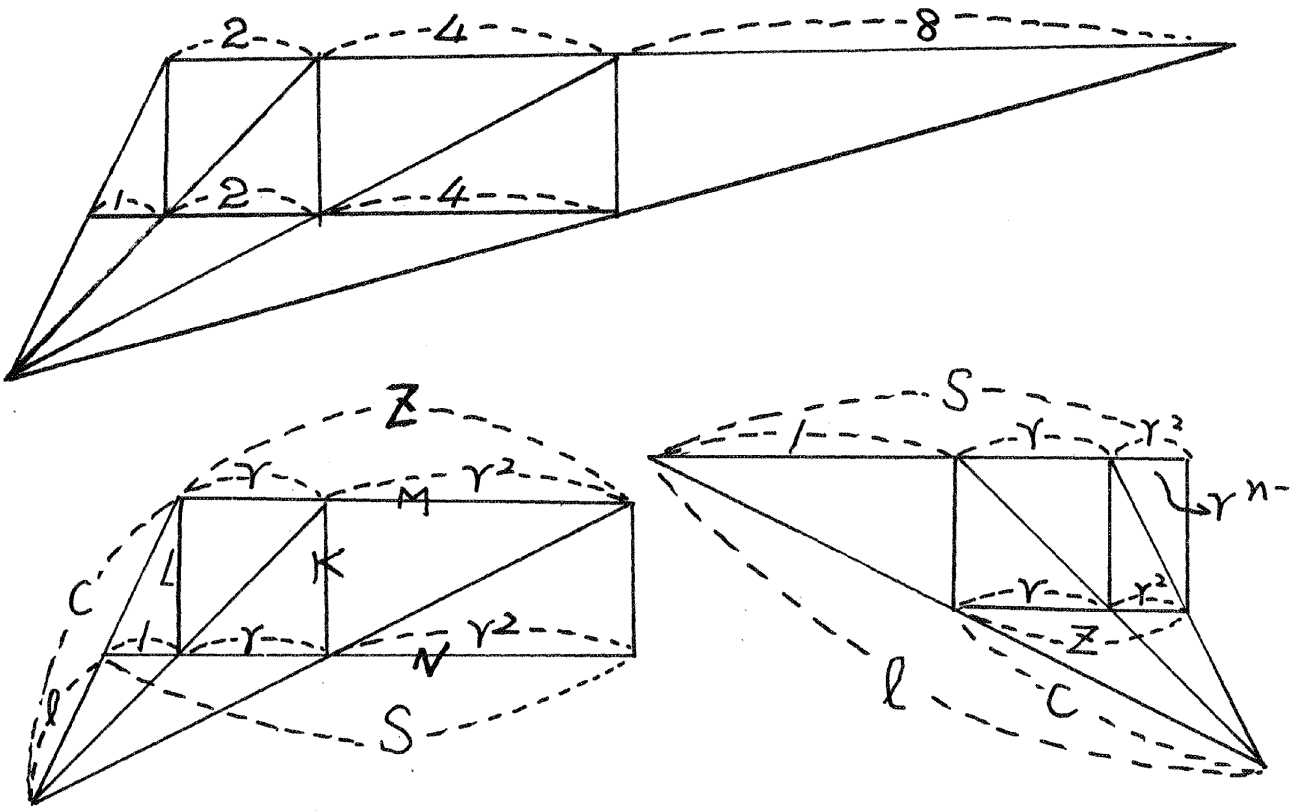
五、由圖解「等比級數的和」導出分期付款公式

在課本第六冊所提「等比級數」和的公式如下

$$
\begin{array}{rl}
S = & 1 + r + \cdots\cdots + r^{n-1} \\
-)\ Sr = & \quad\ \ r + \cdots\cdots + r^{n} \\
\hline
S(1-r) = & 1 - r^{n}
\end{array}
$$

$$S = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$$

利用圖解方法，亦可將上列公式解出



直線L ∥ 直線K，直線M ∥ 直線N

$\because \dfrac{r}{1}=\dfrac{c}{\ell}=\dfrac{Z}{S-r^2}$　由圖知　$Z=S-1$

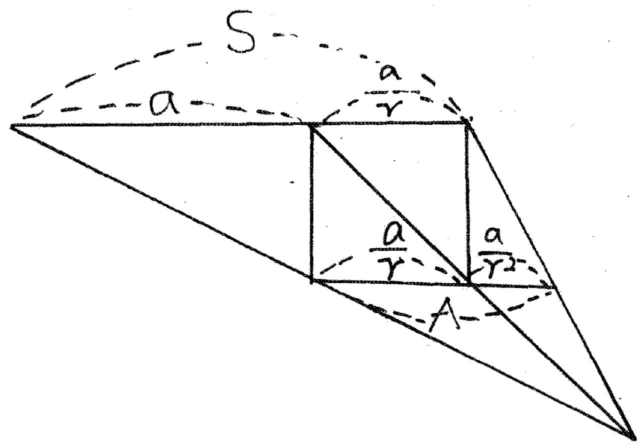
$\therefore r(S-r^2)=S-1$　即 $S=\dfrac{r^3-1}{r-1}$

由此推得　$S=\dfrac{r^n-1}{r-1}\ (r\neq 1)$

同理可導出分期付款公式

$\because r=\dfrac{a}{\frac{a}{r}}=\dfrac{S}{A}=\dfrac{a+A-\frac{a}{r^2}}{A}$

即 $A = \dfrac{a(r^2-1)}{r^2(r-1)}$



$\therefore A = \dfrac{a(r^n-1)}{r^n(r-1)}$

由此導出公式

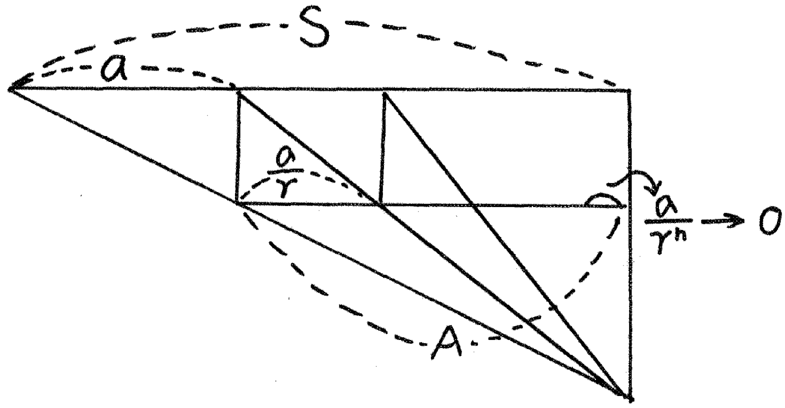
$$a = \frac{Ar^n(r-1)}{r^n-1}$$

$(r \neq 1)$

當 n 根大時

$$r = \frac{a}{\frac{a}{r}} = \frac{S}{A}$$

$$= \frac{a+A}{A}$$



$\therefore rA = a + A$

$\therefore A(r-1) = a$

上式表示存A元於銀行，而「現在領A元」等於「分無限多期領而每期領 $A(r-1) = a$ 元」而這樣的a是無限多期才能領完，亦即永久領不完的意思。由此可見銀行生利息，本身也是一種分期付款的方式，換句話說，就是銀行也向顧客分期付款的意思。

例購錄影機一台，價格 5 萬元（A），如分 3 期（n），分期付款（a）每期應繳多少？但 $r = 1.2$

代入公式

$$a = \frac{Ar^n(r-1)}{r^n-1} = \frac{5 \times 1.2^3(1.2-1)}{1.2^3-1}$$

$$= \frac{1.728}{0.728} = 2.3736263$$

驗算

r		n	
1.2倍	1.2倍	1.2倍	
1.3736	1.6483	1.9780	2.3736
1.6483	1.9780	2.3736	
+) 1.9780	2.3736		a

A＝4.9999 萬元

六、圖解表的設計及應用

由公式　$a=\dfrac{Ar^{n}(r-1)}{r^{n}-1}$

設 A＝1　則　$a=y=\dfrac{r^{n}(r-1)}{r^{n}-1}$

$$y=(r-1)\left(1+\frac{1}{r^{n}-1}\right)$$

當 n 增加時 r^{n} 也增加而 $\dfrac{1}{r^{n}-1}$ 就減少，y 值也跟著減少，於是曲線越向右，反趨下降。

在 r＝1 時

現金　一　＝

a → a → a　　　∴　A＝na

a → a　　　∵　a＝Ay

A　$\underbrace{a+a}_{na}$　　　∴　$y=\dfrac{1}{n}$

n	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	0.125	0.111

n	10	11	12
y	0.100	0.091	0.083

$r=1$ 時之 y 值爲基準設計如下頁圖解表

本圖具有下列特徵

1. n 越大，則 y 越小（即期數多，付款少）

2. 若 n 很大，大約 $y=r-1$（$\because \dfrac{1}{r^n-1}\rightarrow 0$）

　∴　曲線右方呈水平

3. r 愈大，則 y 也愈大（即利率大，付款多）

4. 如 r 很大，大約 $y=r$

　∴越上方的曲線，越呈水平狀態

5. 曲線和曲線間的 y 坐標之差距大致相等

　可推想表中，未劃

　出之部份

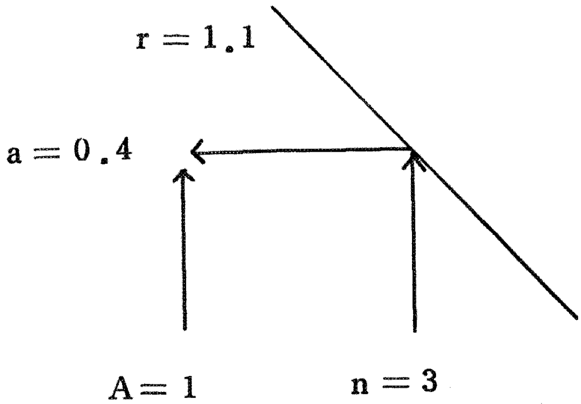
　圖解表的應用

　例 $A=1$

　㈠ $a=?$

　　$n=3$

　　$r=1.1$



　例㈠

　　$A=?$

　　$a=0.3$

　　$n=7$

　　$r=1.01$

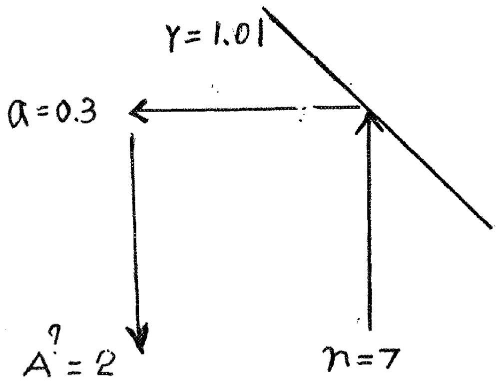
　例㈡

　　$A=?$

　　$a=0.3$

　　$n=7$

　　$r=1.01$



$A=2$　　$n=7$　　$a=0.3$　　$r=1.01$　？

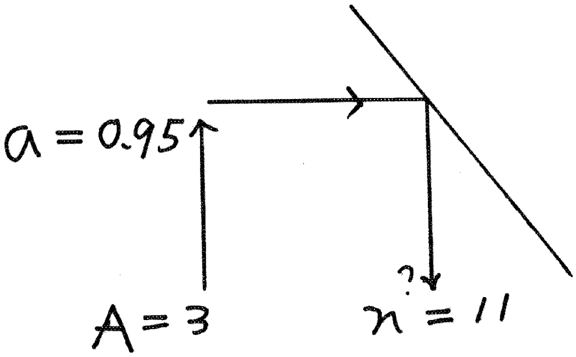
例(三)

A = 3

a = 0.95

n = ?

r = 1.3



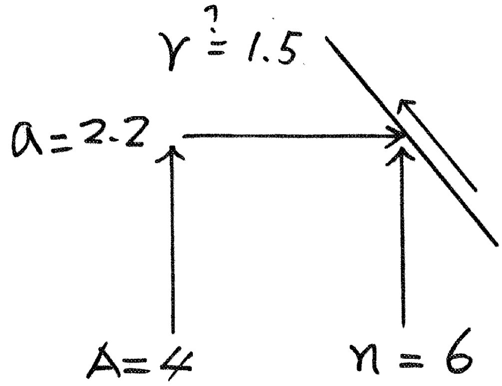
例(四)

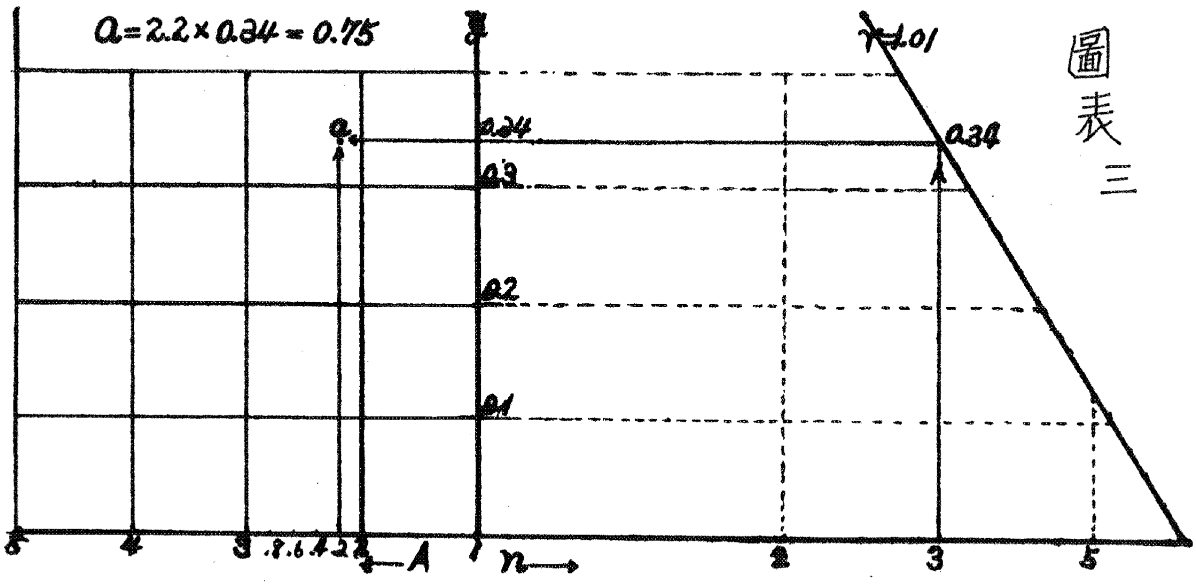
A = 4

a = 2.2

n = 6

r = ?





圖表三

七、分二段分期付款的方式

例一、購物 38 元，分 5 期分期付款，前 3 期，每期已付 40 元，後 2 期每期應付多少元？

（但 r ＝ 2 ）

$\ell = 2$

後段期數

$n = 3$

前段期數

$r = 2$

1	2	4	8	16	32
2	4	8	16	32	
5	10	20	40		
10	20	40			
20	40				

$$38 = 20 + 10 + 5 + 2 + 1$$

$$A=\left(\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+\cdots\cdots+\frac{a}{r^n}\right)+\left(\frac{b}{r^{n+e}}+\cdots+\frac{b}{r^{n+e}}\right.$$

3　2

$$A=\frac{a\,(r^n-1)}{r^n\,(r-1)}+\frac{b}{r^{n+e}}\left(\frac{r^e-1}{r-1}\right)$$

∴得公式 $b=\dfrac{A r^{n+1}-(A+a)r^n+a}{1-\dfrac{1}{r^e}}$

由上例　$A = 38$ 元，$a = 40$ 元　$n = 3$

$\ell = 2$　　$r = 2$　　$b = ?$

代入公式

$$b=\frac{38\cdot 2^4-(38+40)\cdot 2^3+40}{1-\dfrac{1}{2^2}}$$

$$=\frac{608-624+40}{\dfrac{3}{4}}=\frac{24\times 4}{3}=32$$

例二購物 6000 元（ A ），分 8 期分期付款，前 3 期（ n ）

每期已付 200 元（ a ），後 5 期（ ℓ ），每期應付多少？

（ b ）

但 $r = 1.2$

$$b=\frac{6000\times 1.2^{4}-(6000+200)\times 1.2^{3}+200}{1-\dfrac{1}{1.2^{5}}}$$

$$=3223.42034$$

驗算

	1.2倍	1.2倍	1.2倍	1.2倍	1.2倍	1.2倍	1.2倍	1.2倍	
	749.66	900	1080	1295	1555	1865	2238	2686	3223
	899.60	1080	1295	1555	1865	2238	2686	3223	
後段5期	1079.52	1295	1555	1865	2238	2686	3223		
	1295.42	1555	1865	2238	2686	3223			
	1554.50	1865	2238	2686	3223				
	115.74	139	167	200					
前段3期	138.89	167	200						
	166.67	200							
+)	6000								

例三、實例

購買福特汽車（ 1600 c.c. ），售價48萬元，現代 18 萬元，其餘分 24 期分期付款，若前 12期每期付19500 元，則後 12期每期應付多少？ $r=1.0085$

$A=30$ 萬元， $n=12$ ， $r=1.0085$

$a=1.95$ 萬元 $\ell=12$ ，$b=?$

代入公式　則得 $b=0.764061943$ 萬元

（ 7640元 6 角 ）

以上各例均可用小型電算機計算

評語：本作品對分期付款的原理和計算方法，有扼要簡明的說明，並以統計圖表幫助計算，實用上頗有參考價值。