大整數a，$\sqrt{a}$ 作圖法之探討

國中組數學科第一名

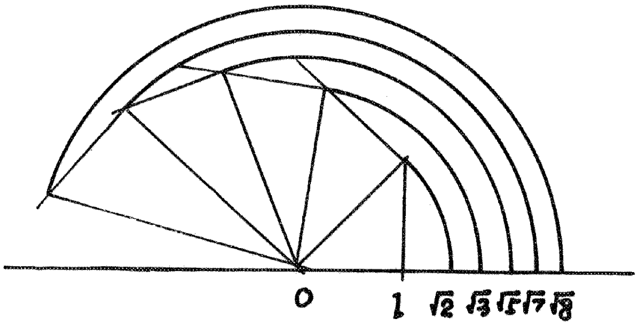
花蓮縣立新城國中

作　　者：林寶玉等四人

指導老師：陳貞康、王樹文

一、研究動機

由國中數學課本第三三册第85 頁，我們學習到如何以圓規直尺作圖求得$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$……等無理數之長，並進一步找出這些無理數於數線上所在之位置。（見圖ㄅ）



（圖ㄅ）

但對於$\sqrt{261}$，$\sqrt{315}$ 或更大的正整數a，$\sqrt{a}$之作圖法仍須如圖ㄅ，一般來作嗎？

二、研究目的

希望能找出一個方法，或一個原則將正整數N分類，使任一$a \in N$，$\sqrt{a}$之長皆能很快的作圖得到。

三、研究過程

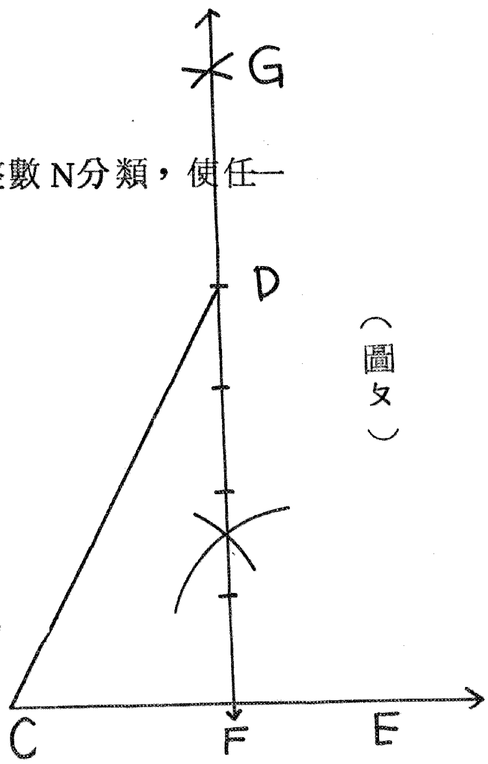
1. 在課外練習時有一題目：求作$\sqrt{20}$之長

〔已知〕$\overline{AB}=1$　　　（見圖ㄆ）

〔求作〕$\overline{CD}=\sqrt{20}$

〔作法〕

(1) 作$\overrightarrow{CE}$並在$\overrightarrow{CE}$上取一線段$\overline{CF}$使$\overline{CF}=2$



（圖ㄆ）

(2)過 F 作 CE 之垂直線 FG

(3)在 FG 上取一點 D 使得 FD = 4

(4)連接 CD 爲所求。

〔證明〕

(1)因爲 FG　CE 所以△CFD 爲直角三角形

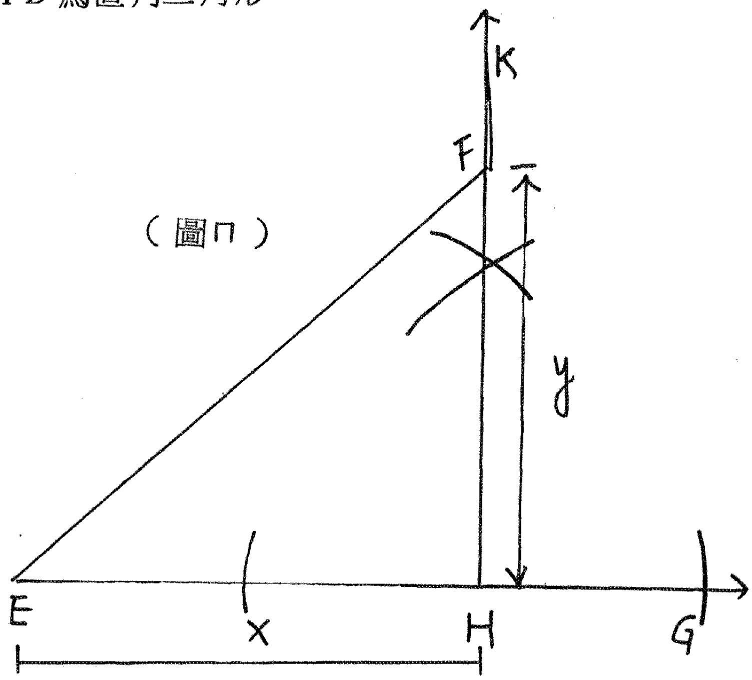
$\angle CFD = 90^\circ$

(2)利用畢氏定理

$$\overline{CD}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{FD}^2$$
$$= 2^2 + 4^2$$
$$= 20$$

(3)所以 $CD = \sqrt{20}$ 故得證

由這一個例題發現到對於任一整數 a 若一 a 可表正兩正整數之平方和，即 $a = x^2 + y^2$（x，$y \in N$）則 $\sqrt{a}$ 之長之作圖如下：（見圖ㄇ）



（圖ㄇ）

〔已知〕$\overline{AB} = x$，$\overline{CD} = y$，$a = x^2 + y^2$

〔求作〕$\overline{EF} = \sqrt{a}$

〔作法〕

(1)任意作一射線 $\overrightarrow{EG}$

(2)在 $\overrightarrow{EG}$ 上取一點 H，使得 $\overline{EH} = x$

(3)過 H 作 $\overrightarrow{EG}$ 之垂直線 $\overrightarrow{HK}$

(4)在 $\overrightarrow{HK}$ 上取一點 F，使得 $\overline{HF} = y$

(5)連接 $\overline{EF}$ 爲所求

但是那些正整數可表成兩正整數之平方和

呢？

2. 經由老師指導大學整數論中有一個定理內容大意如下：

「一正整數 n 可以表成兩正整數之平方和」和且唯若「當 n 表成正質因數之連乘積 $n = 2^x p_1^{y_1} p_2^{y_2} \cdots\cdots p_r^{y_r} q_1^{z_1} q_2^{z_2} \cdots\cdots q_s^{z_s}$ 其中 r，$S \in N$，x，y_i，$z_j \in N$（$1 \le i \le r$，$1 \le j \le s$）且 P_i 爲 4 的倍數加 1（$1 \le i \le r$，$i \in N$）

q_j 爲 4 的倍數加 3，z_j 爲偶數（$1 \le j \le s$）」

由這個定理可以判斷那些正整數 a 可以表成兩正整數之平方和

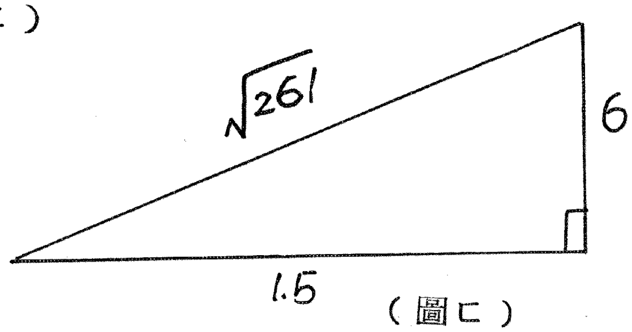
例：$261 = 9 \times 29 = 3^2 \times 29$　3 爲 4 的倍數加 3

其次數 2 爲偶數，所以 261 必可化爲兩正整數之平方和，

其作法：

$$\begin{aligned} 261 &= 3^2 \cdot 29 \\ &= 3^2 (2^2 + 5^2) \\ &= 6^2 + 15^2 \end{aligned}$$

$\sqrt{261}$ 作圖法（見圖ㄈ）



（圖ㄈ）

而 $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 其中 7 爲 4 的倍數加 3，而其指數 1 不爲偶數。所以 315 不能表成兩正整數之平方和

即 $\sqrt{315}$ 無法依上述的作圖法得到那麼有沒有其他的作圖法可以很迅速地作出 $\sqrt{315}$ 的長呢？

3. 我們考慮到若正整數 a 可以表成兩正整數之平方

即 $a = x^2 - y^2$（a，x，$y \in N$）

是否可作圖以 $\overline{AB} = x$ 爲斜邊，以 $\overline{BC} = y$ 爲一股作直角三角形，則 $\overline{AC} = \sqrt{a}$

發現其作法如右：（見圖ㄉ）

（圖ㄉ）

〔已知〕$a=x^2-y^2$，（a，x，$y\in$ N）且$\overline{A_1A_2}=x$，$\overline{B_1B_2}=y$

〔求作〕$\overline{AB}=\sqrt{a}$

〔作法〕

(1)作一直線$\overleftrightarrow{AC}$

(2)以A為圓心，$\overline{A_1A_2}$長為半徑畫弧交$\overline{AC}$於D，則$\overline{AD}=x$

(3)以$\overline{AD}$為直徑畫圓

(4)以D為圓心，$\overline{B_1B_2}$長為半徑畫弧交圓於B點，則$\overline{BD}=y$

(5)連接$\overline{AB}$為所求

〔證明〕

(1)△ABD中因為$\overline{AD}$為外接圓之半徑，所以∠ABD為直角

(2)根據畢氏定理 $\overline{AB}^2+\overline{BD}^2=\overline{AD}^2$

$$\overline{AB}^2+y^2=x^2$$

$$\overline{AB}^2=x^2-y^2$$

$$\overline{AB}=\sqrt{x^2-y^2}$$

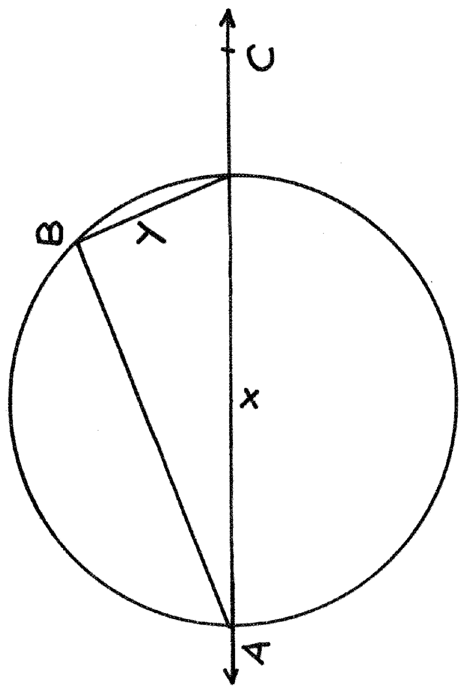
$$=\sqrt{a}\text{ 故得證}$$

那麼那一些正整數a可化成兩正整數之平方差呢？

4. 若$a=x^2-y^2$（a，x，$y\in$N，$x>y$）

則$a=(x-y)(x+y)$

因爲$(x+y)-(x-y)$
$=2y$ 爲偶數
即 $(x+y)$，$(x-y)$
同爲奇數或 $(x+y)$，
$(x-y)$ 同爲偶數，
所以若正整數a可表成
兩正整數之平方差，則
a 可分解成兩正奇數或
兩正偶數之乘積反之若
a 可化成兩正奇數之乘
積
即 $a=x \cdot y$（$a\in N$
，x，y 皆正奇數，且
$x>y$）



則 $(\frac{x+y}{2})^2-(\frac{x-y}{2})^2$
$=xy=a$ 其中因x，y 皆正奇數且 $x>y$
所以 $\frac{x+y}{2}$，$\frac{x-y}{2}$ 皆正整數
也就是說a可化成兩正奇數之乘積
則 a 可表成兩正整數之平方差
同理a 可化成兩正偶數之乘積
則 a 可表成兩正整數之乘積整理後得到對於任一正整數 a
「a 可化成兩正整數之平方差」若且唯若「a 可分解成兩正奇數或兩正偶數之乘積」但仍有很多正整數K即不能化成兩正整數之平方和，又不能化成兩正整數之平方差。
則$\sqrt{K}$之作圖即不能如圖ㄇ，又不能如圖ㄉ，那該如何作圖呢？

5. 例如$\sqrt{6}$的作圖，$6=2\times3=1\times6$

即不能化爲兩正整數之平方和又不能化爲兩正整數之平方差。

但 $6 = 2 \times 3$

所以 $4 \times 6 = (2 \times 2)(2 \times 3) = (2\sqrt{6})^2$

則 4×6 可以化成 $\left(\dfrac{6+4}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{6-4}{2}\right)^2$

就是說以 5 爲斜邊長，1 爲一股長作直角三角形，則另一股爲 $\sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$ 只須再作這一股的垂直平分線則將這一股分成長皆爲 $\sqrt{6}$ 的兩段

同理任一正整數 a 若 a 即不可化成兩正整數之平方和亦不可成爲化成兩正整數之平方差，仍可簡易的作圖得到 $\sqrt{a}$ 的長

〔已知〕正整數 a　（見圖ㄊ）

〔求作〕$\overline{AB} = \sqrt{a}$

〔作法〕

(1)過 A 點作一直線 $\overleftrightarrow{AD}$

(2)在 $\overleftrightarrow{AD}$ 上取一點 C 使得 $\overline{AC}$ 長爲 $(a+1)$

(3)以 AC 爲直徑畫圓

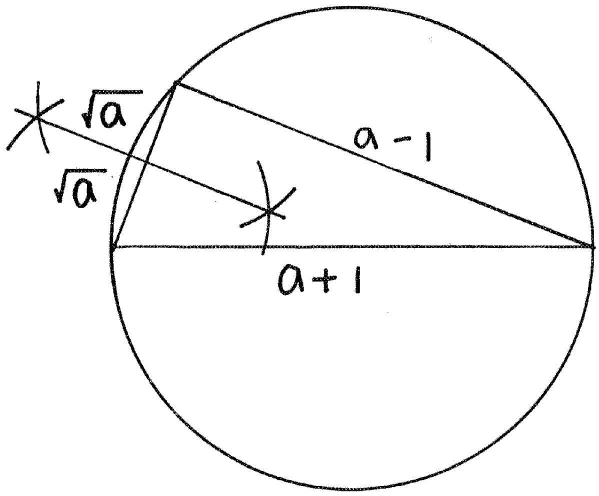
(4)以 C 爲圓心 $(a-1)$ 長爲半徑畫弧交圓於 G

(5)連接 $\overline{AG}$

(6)分別以 A，G 兩點爲圓心大於 $\frac{1}{2}\overline{AG}$ 爲半徑畫弧各交於 E，F 兩點

(7)連接 $\overline{EF}$ 交 $\overline{AG}$ 於 B 點

(8)則 $\overline{AB}$ 爲所求



（圖ㄊ）

〔證明〕

(1) $\overline{AG}^2+\overline{CG}^2=\overline{AC}^2$

$\overline{AG}^2+(a-1)^2=(a+1)^2$

$\overline{AG}^2=(a+1)^2-(a-1)^2$

$\overline{AG}^2=4a$

$\overline{AG}=\sqrt{4a}=2\sqrt{a}$

(2) B為AG中點

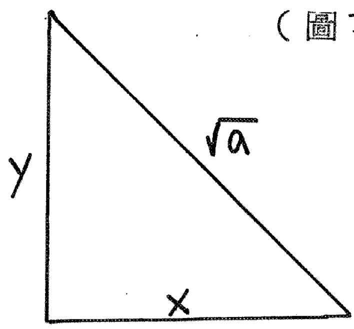
所以$\overline{AB}=\overline{BG}=\sqrt{a}$

四、結　　論

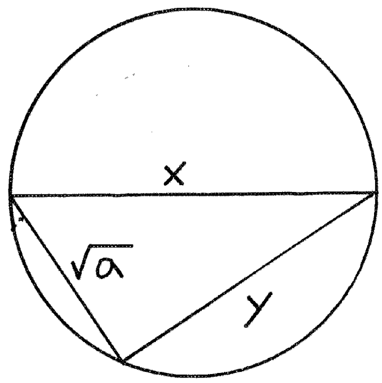
經由我們的努力，發現對於正整數a，$\sqrt{a}$的作圖可以這麼處理。

1. a可表成兩正整數之平方和（$a=x^2+y^2$）
則$\sqrt{a}$作圖如圖ㄋ

（圖ㄋ）



2. a可表成兩正整數之平方差（$a=x^2-y^2$）
則$\sqrt{a}$作圖如圖ㄌ
3. a即不可化成兩正整數之平方和，亦不可化成兩正整數之平方差
則$\sqrt{a}$作圖如圖ㄍ



（圖ㄌ）

五、參考資料

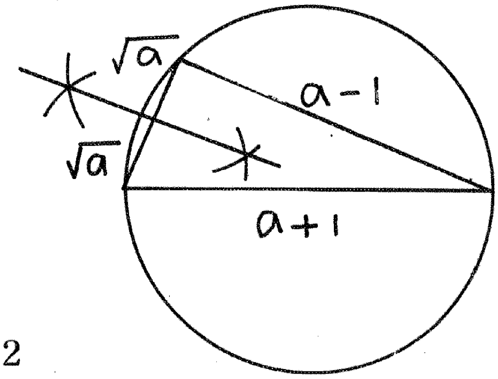
作者：Andrews

書名：Number Theory

頁數：141 頁，142 頁

內容：定理11-1

「正整數n可表成兩正整數之平方和」若且唯若「n表成質因數之連乘積後，4的倍數加3之質因數的次數皆爲偶數」



（圖ㄍ）

評語：本作品對國中數學中所講$\sqrt{a}$的作圖法，利用將a分解爲兩整數平方之和或差及畢氏定理來探討當a爲大整數時，$\sqrt{a}$的作圖，敍述完善，條理分明，値得鼓勵。