二元二次方程式圖形判別方法

高中教師組數學科第三名

市立成功高級中學　　　　　　　　　　　　　　作者：吳隆盛

關於二元二次方程式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 之圖形的判別，首先我仍然是分成 $b^2-4ac=0, b^2-4ac<0, b^2-4ac>0$ 三種情形，然後再作進一步的判別。爲了方便起見，在本文中一律以 Γ 表二元二次方程式：

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\ (\ a,b,c \text{ 不皆爲 } 0\ )$$

一、第一部份：$b^2-4ac=0$ 時

⊙判別方法⊙

在 $b^2-4ac=0$ 時，二次項 $ax^2+bxy+cy^2$ 必可化爲

$$A(\ px+qy\ )^2$$

之形式，而有

$$\Gamma:A(\ px+qy\ )^2+dx+ey+f=0$$

接着就檢查

$$\begin{vmatrix} p & q \\ d & e \end{vmatrix}$$

之值，分述如下：

(1)當

$$\begin{vmatrix} p & q \\ d & e \end{vmatrix}\neq 0$$

時，即可知 Γ 之圖形爲一拋物線。

(2)

$$\begin{vmatrix} p & q \\ d & e \end{vmatrix}=0$$

時，我們就有一常數 B 使 $d=Bp, c=Bq$，而有

$$\Gamma:A(\ px+qy\ )^2+B(\ px+qy\ )+C=0$$

（這裏的常數項C就是原來的f）我們再繼續檢驗判別式

B^2-4AC 之值。

(a)如果$B^2-4AC>0$，那麼Γ就表二平行直線。

(b)如果$B^2-4AC=0$，那麼Γ就表一直線（重合兩的直線）

(c)如果$B^2-4AC<0$，那麼Γ之圖形就不存在。

⊙例題⊙

試判別 $4x^2+12xy+9y^2+4x+5y-1=0$ 之圖形。

【解】$12^2-4.4.9=0$（可代之以$6^2-4.9=0$），原式可化為

$$(2x+3y)^2+4x+5y-1=0.$$

由

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

（即$2:3\neq4:5$），知原式所表圖形為一拋物線。

⊙判別法之證明

(1)之證明

【已知】$\Gamma: A(px+qy)^2+dx+ey+f=0$

$$\begin{vmatrix} p & q \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0,\ A\neq 0\ (\text{當然 } p^2+q^2\neq 0)$$

【求證】Γ之圖形為一拋物線。

【證明】

(a) $\Gamma: A(px+qy)^2+dx+ey+f=0$，$A\neq 0$

以$1/A$遍乘各項：

$$(px+qy)^2+\frac{d}{A}x+\frac{e}{A}y+\frac{f}{A}=0.$$

令$k=d/2A$，$l=e/2A$，$m=f/A$，得

$$\Gamma: (px+qy)^2+2kx+2ly+m=0.$$

(b)由

$$2A(pl-qk)=\begin{vmatrix} p & q \\ 2Ak & 2Al \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p & q \\ d & e \end{vmatrix}\neq 0$$

且 $A\neq 0$，得 $pl-qk\neq 0$ 這是一個重要關鍵。

(c)將 $(px+qy)^2+2kx+2ly+m=0$ 移項得

$$\Gamma: 2kx+2ly+m=-(px+qy)^2$$

等號兩端各加 $(p^2+q^2)(x^2+y^2)$ 得

$$(p^2+q^2)(x^2+y^2)+2kx+2ly+m$$
$$=(p^2x^2+p^2y^2+q^2x^2+q_2y^2)$$
$$-(p^2x^2+2pqxy+q_2y^2)$$

即

$$\Gamma: (p^2+q^2)x^2+(p^2+q^2)y^2+2kx+2ly$$
$$+m=(qx-py)^2$$

(d)由 $pl-qk\neq 0$ （已證），取一常數

$$t=\frac{(p^2+q^2)m-(k^2+l^2)}{2(qk-pl)}$$

去分母得

$$2qkt-2plt=(p^2+q^2)m-(k^2+l^2)$$

移項：

$$(k^2+2qkt)+(l^2-2plt)=(p^2+q^2)m$$

等號兩端各加 $q^2t^2+p^2t^2$ 得

$$(k^2+2qkt+q^2t^2)+(l^2-2plt+p^2t^2)$$
$$=(p^2+q^2)m+q^2t^2+p^2t^2$$

即

$$(k+qt)^2+(l-pt)^2=(p^2+q^2)(m+t^2)$$

故

$$m+t^2=\frac{(k+qt)^2+(l-pt)^2}{p^2+q^2}$$

(e)將 $\Gamma: (p^2+q^2)x^2+(p^2+q^2)y^2+2kx+2ly$
$+m=(qx-py)^2$ 等號兩端各加 $2(qx-py)$
$t+t^2$

得

$$(p^2+q^2)x^2+(p^2+q^2)y^2+2(k+qt)x+$$

$2(l-pt)y+m+t^2=(qx-py)^2+$
$2(qx-py)t+t^2$

即

$$(p^2+q^2)x^2+(p^2+q^2)y^2+2(k+qt)x$$
$$+2(l-pt)y+\frac{(k+qt)^2+(l-pt)^2}{p^2+q^2}$$
$$=(qx-py+t)^2$$

同乘　$1/(p^2+q^2)$得

$$x^2+\frac{2(k+qt)}{p^2+q^2}x+\frac{(k+qt)^2}{(p^2+q^2)^2}$$
$$+y^2+\frac{2(l-pt)}{p^2+q^2}y+\frac{(l-pt)^2}{(p^2+q^2)^2}$$
$$=\frac{(qx-py+t)^2}{p^2+q^2}$$

即

$$(x+\frac{k+qt}{p^2+q^2})^2+(y+\frac{l-pt}{p^2+q^2})^2$$
$$=\frac{(qx-py+t)^2}{p^2+q^2}$$

即

$$\Gamma:\sqrt{(x+\frac{k+qt}{p^2+q^2})^2+(y+\frac{l-pt}{p^2+q^2})^2}$$
$$=\frac{|qx-py+t|}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

此式顯示：Γ之圖形爲「動點$P(x,y)$到定點$F(-(k+qt)/(p^2+q^2),-(l-pt)/(p^2+q^2))$的距離等於動點$P(x,y)$到定直線$L:qx-py+t=0$的距離」的$P$點之軌跡。

(f)我們現在檢驗一下定點$F(-(k+qt)/(p^2+q^2),-(l-pt)/(p^2+q^2))$是否在直線$L$：$qx-py+t$

$=0$ 上。

由

$$q\left(-\frac{k+qt}{p^2+q^2}\right)-p\left(-\frac{l-pt}{p^2+q^2}\right)+t$$

$$=\frac{-qk-q^2t+pl-p^2t+p^2t+q^2t}{p^2+q^2}=\frac{pl-qk}{p^2+q^2}\neq 0$$

（重要關鍵 $pl-qk\neq 0$）

知 F 點不在直線 L 上。

於是 Γ 之圖形為

「以 F 點為焦點，直線 L 為準線的拋物線。」

【註】(1)此一證明過程雖覺冗繁，但利用此一判別法在 Γ 表一拋物線時，卻是一眼就可以看出來的。

(2)適當地運用此一證明過程之方法，我們可以不經「旋轉、平移」或「固有值」的運算，而直接得到拋物線 Γ 的焦點坐標。

$F\left(-(k+qt)/(p^2+q^2),\ -(l-pt)/(p^2+q^2)\right)$，以及準線之方程式

$$L:\ qx-py+t=0,$$

詳細作法以後有機會再另行為文說明。

(2)之證明

【已知】$\Gamma:\ A(px+qy)^2+B(px+qy)+C=0$

$A\neq 0$，$p^2+q^2\neq 0$.

【求證】

(1)當 $B^2-4AC>0$ 時，Γ 表二平行直線。

(2)當 $B^2-4AC=0$ 時，Γ 表一直線（重合的兩直線）。

(3)當 $B^2-4AC<0$ 時，Γ 之圖形不存在。

【證明】

$\Gamma:\ A(px+qy)^2+B(px+qy)+C=0$

$A\neq 0$，$p^2+q^2\neq 0$

等號兩端同乘以 $4A$，得

$$l:\ 4A^2(px+qy)^2+4AB(px+qy)+4AC=0$$

即

$$\Gamma: 4A^2(px+qy)^2+4AB(px+qy)+B^2 -(B^2-4AC)=0.$$

即

$$\Gamma: [2A(px+qy)+B]^2-(B^2-4AC)=0$$

令$D=B^2-4AC$，就得

$$\Gamma: (2Apx+2Aqy+B)^2-D=0$$

(a)當 $D=B^2-4AC>0$ 時，就有

$$\Gamma: (2Apx+2Aqy+B+\sqrt{D})(2Apx+2Aqy+B-\sqrt{D})=0$$

故Γ表二平行直線

$$L_1: 2Apx+2Aqy+B+\sqrt{D}=0$$
$$L_2: 2Apx+2Aqy+B-\sqrt{D}=0$$

其中$\sqrt{D}\in R$　　$\sqrt{D}>0$

(b)當 $D=B^2-4AC=0$ 時，就有

$$\Gamma: 2Apx+2Aqy+B)^2=0$$

故Γ表一直（重合的兩直線）

$$L: 2Apx+2Aqy+B=0$$

(c)當 $D=B^2-4AC<0$ 時，取正數$K=-D$，就 有

$$\Gamma: (2Apx+2Aqy+B)^2+K=0 \text{ 其中 } K>0$$

因為對於任意實數對(x, y)恆有$(2Apx+2Aqy+B)^2>0$，於是 Γ之方程式無實數解，故Γ之圖形不存在。

二、第二部份：$b^2-4ac<0$時

⊙判別方法⊙

由$b^2-4ac<0$，知$4ac>b^2\geq 0$，故$a\neq 0$且$c\neq 0$（事實上a,c同為正同為負）。

先檢查常數f項。

當$af<0$時，Γ之圖形必為橢圓。

當 $af \geqslant 0$ 時，繼續依下列步驟判別 Γ 之圖形。

將 Γ 之方程式依 x 之降冪式寫成：

$$\Gamma: ax^2 + (by + d)x + (cy^2 + ey + f) = 0$$

取其判別式

$$\begin{aligned} D &= (by + d)^2 - 4a(cy^2 + ey + f) \\ &= (b^2 - 4ac)y^2 + (2bd - 4ae)y + (d^2 - 4af) \\ &= -(Ay^2 + By + C), \end{aligned}$$

$A = -(b^2 - 4ac) > 0$，$B = 4ae - 2bd$, $C = 4af - d^2$.

再檢驗此式之判別式：

(1) $B^2 - 4AC > 0$ 時，Γ 表一橢圓。此時並有以下附帶之性質：

(a)此一橢圓之二水平切線之方程式爲。

$$y = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad y = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

仿此亦可求得二垂鉛切線之方程式。

(b)滿足方程式 Γ : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

的一切實數 x, y 中，y 之

$$極大值爲 \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$極小值爲 \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

仿此亦可求得 x 之極大值與極小值。

(2) $B^2 - 4AC = 0$ 時，Γ 表一點。此點之坐標爲

$$\left(-\frac{by_1 + d}{2a}\ y_1\right)，其中\ y_1 = -\frac{B}{2A}$$

(3) $B^2 - 4AC < 0$ 時，Γ 之圖形不存在。

⊙例題⊙

1. 試判別 $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ 之圖形。

【解】$3^2 - 5.5 = -16 < 0$，　又 $af = 5\cdot(-4) = -20 < 0$

故其圖形必爲一橢圓。

2. 試判別 $14x^2 + 24xy + 21y^2 + 52x + 66y + 14 = 0$ 之圖形

【解】$12^2-14\times 21<0$（很容看出來，因爲 $12<14$ 且 $12<21$）

原式可化爲

$$14x^2+2(12y+26)x+(21y^2+66y+14)=0$$

取其判別式

$$\begin{aligned} D&=(12y+26)^2-14(21y^2+66y+14)\\ &=150y^2-300y+480\\ &=-30(5y^2+10y-16) \end{aligned}$$

再檢驗此式之判別式 $5^2-5\cdot(-16)=105>0$，故知其圖形爲一橢圓。此一橢圓有二水平切線

$$L_1: y=\frac{-5+\sqrt{105}}{5} \text{ 與 } L_2: y=\frac{-5-\sqrt{105}}{5}$$

甚至可知此一橢圓之中心之縱坐標爲

$$-B/2A=-1$$

判別法之證明⊙

【已知】$\Gamma: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

$b\neq 0$ 且 $b^2-4ac<0$

即

$$\Gamma: ax^2+(by+d)x+(cy^2+ey+f)=0$$

取 Γ 之判別式

$$\begin{aligned} D(y)&=(by+d)^2-4a(cy^2+ey+f)\\ &=(b^2-4ac)y^2+(2bd-4ae)y+\\ &\quad (d^2-4af)\\ &=-(Ay^2+By+C) \end{aligned}$$

其中

$A=-(b^2-4ac)>0$，$B=-(2bd-4ae)$，

$C=-(d^2-4af)$

【求證】

(1) $B^2-4AC>0$ 時，Γ 表一橢圓。

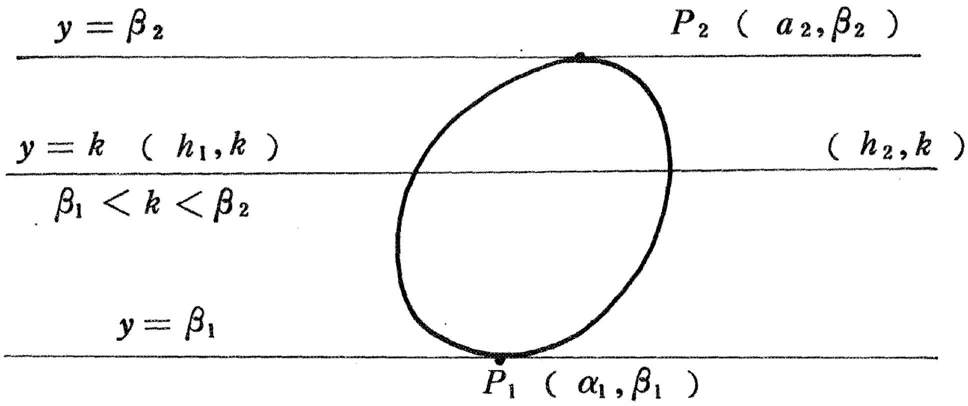
(2) $B^2-4AC=0$ 時，Γ 表一點。

(3) $B^2-4AC<0$ 時，Γ 之圖形不存在。

【證明】

由 $b^2 - 4ac < 0$，知 Γ 之圖形爲一橢圓或一點空集合。

(1) $B^2 - 4AC > 0$ 時，存在 $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{R}$ 且 $\beta_1 < \beta_2$〔事實上 $\beta_1 = (-B - \sqrt{B^2 - 4AC})/2A$，$\beta_2 = (-B + \sqrt{B^2 - 4AC})/2A$〕使 $D(y) = -(Ay^2 + By + C)$ $= -A(y - \beta_1)(y - \beta_2)$



(1)在 $y = \beta_1$ 時，方程式 Γ 的判別式 $D(y)$ 之值 $= D(\beta_1) = 0$，則 Γ 的 x 之解有一個二重根 $x = \alpha_1$，故 Γ 所圖形與水平直線 $y = \beta_1$，相切於一點 $P_1(\alpha_1, \beta_1)$。同理，Γ 之圖形亦與另一水平直線 $y = \beta_2$ 相切於一點 $P_2(\alpha_2, \beta_2)$。

(2)在 $\beta_1 < y < \beta_2$ 時，就有 $(y - \beta_1)(y - \beta_2) < 0$，而有方程式 Γ 之判別式

$D(y) = -A(y - \beta_1)(y - B_2) > 0$（已知 $A > 0$）則方程式 Γ 對於 $\beta_1 < k < \beta_2$ 的每一個 y 值 k 恆有相異二實數解 $x = h_1, h_2$，即 Γ 之圓形與介於二水平直線 $y = \beta_1$ 與 $y = \beta_2$ 之間的水平直線 $y = k$，恆有二交點 (h_1, k)，(h_2, k)。

(3)在 $y < \beta_1$ 或 $y > \beta_2$ 時，就有 $(y - \beta_1)(y - \beta_2) > 0$，而有方程式 Γ 之判別式

$D(y) = -A(y - \beta_1)(y - \beta_2) < 0$

則方程式 Γ 對於一切 $y < \beta_1$ 或 $y > \beta_2$ 的 y 值均無 x 的實數解存在。即 Γ 之圖形在水平直線 $y = \beta_1$ 之下方以及在水平直線 $y = \beta_2$ 之上方均不存在。

綜合(1)，(2)，(3)所論，雖然沒有完全描述出橢圓的特性（在二元二次方程式的圖形中，圓也有以上三項特性。但是我們已假定方程式Γ中的 xy 項係數 $b \neq 0$，故不可能是圓。事實上，在 $b=0$，$a=c \neq 0$，$B^2-4AC>0$ 的情況下，Γ之圖形爲一圓。）然而Γ的圖形必不爲一點也不爲空集合，殆屬無疑。今由 $b^2-4ac<0$，可斷定其必爲一橢圓。

(2) $B^2-4AC=0$ D時，

$$
\begin{aligned}
D(y) &= -(Ay^2+By+C) \\
&= -A\left(y^2+\frac{B}{A}y+\frac{C}{A}\right) \\
&= -A\left(y^2+\frac{B}{A}y+\frac{4AC}{4A^2}\right) \\
&= -A\left(y^2+\frac{B}{A}y+\frac{B^2}{4A^2}\right) \\
&= -A\left(y+\frac{B}{2A}\right)^2
\end{aligned}
$$

(a)在 $y=-B/2A$時，就有方程式Γ之判別式$D(y)=-A(y+B/2A)^2=0$，則方程式Γ恰有一實數解 $x=-(by_0+d)/2a$, 其中 $y_0=-B/2A$。

(b)在 y 爲異於$-B/2A$之任意實數時，就有$D(y)=-A(y+B/2A)^2<0$，到方程式Γ無實數解。

綜合(a)，(b)所論，方程式Γ僅有唯一的一組實數解$(x, y)=(-(by_0+d)/2a, y_0)$，其中 $y_0=-B/2A$故Γ表所之圖形爲一點$(-(by_0+d)/2a, y_0)$而 $y_0=-B/2A$。

(3) $B^2-4AC<0$ 時，對於一切 $y\in R$恆有$Ay^2+By+C>0$（注意：$A>0$。即對於一切 $y\in R$，恆有$D(y)=-(Ay^2+By+C)<0$。於是，對於一切 $y\in R$，方程式Γ中之 x 無實數解。易言之，方程式Γ沒有任何一組實數解(x, y)，故Γ之圖形不存在。

當$af<0$時，必有 $b^2-4af>0$，而有

$$B^2 - 4AC = (2bd - 4ae)^2 - 4(b^2 - 4ac)(d^2 - 4af) > 0$$

（在此式中 $(2bd - 4e)^2 \geq 0$，$b^2 - 4ac < 0$，$d^2 - 4af > 0$）故 Γ 之圖形必爲一橢圓。所以，只要 $b^2 - 4ac < 0$ 且 $af < 0$，就可知 Γ 之圖形必爲一橢圓。

三、第三部份 $b^2 - 4ac > 0$ 時

⊙理論根據⊙

1. 設 Γ：$(a_1x + b_1x + c_1)(a_2x + b_2yc + c_2) = k$

   其中 $a_1b_2 \neq a_2b_1$

   (1)若 $k \neq 0$，則 Γ 之圖形爲一雙曲線，其二漸近線之方程式爲

   L_1：$a_1x + b_1y + c_1 = 0$，L_2：$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

   (2)若 $k = 0$，則 Γ 之圖形爲交於一點的相異兩直線

   L_1：$a_1x + b_1y + c_1 = 0$，L_2：$a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

【證明】

由 $a_1b_2 \neq a_2b_1$，知兩直線 L_1：$a_1x + b_1y + c_1 = 0$，L_2：$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 交於一點。

規定：不等式

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) > 0$$

所表區域稱爲 L_1，L_2 之同號區。

不等式

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) > 0$$

所表區域稱爲 L_1，L_2 之同號區。

不等式

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) < 0$$

所表區域稱爲 L_1，L_2 之異號區。

(1)當 $k \neq 0$ 時，則 $k > 0$ 或 $k < 0$，若 $k > 0$，由

$$\Gamma：(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = k$$

得

$$\Gamma：|a_1x + b_1y + c_1||a_2x + b_2y + c_2| = k$$

且

$$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)>0$$

卽

$$\Gamma:\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\cdot\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

$$=\frac{R}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

且

$$(a_1x+by+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)>0$$

這表示Γ所表圖形在L_1，L_2之同號區上，且Γ上的任一點$P(x,y)$到L_1，L_2上的距離為一定值$k/(\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+a_2^2+b_2^2})$。故$\Gamma$之圖形為在$L_1$，$L_2$，之同號區上的一雙曲線，而其二漸近線為$L_1$，$L_2$同理可證：$k<0$時，$\Gamma$之圖形為在$L_1$，$L_2$之異號區上的一雙曲線，而其二漸近線為$L_1$，$L_2$。

(2)當$k=0$時，就得

$$\Gamma:(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

當然其圖形為交於一點的相異兩線L_1，L_2

2. 由$b^2-4ac>0$，知$\Gamma: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$之圖形為一雙曲線或交於一點的相異兩直線。我們可以先求出Γ的對稱中心，檢查它是否在Γ所表之圖形上。

(1)若此對稱中心不在Γ所表圖形上，則Γ所表圖形為一雙曲線

(2)若此對稱中心在Γ所表圖形上，則Γ所表圖形為交於一點的的相異兩直線。

⊙判別方法⊙

1. 由$b^2-4ac>0$知$ax^2+bxy+cy^2$必可分解為，

$$ax^2+bxy+cy^2=(a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y)$$

且其中$a_1b_2\neq a_2b_1$（否則就有$b_2-4ac=0$）。

於是

$$\Gamma: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

化為

Γ：$(a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y)+dx+ey+f=0$

考慮多項式：$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$

之展開式。

比較二者 x，y 項係數得

$$\begin{cases} a_2c_1+a_1c_2=d \\ b_2c_1+b_1c_2=e \end{cases}$$

因 $a_1b_2\neq a_2b_1$，則此聯立方程式的 c_1，c_2 恰有一解。

〔此時就有 Γ：$(a_1x+b_1y+c_1)(a_{22}x+b_2y+c_2)=(c_1c_2-f)$〕

解出 c_1，c_2 之值以後，就作以下之判別：

(1) $c_1c_2\neq f$ 時，Γ 表一雙曲線，其二漸近線之方程式為

$a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$

(2) $c_1c_2=f$ 時 Γ 表交於一點的相異兩直線其方程式為

$a_1x+b_1y+c_1=0$ $a_2x+b_2y+c_2=0$

2. 若二次項 $ax^2+bxy+cy^2$ 不易分解，(不是不能分解，只是較煩而已)時，可先由聯立方程式

$$\begin{cases} 2ax+by+d=0 \\ bx+2cy+e=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$$

而得 Γ 之對稱中心之坐標 (x_0, y_0)。

(1)如果

$$ax_0^2+bx_0y_0+cy_0^2+dx_0+ey_0+f\neq 0$$

則 Γ 之圖形為一雙曲線。

(2)如果

$$ax_0^2+bx_0y_0+cy_0^2+dx_0+ey_0+f=0$$

則 Γ 之圖形為交於一點的相異兩直線。

⊙例題⊙

試判別 $7x^2-8xy+y^2+14x-8y+15=0$ 之圖形。

【解】由 $4^2-7.1=9>0$（而且9爲完全平方數），化原式爲

$$(7x-y)(x-y)+14x-8y+15=0$$

作多項式 $(7x-y+c_1)(x-y+c_2)$，比較一次項係數，得

$$\begin{cases} c_1+7c_2=14 \\ c_1+c_2=8 \end{cases}，解之得 \begin{cases} c_1=7 \\ c_2=1 \end{cases}$$

由 $c_1c_2=7\times 1\neq 15$，知原式表一雙曲線，其二漸近線之方程式爲：

$$7x-y+7=0，x-y+1=0.$$

評語：1. 對於二元二次方程式圖形的判別有深入的研究，提出一個與傳統上不一樣的判別法。

2. 作者有提出的判別法雖比傳統上的方法簡便，但導出此方法的過程基本上還是和傳統的方法（坐標旋轉）一樣。

3. 作者在教學之餘潛心研究，精神可嘉。