如何求——
「小於n與n互質之自然數的r次方的和」
高中教師組數學科第二名

高雄市高雄中學　　　作者：林文東

一、引　　言

在整數性質中，我們常遇到一個問題：「小於一個自然數 n 而與 n 互質之自然數有幾個？而這些自然數之和是多少？」，前者是有名的 Euler's ϕ-function；後者之求法是大家所熟悉的。本文的目的乃是要推廣後者的問題為「小於一個自然數 n 而與 n 互質之自然數的 r 次方之和為何？」我們知道一個整數的因數分解定理如下：

「設 $n\in N$，$n>1$，則 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_m^{\alpha_m}$

其中 p_1、p_2、p_3、$\cdots p_n$ 為互異之質數，α_1、α_2、α_3、$\cdots$、$\alpha_m\in N$」……………………（1－1）

現在，依據這定理來探討本文的主題．

二、本　　文

設「小於 n 而與 n 互質之一切自然數之 r 次方的和」記為 $\sum_{1\leq x<n}\{x;(x,n)=1\}$。在討論主題之前，我們先提出三個有關的命題：

命題 1：設 $n\in N$，$n>1$，$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_m^{\alpha_m}$ 其中 p_i 為互異之質數，$\alpha_i\in N$，$i=1,2,\cdots m$，則不大於 n 而與 n 不互質之自然數個數為

$$\left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\cdots+\frac{n}{p_m}\right)-\left(\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\cdots+\frac{n}{p_{m-1}p_m}\right)$$

$$+\left(\frac{n}{p_1p_2p_3}+\cdots+\frac{n}{p_{m-2}p_{m-1}p_m}\right)+\cdots+(-1)^{m-1}\left(\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}\right)$$

證明：設不大於 n 之自然數之集合 $M=\{1,2,3,\cdots,n\}$

則M中 p_1 之倍數者有 $[\frac{n}{p_1}]=\frac{n}{p_1}$ 個

p_2 之倍數者有 $[\frac{n}{p_2}]=\frac{n}{p_2}$ 個

…………………

M中 p_1p_2 之倍數者有 $[\frac{n}{p_1p_2}]=\frac{n}{p_1p_2}$ 個

…………………………

M中 $p_1p_2p_3$ 之倍數者有 $[\frac{n}{p_1p_2p_3}]=\frac{n}{p_1p_2p_3}$ 個

…………………………………

令M中 p_i 之倍數之集合爲 A_i（ $i=1$、2、3、…、m），則依據「逐步淘汰原理」我們得下列的結果：

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|=\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}|$$

$$+\sum_{1\leq i_1<i_2\leq i_3\quad n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}|-\cdots$$

$$+(-1)^{m-1}_{m}|A_1\cap A_2\cap\cdots A_m|$$

其中（$i_1,i_2,\cdots,i_m$）爲（1，2，…，m）之一個重排，故不大於 n 而與 n 不互質之自然數個數爲

$$\Sigma\frac{n}{p_1}-\Sigma\frac{n}{p_1p_2}+\Sigma\frac{n}{p_1p_2p_3}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}$$

換言之：小於 n 而與 n 不互質之自然數的個數爲

$$(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\cdots+\frac{n}{p_m})-(\frac{n}{p_1p_2}+\cdots+\frac{n}{p_{m-1}p_m})$$

$$+(\frac{n}{p_1p_2p_3}+\cdots+\frac{n}{p_{m-2}p_{m-1}p_m})-\cdots$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2-1)$$

命題2：設 $n\in N$．則我們已熟悉下列三個公式：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

……………………………………………………

據此，若 $S_n^{(r)}=1^r+2^r+3^r+\cdots+n^r$，則 $S_n^{(r)}$ 之和為何？

（解說）：令 $S_n^{(r)}=A_0n^{r+1}+A_1n^r+A_2n^{r-1}+A_3n^{r-2}+\cdots\cdots+A_rn+A_{r+1}$ ………………（2－2）

其中 A_0，A_1，A_2，…，A_{r+1} 為特定係數

因 $S_{n+1}^{(r)}-S_n^{(r)}$ 得

$$(n+1)^r=A_0\{(n+1)^{r+1}-n^r\}+A_1\{(n+1)^r-n^r\}+A_2\{(n+1)^{r-1}-n^{r-1}\}+A_3\{(n+1)^{r-2}-n^{r-2}\}+\cdots+A_{r-1}\{(n+1)^2\}+A_r \quad \cdots\cdots\cdots(2-3)$$

展開 $(n+1)^{r+1}$，$(n+1)^r$，$(n+1)^{r-1}$，…，再比較（2－3）式兩端之係數得：

n^r 之係數：$1=A_0\,(r+1)C_1\Rightarrow A_0=\dfrac{1}{r+1}$

n^{r-1} 之係數：${}_rC_1=A_0\,{}_{r+1}C_2+A_1\,{}_rC_1\Rightarrow A_1=\dfrac{1}{2}$

n^{r-2} 之係數：${}_rC_2=A_0\,{}_{r+1}C_3+A_1\,{}_rC_2+A_2\,{}_{r-1}C_1$

故 $\dfrac{r(r-1)}{2}=\dfrac{1}{r+1}\cdot\dfrac{(r+1)r(r-1)}{6!}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{r(r-1)}{2}+A_2(r-1)$

即 $1=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+A_2\cdot\dfrac{2}{r}\Rightarrow A_2=\dfrac{r}{12}$

仿此推廣，比較 n^{r-p} 之係數（$p\geq2$）得：

$${}_rC_p=A_0\,{}_{r+1}C_{p+1}+A_1\,{}_rC_p+A_2\,{}_{r-1}C_{p-1}+A_3\,{}_{r-2}C_{p-2}+\cdots+A_4\,{}_{r-3}C_{p-3}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\frac{r!}{(r-p)!\,p!}=A_0\frac{(r+1)!}{(r-p)!\,(p+1)!}+A_1\frac{r!}{(r-p)!\,p!}$$

$$+A_2\frac{(r-1)!}{(r-p)!(p-1)!}+A_3\frac{(r-2)!}{(r-p)!(p-2)!}$$

$$+A_4\frac{(r-3)!}{(r-p)!(r-3)!}+\cdots$$

把A_0與A_1之值代入，而兩端各除以$\frac{r!}{(r-p)!p!}$化簡

得：

$$1=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}+A_2\frac{p}{r}+A_3\frac{p(p-1)}{r(r-1)}+A_4\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}$$

$$+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2-4)$$

同理$S_n^{(r)}-S_{n-1}^{(r)}$得

$$n^r=A_0(n^{r+1}-(n-1)^{r+1}\}+A_1\{n^r-(n-1)^r\}$$

$$+A_2\{n^{r-1}-(n-1)^{r-1}\}+A_3\{n^{r-2}-(n-1)^{r-2}+\cdots$$

$$+A_{r-1}\{n^2-(n-1)^2\}+A_r\cdots\cdots\cdots\cdots(2-5)$$

比較(2－5)式兩端n^{r-p}之係數得

$$0=A_0(-1)^{p+1}\,{}_{r+1}C_{p+1}+A_1(-1)^p\,{}_rC_p$$

$$+A_2(-1)^{p-1}\,{}_{r-1}C_{p-1}+A_3(-1)^{p-2}\,{}_{r-2}C_{p-2}+\cdots$$

$$\therefore 0=\frac{1}{r+1}\cdot\frac{(r+1)!}{(r-p)!(p+1)!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{r!}{(r-p)p!}$$

$$+A_2\frac{(r-1)!}{(r-p)!(p-1)!}-A_3\frac{(r-2)!}{(r-p)!(p-2)!}$$

$$+A_4\frac{(r-3)!}{(r-p)!(p-3)!}$$

即$$0=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}+A_2\frac{p}{r}-A_3\frac{p(p-1)}{r(r-1)}+A_4\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2-6)$$

由(2－4)式加(2－6)式，兩端再除以2，而把右端第一項移至左端得：

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}=A_2\cdot\frac{p}{r}+A_4\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}$$

$$+A_6\cdot\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2-7)$$

由（2－4）式減（2－6）式，兩端再除以2，而把右端第一項移至左端得：

$$0=A_3\frac{p(p-1)}{r(r-1)}+A_5\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{r(r-1)(r-2)(r-3)}$$
$$+A_7\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2-8)$$

令 $p=2,4,6,\cdots$ 則

由（2－8）式得 $A_3, A_5, A_7, \cdots$ 均為0

由（2－7）式得 $A_2=\frac{1}{6}\cdot\frac{r}{2!}$，$A_4=\frac{-1}{30}\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}$

$$A_6=\frac{1}{42}\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{6!}$$
$$,\cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2-9)$$

而由（2－3）式，比較常數項和 $1=A_0+A_1+A_2+\cdots+A_r$

與（2－2）式，令 $n=1$，$1=A_0+A_1+A_2+\cdots+A_r+A_{r+1}$

$\therefore A_{r+1}=0$，即 $S_n^{(r)}$ 之常數項為0

$$故\ S_n^{(r)}=\frac{1}{r+1}n^{r+1}+\frac{1}{2}n^r+\frac{1}{6}\cdot\frac{r}{2!}n^{r-1}$$
$$-\frac{1}{30}\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}$$
$$+\frac{1}{42}\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{6!}n^{r-5}+\cdots$$

令 $B_1=\frac{1}{6}$，$B_3=\frac{1}{30}$，$B_5=\frac{1}{42}$，$B_7=\frac{1}{30}$，$B_p=\frac{5}{66}$，$\cdots$

而 $A_{2k}=B_{2k-1}\cdot\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-2k+2)}{(2k)!}$，$k\in N\cdots\cdots$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2-10)$$

$$則\ S_n^{(r)}=\frac{1}{r+1}n^{r+1}+\frac{1}{2}n^r+B_1\frac{r}{2!}n^{r-1}-B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}$$
$$+B_5\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{6!}n^{r-5}+\cdots$$

（常數項爲0）　　　　　　　　……………（2－11）

〔例如〕：(1) $r=4$，則 $S_n^{(4)}=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+B_1\frac{4}{2!}n^3-$

$$B_3\frac{4\cdot 3\cdot 2}{4!}\cdot n$$

$$=\frac{1}{4}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

(2) $r=5$，則 $S_n^{(5)}=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{2!}n^4-$

$$B_3\frac{5\cdot 4\cdot 3}{4!}n^2$$

$$=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}$$

命題3：設 $n\in N$，$n>1$，$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_m^{\alpha_m}$，各 p_i 爲互異質數，$\alpha_i\in N$，$i=1, 2, \cdots, m$ 則小於 n 而與 n 互質之一切自然數和爲 $\frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_n})$

證明：由命題1，知由1至 n 而與 n 不互質之自然數的個數爲

$$\Sigma\frac{n}{p_1}-\Sigma\frac{n}{p_1p_2}+\Sigma\frac{n}{p_1p_2p_3}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}$$

而這些自然數之和（即1次方之和）爲：

$$T_n^{(1)}=p_1+2p_1+\cdots+\frac{n}{p_1}\cdot p_1+p_2+2p_2+\cdots+\frac{n}{p_2}\cdot p_2$$

…………………………

$$-(p_1p_2)-(2p_1p_2)-\cdots-(\frac{n}{p_1p_2}\cdot p_1p_2)$$

…………………………

$$+(p_1p_2p_3)+(2p_1p_2p_3)+\cdots+(\frac{n}{p_1p_2p_3}\cdot p_1p_2p_3)$$

但 $p_1+2p_1+3p_1+\cdots+\frac{n}{p_1}\cdot p_1$

$$=(1+2+3+\cdots+\frac{n}{p_1})p_1=\frac{(1+\frac{n}{p_1})\frac{n}{p_1}\cdot p_1}{2}=\frac{n^2}{2p_1}+\frac{n}{2}$$

同理 $p_1p_2+2p_1p_2+3p_1p_2+\cdots+\frac{n}{p_1p_2}p_1p_2=\frac{n^2}{2p_1p_2}+\frac{n}{2}$

仿此類推。

$$故\ T_n^{(1)}=\frac{n^2}{2}(\Sigma\frac{1}{p_1}-\Sigma\frac{1}{p_1p_2}+\Sigma\frac{1}{p_1p_2p_3}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1}{p_1p_2\cdots p_m})$$

$$+\frac{n}{2}(m-{}_mC_2+{}_mC_3-\cdots+(-1)^{m-1}{}_mC_m)$$

但 $m-{}_mC_2+{}_mC_3-\cdots+(-1)^{m-1}{}_mC_m=1-(1-1)^m=1$

$$\therefore T_n^{(1)}=\frac{n^2}{2}(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_m}-\frac{1}{p_1p_2}-\cdots-\frac{1}{p_{m-1}p_m}+\frac{1}{p_1p_2p_3}$$

$$+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1}{p_1p_2\cdots p_m})+\frac{n}{2}$$

但 1 至 n 之自然數之和爲 $S_n^{(1)}=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$

故小於 n 而與 n 互質之一切自然數之和爲：

$$\sum_{1\leq x<n}\{x;(x,n)=1\}\ S_n^{(1)}-T_n^{(1)}$$

$$=\frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\cdots+\frac{1}{p_1p_2}+\cdots-\frac{1}{p_1p_2p_3}-\cdots$$

$$+(-1)^m\frac{1}{p_1p_2\cdots p_m})$$

$$=\frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_m})$$

依據上面之命題，我們卽可推證本文的主題如下：

主題：設 $n\in N$，$n>1$，$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_m^{\alpha_m}$，各 p_i 爲互異質數，$\alpha_i\in N$，$i=1,2,\cdots m$，則小於 n 而與 n 互質之自然數 r 次方之和爲

$$\frac{n^{r+1}}{r+1}(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_m})+B_1\frac{r}{2!}n^{r-1}(1-p_1)(1-p_2)\cdots$$

$$(1-p_m)-B_2\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}(1-p_1^3)(1-p_2^3)\cdots(1-p_m^3)+\cdots$$

證明：不小於 n 而與 n 不互質之一切自然數 r 次方之和爲

$$T_n^{(r)}=p_1^r+(2p_1)^r+(3p_1)^r+\cdots+(\frac{n}{p_1}\cdot p_1)^r$$

$$+\cdots\cdots\cdots$$

$$-(p_1p_2)^r-(2p_1p_3)^r-\cdots-(\frac{n}{p_1p_2}p_1p_2)^r$$

$$-\cdots\cdots\cdots$$

$$+(p_1p_2p_3)^r+(2p_1p_2p_3)^r+\cdots(\frac{n}{p_1p_2p_3}\cdot p_1p_2p_3)^r$$

$$+\cdots\cdots\cdots$$

但 $p_1^r+(2p_1)^r+\cdots+(\frac{n}{p_1}p)^r$

$$=(1^r+2^r+\cdots+(\frac{n}{p_1})^r)p^r=p^rS_{\frac{n}{p_1}}$$

同理 $(p_1p_2)^r+(2p_1p_2)^r+\cdots+(\frac{n}{p_1p_2}\cdot p_1p_2)^r$

$$=(1^r+2^r+\cdots+n^r)(p_1p_2)^r=(p_1p_2)^rS_{\frac{n}{p_1p_2}}$$

$\cdots\cdots\cdots$

故 $T_n^{(r)}=p_1^rS_{\frac{n}{p_1}}+p_2^rS_{\frac{n}{p_2}}+\cdots+p_m^rS_{\frac{n}{p_m}}$

$$-(p_1p_2)^rS_{\frac{n}{p_1p_2}}-(p_1p_3)^rS_{\frac{n}{p_1p_3}}-\cdots+(p_{m-1}p_m)^rS_{\frac{n}{p_{m-1}p_m}}$$

$$+(p_1p_2p_3)^rS_{\frac{n}{p_1p_2p_3}}+(p_1p_2p_4)^rS_{\frac{n}{p_1p_2p_3}}+\cdots$$

$$+(p_{m-2}p_{m-1}p_m)S_{\frac{n}{p_{m-2}p_{m-1}p_m}}-\cdots\quad\cdots\cdots(2-12)$$

其中 $S_p=1^r+2^r+3^r+\cdots+p^r$

但 1 至 n 之一切自然數之 r 次方和 $S_n=1^r+2^r+3^r+\cdots+n^r$

故小於 n 而與 n 互質之一切自然數 r 次方之和爲

$$\sum_{1\leq x<n}\{x^r;(x,n)=1\}=S_n^{(r)}-T_n^{(r)}$$

$$=S_n^{(r)}-\{p_1^rS_{\frac{n}{p_1}}+\cdots+p_m^rS_{\frac{n}{p_m}}\}$$

$$+\{(p_1p_2)^rS_{\frac{n}{p_1p_2}}+\cdots+(p_{m-1}p_m)^rS_{\frac{n}{p_{m-1}p_m}}\}$$

$$-\{(p_1p_2p_3)^r S_{\frac{n}{p_1p_2p_3}} + \cdots$$

$$+(p_{m-2}p_{m-1}p_m)^r S_{\frac{n}{p_{m-2}p_{m-1}p_m}}\} + \cdots$$

但由命題2之結論（2－11）式知

$$S_n^{(r)} = \frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{1}{2}n^r + B_1\frac{r}{2!}n^{r-1}$$

$$-B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3} + \cdots + 0n^0$$

$$\therefore x^r S_{\frac{n}{x}}^{(r)} = \frac{n^{r+1}}{r+1}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}n^r + B_1\cdot\frac{r}{2!}n^{r-1}x$$

$$-B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}\cdot x^3 + \cdots$$

$$+0n^0x^r \cdots (2-13)$$

（其中 $x = p_1, p_2, \cdots, p_m$）

由（2－11），（2－12），（2－13）三式我們可得

$$\sum_{1\leq x<n}\{x^r ; (x, n) = 1\} = S_n^{(r)} - T_n^{(r)}$$

$$= \{\frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{1}{2}n^r + B_1\frac{r}{2!}n^{r-1} - B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3} + \cdots\}$$

$$-\{[p_1^r S_{\frac{n}{p_1}} + \cdots + p_m^r S_{\frac{n}{p_m}}] - [(p_1p_2)^r S_{\frac{n}{p_1p_2}} + \cdots$$

$$+(p_{m-1}p_m)^r S_{\frac{n}{p_{m-1}p_m}}] + [\cdots] - \cdots\}$$

$$= \{\frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{1}{2}n^r + B_1\frac{1}{2!}n^{r-1} - B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3} + \cdots\}$$

$$-\{[(\frac{n^{r+1}}{r+1}\cdot\frac{1}{p_1} + \frac{1}{2}n^r + B\cdot\frac{r}{2!}n^{r-1}p_1$$

$$-B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}\cdot p_1^3 + \cdots)$$

$$+(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

$$+(\frac{n^{r+1}}{r+1}\cdot\frac{1}{p_m} + \frac{1}{2}n^r + B\cdot\frac{r}{2!}n^{r-1}p_m$$

$$-B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}\cdot p_m^3 + \cdots)] - [(\frac{n^{r+1}}{r+1}\cdot\frac{1}{p_1p_2}$$

$$+\frac{1}{2}n^r+B\cdot\frac{r}{2!}n^{r-1}p_1p_2-B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}p_1^3p_2^3+\cdots)$$

$$+(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

$$+(\frac{n^{r+1}}{r+1}\cdot\frac{1}{p_{m-1}p_m}+\frac{1}{2}n^r+B\frac{r}{2!}n^{r-1}p_{m-1}p_m$$

$$-B_3\frac{r(r-1)r-2)}{4!}n^{r-3}p_{m-1}^3p_m^3+\cdots)]$$

$$+[\cdots\cdots]\}$$

$$=\frac{n^{r+1}}{r+1}\{1-(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m})+(\frac{1}{p_1p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{m-1}p_m})-\cdots\}$$

$$+\frac{1}{2}n^r\ \{1-m+{}_mC_m-\cdots+(-1)^m{}_mC_m\}$$

$$+B_1\frac{r}{2!}\cdot n^{r-1}\ \{1-(p_1+\cdots+p_m)+(p_1p_2+\cdots+p_{m-1}p_m)-\cdots\}$$

$$-B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}\ \{1-(p_1+\cdots+p_m)+(p_1^3p_2^3+\cdots+p_{m-1}^3p_m^3)$$

$$\cdots\}\ +\cdots\cdots+0n^0$$

但 $1-m-{}_mC_2-\cdots-(-1)_mC_m=(1-1)^m=0$

（其中 m 表 n 之質因數個數）

故 $\sum\limits_{1\leq x<n}\{x^r;(x,n)=1\}$

$$=\frac{n^{r+1}}{r+1}(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_m})$$

$$+B_1\frac{r}{2!}n^{r-1}(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_m)$$

$$-B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}(1-p_1^3)(1-p_2^3)\cdots(1-p_m^3)$$

$$+B_5\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{6!}n^{r-5}(1-p_1^5)(1-p_2^5)\cdots$$

$(1-p_m^5)+\cdots$ （其中常數項爲 0 ）

其中 $B_1=\frac{1}{6}, B_3=\frac{1}{30}, B_5=\frac{1}{42}, B_7=\frac{1}{30}, B_9=\frac{5}{66}, \cdots$

$$B_{2k-1}=A_{2k}\cdot\frac{(2k)!}{r(r-1)(r-2)\cdots(r-2k+2)}$$，而 A_{2k} 可由

（2－8）式求得。

例如：(1)若 $r=2$，

則 $$\sum_{1\leq x<n}\{x^2;(x,n)=1\}=\frac{n^3}{3}(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_m})$$
$$+\frac{n}{6}(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_m)$$

(2)若 $r=3$，

則 $$\sum_{1\leq x<n}\{x^3;(x,n)=1\}$$
$$=\frac{n^4}{4}(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_m})+\frac{n^2}{4}(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_m)$$

(3)若 $r=4$

則 $$\sum_{1\leq x<n}\{x^4;(x,n)=1\}$$
$$=\frac{n^5}{5}(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_m})$$
$$+\frac{n^3}{3}(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_m)$$
$$-\frac{n}{30}(1-p_1^3)(1-p_2^3)\cdots(1-p_m^3)$$

實例：設 $n=12$，則 $n=2^2\cdot 3$，而小於 12 且與 12 互質之自然數集合為 $\{1,5,7,11\}$

①小於 12 而與 12 互質之自然數的和為

$$\sum_{1\leq x\leq 12}\{x;(x,12)=1\}=\frac{12^2}{2}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})=24$$

②小於 12 而與 12 互質之自然數的平方和為

$$\sum_{1\leq x\leq 12}\{x^2;(x,12)=1\}=\frac{12^3}{3}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})+\frac{12}{6}(1-2)(1-3)$$
$$=196$$

③小於 12 而與 12 互質之自然數的立方和為

$$\sum_{1\leq x\leq 12}\{x^3;(x,12)=1\}$$

$$=\frac{12^4}{4}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})+\frac{12^2}{4}(1-2)(1-3)=1800$$

三、結　　論

綜合上面所論，我們已經得到一個求「小於 n 而與 n 互質之自然數的 r 次方之和」的逐推公式：

$$\sum_{1\leqq x<n}\{x^r;(x,n)=1\}=\frac{n^{r+1}}{r+1}(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_m})$$

$$+B_1\cdot\frac{r}{2!}\cdot n^{r-1}(1-p_1)\cdots(1-p_m)$$

$$-B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}(1-p_1^3)\cdots$$

$$(1-p_m^3)+\cdots$$ （其中 n^0 之係數為 0）

其中 $B_{2k-1}=A_{2k}\cdot\frac{(2k)!}{r(r-1)\cdots(r-2k+2)}$，而 A_{2k} 由下式

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}=A_2\cdot\frac{p}{r}+A_4\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}$$

$$+A_6\cdot\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}+\cdots$$

令 $p=2，4，6，\cdots$ 逐次代入，求得 $A_2，A_4，A_6，\cdots$。

評語：1. 在數論的領域中，有關互質的問題有深入的研究，改進前人的方法解決本問題。

2. 本研究組織嚴密，條理井然，結論亦甚完整。

3. 作者在教學之餘潛心研究，精神可嘉。