

# 實驗驗證白努利方程式

## 高中教師組物理科第一名

台灣省立嘉義高中

作者：李文堂

一 目的：設計製作器材驗證白努利方程式。

### 二、研究動機

1. 白努利方程式 ( Bernoulli's equation ) 為 1738 年 Daniel Bernoulli 所導出的公式，用來說明流動流體壓力和流速的關係，在流體力學上是很重要的基本公式。普通物理實驗的驗證裝置因穩定性很難控制，且不能隨意改變壓力和流速，實驗結果不甚理想。

2. 作者於六十八年，第十九屆科展時，曾提出本實驗器材參展，由於流體出口處曲線不夠平滑、均勻，在高壓下實驗結果較不理想，未獲獎。經評審先生指導，及作者三年來不斷研究改進，於本屆再提出，敬請指正。

### 三、原 理

1. 白努利方程式： $P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz = \text{常數}$ 或

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gz_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gz_2, \text{ 其中 } P : \text{ 壓}$$

力  $v$  : 流速、 $g$  : 重力和速度、 $\rho$  : 流體密度、 $z$  : 高度

2. 連續方程式 ( equation of continuity ) :  $Q = A_1 v_1 =$

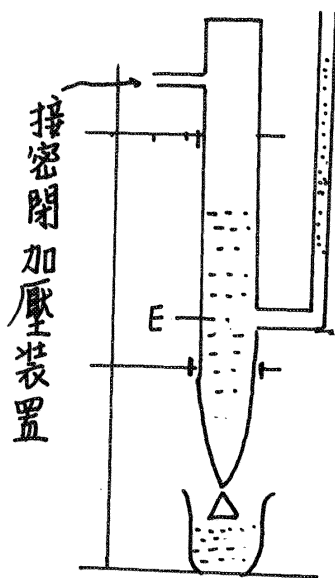
$$A_2 v_2 = \frac{V}{t}. A_1, A_2 : \text{ 容器截面積, } v_1, v_2 : \text{ 流速, } Q \text{ 爲}$$

單位時間 (  $t$  ) 流體流的體積 (  $V$  ) 。

3. 流體在較大的壓力 (  $P_1$  ) 下，截面積  $A_1$  較大，流速  $v_1$  較慢，在出口處壓力小 (  $P_2 = \text{大氣壓力}$  ) ，截面積小，流速快 (  $v_2$  大 ) 。

4. 液體在如右圖中的管中的流動時，在 E 點處截面積  $A_1$ ，流速  $v_1$ ，壓力  $P_1$  ( $=\rho g \Delta h + \text{大氣壓力 } P_0$ )，從很狹窄的 F 處流出時，截面積  $A_2$ ，流速  $v_2$ ，壓力  $P_2$  ( $=\text{大氣壓力 } P_0$ ) 又  $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$  且  $A_2 \ll A_1$ ， $\therefore v_1 \approx 0$ ，而  $v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{V}{A_2 t}$ ，所以測量  $V$ ，(液體在時間  $t$  內流入燒杯中的體積)， $t$ 、 $A_2$ ，即可求得  $v_2$ 。

接  
密  
閉  
加  
壓  
裝  
置



5. 液體入口前將其加壓改變其流入量可改變  $P_1$  得到不同的流速  $v_2$ ，利用開管壓力計求出  $P_1$ ，用碼錶量筒求出  $v_2$ ，代入方程式左右兩側，加以驗證，並比較其結果。

#### 四、器材製作

1. 透明壓克力管長 1 公尺，內徑 5 cm，外徑 6 cm 的上端以 3 mm 厚的壓克板密封，下端利用車床加工成可以旋接的螺紋。
2. 壓克力管距上端 20 cm 處鑽一小孔，黏接一橡皮管，做液體流入口，距下端 5 cm 處鑽一小孔，黏接一透明塑膠管 (內徑 4 mm) 做開管壓力計 (旁邊放米尺)。
3. 直徑 7 cm，長 20 cm 的實心壓克力柱五段，以車床加工成漏斗形，上方製造螺紋以便和壓克力管旋接。車床加工後，以極細的砂

紙塗牙膏將其打亮。管和漏斗形接合面墊著橡皮以防止加壓時漏水。五段各以不同的鑽子鑽不同的小孔。

4. 加壓桶製作：取 4 加侖裝的空油桶一個，在蓋子銲接一個打氣活門，一個壓力計，一個液體流出口，成為加壓裝置。液體流出口連接一條醫院打點滴用的塑膠管，可利用它控制液體的流入量。

## 五、操作方法

1. 將整套測量器材架立起來，如圖一所示。

2. 在加壓裝置內放入待測液，將桶蓋轉緊，然後以打氣筒充氣（不要超過計示壓力  $0.5 \text{ kgw/cm}^2$  以免鐵桶承受不了）。

3. 調整控制水流轉扭至壓力管的水位維持在  $\Delta h$  處，控制轉扭使  $\Delta h$  儘量固定。

4. 當  $\Delta h$  維持一定時，在管的下方放入一燒杯，同時按下計時器，測量在時間  $t$  秒內流徑  $r_2$  的液體體積  $V$ 。

5. 記錄  $\Delta h$ ， $V$ ， $t$ ，求出  $v_2$ ，再代入方程式比較方程式兩側的結果。

6. 所用的小孔（ $r_2$ ）半徑不同（有五種不同規格）即  $A_2$  不同實驗時，所加壓力不同，每種規格不同的小孔，分別加以 8 個不同的壓力做實驗。

7. 除了用水做實驗外，在加壓裝置中放酒精或汽油等等也可做實驗。（探討黏滯係數對實驗結果的影響或求黏滯係數）。

## 六、結果和數據

1. 實驗的數據附錄於文末。

2. 孔徑  $r_2$  愈大者，穩定性愈難控制，誤差愈大。

3. 壓力愈大時，流出量愈大，穩定性愈差。

4. 以酒精（黏滯係數較大）做實驗，誤差並無顯著增加。

5. 出口處長度愈大，阻力愈大，黏帶的影響就要考慮，長度超過 10 公分時，可用來測液體的黏滯係數。

## 七、討 論

1. 白努利方程式是假設流體在沒有黏滯力、穩定、不可壓縮，流線均勻的情況下導出來的。本實驗出水孔很小，且用很精密的調節水流裝置控制流量，因此，十分穩定。待測液為水和酒精，在外加壓力不大（最大為大氣壓力 + 90 cm - H<sub>2</sub>O）的情況下，液體沒有被壓縮。經由漏斗形流出，流線亦十分均勻。因此，實驗的誤差來源，除了人為因素外，主要就是黏滯力。

2. 黏滯力（ $R$ ）和流出口的半徑（ $r_2$ ）的四次方成反比，和流出口的長度（ $l$ ），及黏滯係數（ $\mu$ ）成正比， $R = \frac{8l\mu}{\pi r_2^4}$  實驗器材的器材的孔徑很小以便於控制穩定， $l$  亦做得相當小（以砂鑽從底部磨至  $l$  小於 1 mm），因此黏滯力減至影響很小。所以酒精的黏滯係數較大，但所造成的誤差並未增加。

3. 第十九屆科展，作者未注意克服流線均勻的因素，以致於在高壓下，誤差較大，本屆展出作品，以漏斗形讓液體流出，流線非常平滑，結果亦改善很多。

4. 普通物理實驗  $r_2$  若做得較大，不容易控制穩定。

5.  $r_2$  測量時要非常注意，高工機工科設備測孔徑的誤差都小於 ± 0.005 mm，利用套量法，可以測得很準確。

6. 本實驗時間用附有碼錶的電子錶測量，有效數字大於三位，體積用量筒測，因流入時間都超過 2 分鐘亦有三位有效數字， $\Delta h$  以米尺測亦三位有效，所以取三位有效數字。

7. 控制液體流入的調節器係利用醫院打滴點注射用的調節器，非常精密好用。

8. 加壓裝置以腳踏車打氣筒加壓，但勿超過 0.5 kgw / cm<sup>2</sup>，以防止鐵桶承受不了。

9. 流出口  $l$  在 10 公分右可用來測液體的黏滯係數，是最近發現的額外收獲。一般用來測黏滯係數的裝置都在常壓下測量，以本裝置，在漏斗型下端接 10 公分左右細管可探討壓力對黏滯的影響。

10. 本器材用壓克力製造，一方面不易破碎，且便於加工，可用螺紋銜接不同孔徑的漏斗形流出口。

**八、應用：**利用本器材，下方接細管子可測黏滯係數。

### 九、參考資料

1. Analytical experimental physics-Harvey Brace Lemon.
2. General physics-Blackwood. Kelly. Bell.
3. physics-Erich Hausmann.
4. Element of physics-Robert F. Kingsbury.
5. physics-David Halliday.
6. College physics-Robert. L. Weber.
7. Physics-George Gamow.
8. Modern Physical Science-George R. Tracy.
9. The Mainstream of physics-Beiser.
10. physics-William H. Michener.
11. University physics-George D. Freier.
12. Introduction to theoretical physics-John C. Slater.
13. Theoretical physics-F. Woodbridge Constant.
14. Lecture on physics II-Feynman.
15. Experiments in physics- 王寶乾選譯。
16. The physics Teacher. Vol 15, No.2.
17. Hydraulics-Horace W. King.
18. Fluid Dynamics-Richard H.F. Pao.

評語：對於往實驗能繼續研究修正，研究精神可嘉。

實驗設計考慮周到，對物理量有好的控制，數據可靠，結果明顯。數據中誤差定義不對，需加以說明及討論。