多邊形面積平分研究
高中組數學科第三名

省立嘉義高中

作者：陳鴻鑫、陳思遠

指導教師：郭茂雄

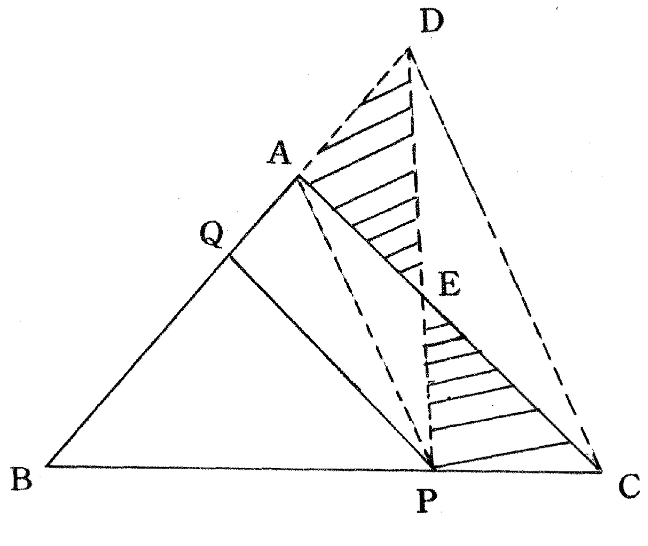
一、研究動機

一線段可以平分，即這線的中點；一角可以平分，即這角的平分線，這都是基本作圖。我們隨即想到一個三邊形、四邊形、五邊形，甚至可推廣到 n 多邊形也應可以平分，也就是作一直線，把面積二等分。以下就是我們粗淺的討論過程。

二、本　　文

1. 通過三邊形上一點，作一直線平分此三邊形的面積

(1)一位同學首先提出他的作品如下：



圖一

〔已知〕△ABC，P為BC邊上任意一點

〔求作〕過P作一直線平分△ABC的面積

〔作法〕：

a、連接$\overline{AP}$，過C作$\overline{AP}$的平行線交$\overline{BA}$於D

b、作出$\overline{BD}$的中點Q

c、連接$\overline{PQ}$，即為所求（如圖一）

〔證明〕：

a、$\because \overline{AP} \parallel \overline{CD}$ $\therefore$ a△AED＝a△PEC　a△ABC ＝a△PBD

b、Q為$\overline{BD}$中點$\therefore$ a△PBQ＝a△PDQ

即 a△PBQ$=\frac{1}{2}$a△PBD$=\frac{1}{2}$a△ABC

$\therefore$ a△PBQ＝a▱PCAQ故$\overline{PQ}$平分a△ABC的面積

(2)同學發現以下毛病，若P較靠近B點，Q不在$\overline{AB}$上而在$\overline{AD}$上，$\overline{PQ}$即無法平分△ABC的面積。（如圖二）

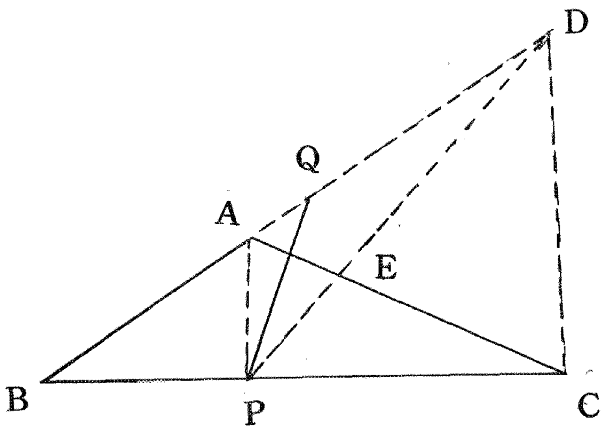


圖　二

(3)另一位同學提出另一種解法如下：

〔作法〕：

a、P為頂點，設P＝B，則求作$\overline{AC}$中點Q連接$\overline{PQ}$即為所求

b、P不為頂點時

(a)求作$\overline{BC}$中點M

(b)連接$\overline{AM}$，$\overline{AP}$，再過M作AP之平行線交$\overline{AC}$（或$\overline{AB}$）於Q

(c)連接$\overline{PQ}$即爲所求（如圖三）

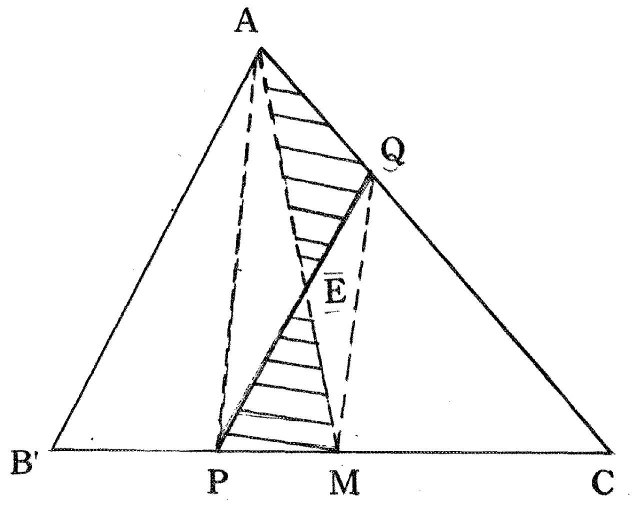


圖 三

〔證明〕：

a、M爲中點∴ a△ABM= a△AMC=$\frac{1}{2}$a△ABC

b、$\overline{AP}$∥$\overline{MQ}$∴ a△AEQ= a PEM

c、①，②得知 a□ABPQ= a△PQC=$\frac{1}{2}$a△ABC

故$\overline{PQ}$平分△ABC的面積

2.通過四邊形邊上一點，作一直線平分此四邊形面積

我們把它改述爲「過▱ABCD邊上一點P作一直線平分此▱ABCD面積」

(1)仿三邊形時作法

(2)我們先考慮P爲頂點之一時

〔已知〕▱ABCD，P=C或P=A

〔求作〕過P點，作一直線平分此▱ABCD的面積

〔作法〕

a、連接對角線$\overline{AC}$，$\overline{BD}$

b、求出$\overline{BD}$中點M，連接$\overline{AM}$，$\overline{CM}$過M作$\overline{AC}$之平行線分別交$\overline{BC}$（或$\overline{CD}$）於E，交$\overline{AB}$（或$\overline{AD}$）於F

c、連接$\overline{AE}$，$\overline{AE}$即平分▱ABCD的面積，連接$\overline{CF}$，$\overline{CF}$也平分▱ABCD的面積（如圖四）

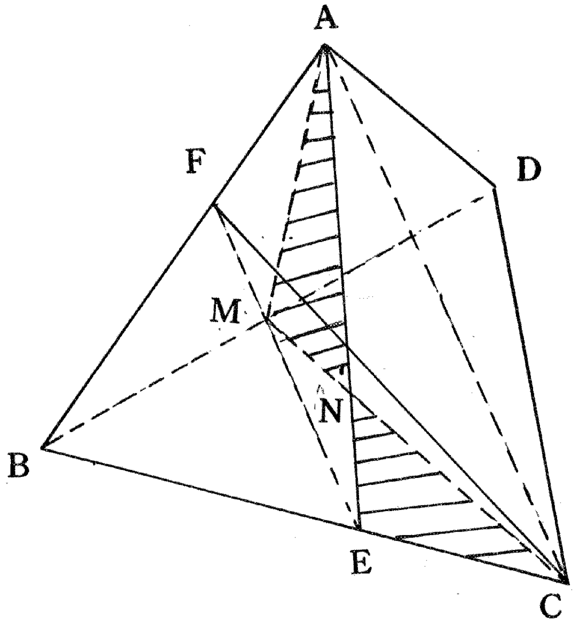


圖　四

〔證明〕：

a、∵M為$\overline{BD}$中點

∴a△CDM＝a△CBM，a△ADM＝a△ABM

$\therefore a▱AMCD = a\triangle ABM + a\triangle CBM = \frac{1}{2}▱ABCD$

b、$\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ ∴a△AMN＝a△CEN

$\therefore a□AECD = a\triangle ABE = \frac{1}{2} a▱ABCD$

c、故$\overline{AE}$平分▱ABCD的面積

d、同理可證$\overline{CF}$平分▱ABCD面積

※以上已知條件改為$P=B$或$P=D$，平分線亦可同理求作得出。（如圖五）

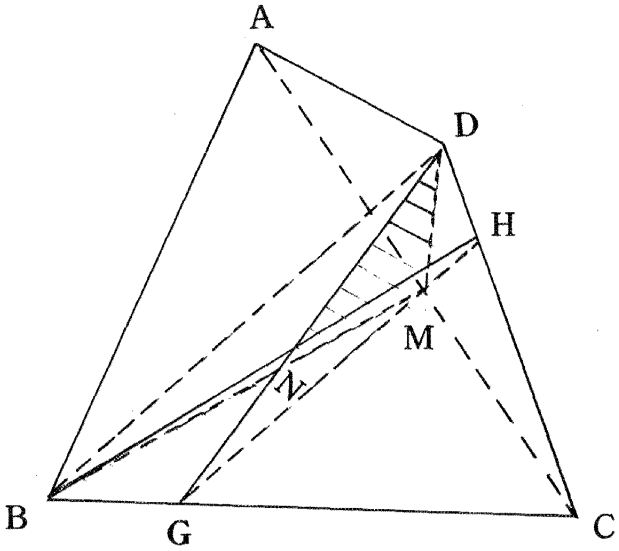


圖　五

(3) P不為頂點時，設P在$\overline{BC}$上

〔已知〕□ABCD，P在BC上

〔求作〕過P點作一直線平分□ABCD面積

〔作法〕：

a、作過A作$\overline{AE}$平分□ABCD面積，E在BC上（如作法(1)）

b、連接$\overline{AP}$，過E作$\overline{AP}$之平行線交$\overline{AD}$（或$\overline{AB}$）於Q

c、連接$\overline{PQ}$即為所求。（如圖六）

〔證明〕

a、$\overline{AE}$平分▱ABCD

$\therefore a\triangle ABE = a▱AECD = \frac{1}{2}a▱ABCD$

b、$\overline{AP} /\!/ \overline{EQ}$ $\therefore a\triangle AMQ = a\triangle PEM$

c、∴a□ABPQ=a▱PQCD=$\frac{1}{2}$a▱ABCD

d、故$\overline{PQ}$平分▱ABCD面積

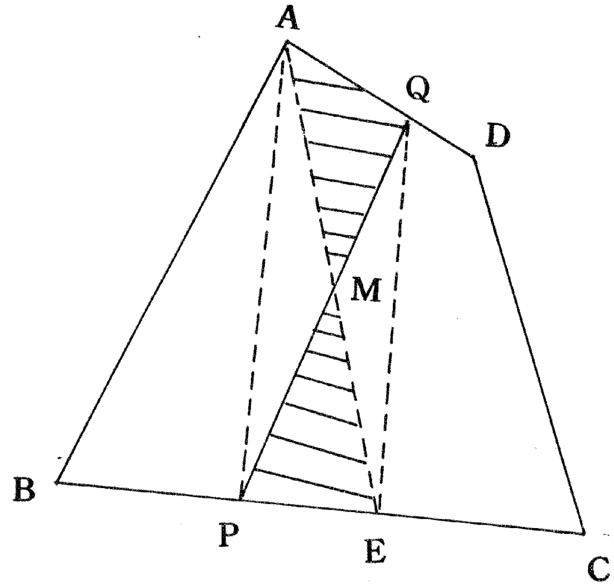


圖　六

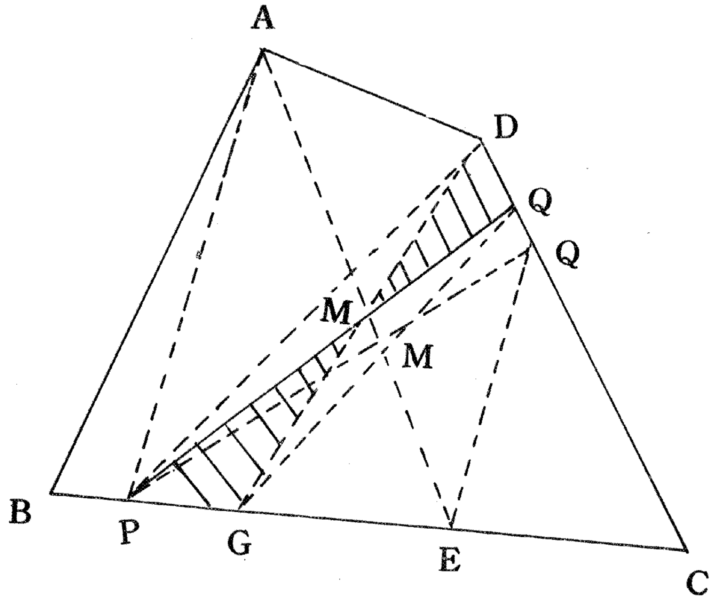


圖　七

討論 1.

上述作法中，(2)之步驟b，若P的位置改變，使過E作$\overline{AP}$之平行線與$\overline{AB}$和$\overline{AD}$均不相交，而交於$\overline{CD}$，即使a▱AMDQ≠a△PME則$\overline{PQ}$即不能平分▱ABCD的面積

〔作法〕

改作$\overline{DG}$，連接$\overline{DP}$，作G平行$\overline{DP}$之直線交$\overline{CD}$於Q′，連接$\overline{PQ'}$，$\overline{PQ'}$即爲所求。（如圖七）

討論 2.

如果此四邊形過A所作$\overline{AE}$平分▱ABCD，過D所作$\overline{DG}$平分▱ABCD面積，而E，G兩點均不在$\overline{BC}$邊上。則無法利用$\overline{AE}$，$\overline{DG}$作過P點一直線平分此▱ABCD

〔作法〕

過B（或C）作$\overline{BH}$平分▱ABCD連接$\overline{PH}$，過B作平行$\overline{PH}$之直線交$\overline{AD}$於Q，$\overline{PQ}$即爲所求。（如圖八）

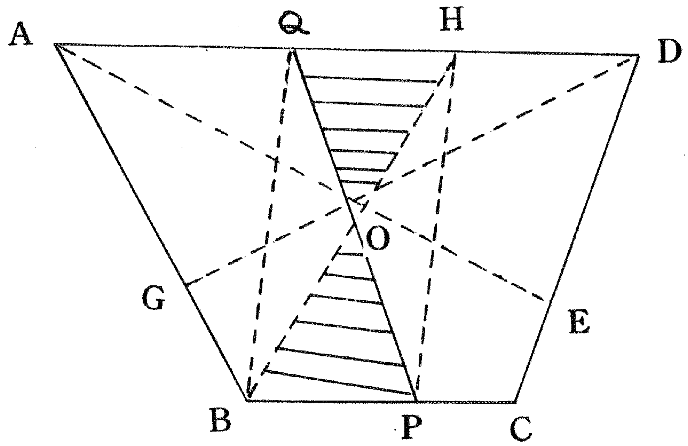


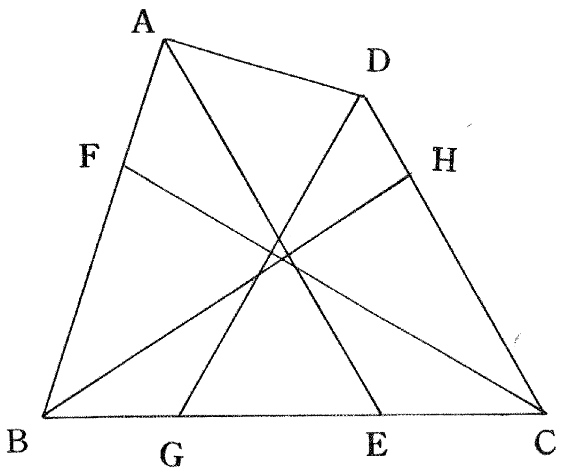
圖 八

討論 3.

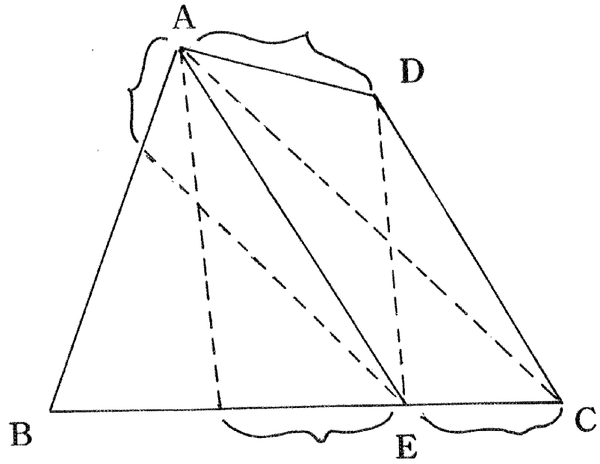
同學提出上述作法(1)，作法(2)及討論 1、討論 2，又對其某些情形加以研究，是否P爲$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{AD}$邊上任一點，都能利用已知的$\overline{AE}$，$\overline{CF}$，$\overline{BH}$，$\overline{DG}$平分線，作過P點一直線平分▱A

BCD的面積。同學從討論1.、討論2.上發現若以$\overline{AE}$平分線爲對角線，以A用兩鄰邊所作的二不同最大梯形，若P爲此二梯形腰上任意一點，則能利用$\overline{AE}$平分線，作出過P點一直線平分▱ABCD的面積。

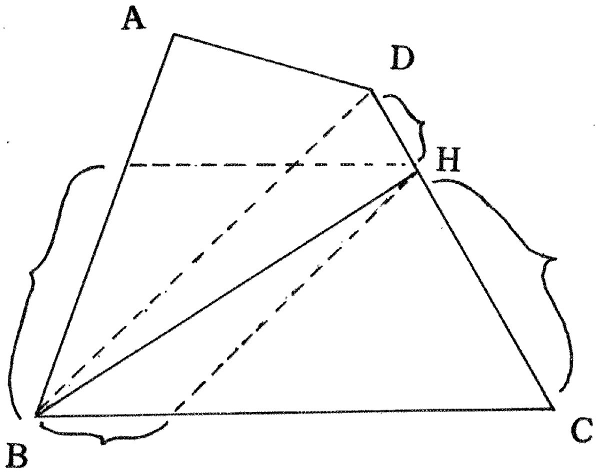
而四邊形的四邊卽爲$\overline{AE}$，$\overline{CF}$，$\overline{BH}$，$\overline{DG}$爲對角線所作的梯形的腰的聯集，就是說不管P爲邊上的任意點都能利用$\overline{AE}$，$\overline{CF}$，$\overline{BH}$，$\overline{DG}$作過P點的一直線平分▱ABCD的面積。（參閱圖本一）



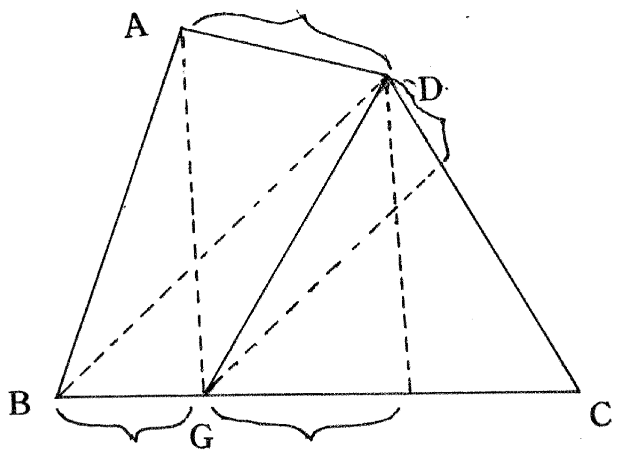
（過各頂平分　□ABCD面積的直線）



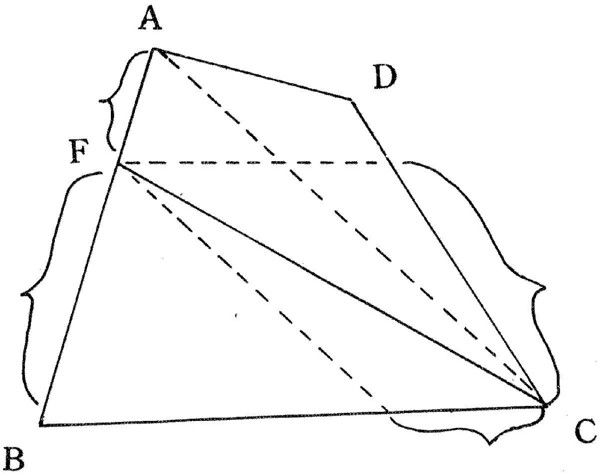
（能利用$\overline{AE}$平分線，作平分□ABCD面積的直線，P點的範圍）



（能利用BH平分線，作平分口ABCD面積的直線，P點的範圍）



（能利用$\overline{DG}$平分線，作平分口ABCD面積的直線，P點的範圍）



（能利用$\overline{CF}$平分線，作平分口ABCD面積的直線，P點的範圍）

3. 通過五邊形上一點，作一直線平分此

五邊形的面積，即「過⬠ABCDE，過邊一點P作一直線平分⬠ABCDE由三邊形、四邊形作法，我們隨即考慮到五邊形，同理也應可平分該面積。

(1)先考慮P爲頂點之一時，設P＝A

〔已知〕⬠ABCDE，P＝A

〔求作〕過P點，作一直線平分此⬠ABCDE的面積。

〔作法〕

a、連接$\overline{BE}$，求$\overline{BE}$中點M，連接$\overline{AM}$

b、過M作$\overline{MN}$平分□BCDE（如2.之作法）

c、連接$\overline{AN}$，過M作$\overline{AN}$平行線，交$\overline{CD}$於K

d、連接$\overline{AK}$，即爲所求（如圖九）

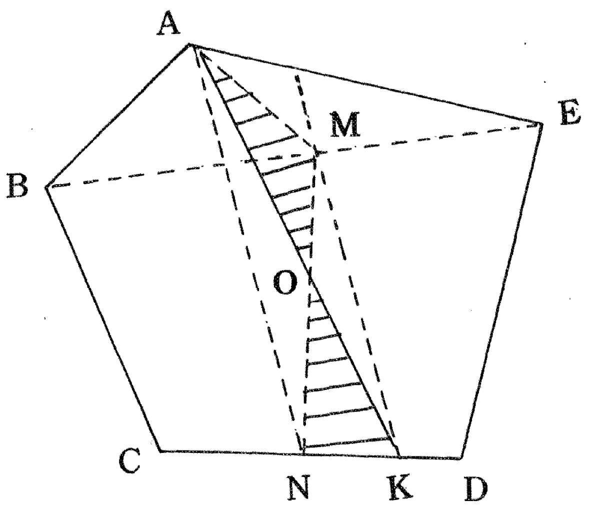


圖　九

〔證明〕

a、M爲中點，a△ABM＝a△AME，a□BCMN＝a□MNDE

∴ a△ABM＋a□BCMN＝a△AME＋a□MNDE

b、$\overline{MK}$ ∥ $\overline{AN}$，∴ a△AOM＝a△NOK c、由①—②得 a□ABCK＝a□AKDE＝$\frac{1}{2}$ a⬠ABCDE

d、故$\overline{AK}$平分⬠ABCDE的面積

討論4.

上述如果K，N不在同一邊$\overline{CD}$上則 a△AOM≠ a□ONDK，$\overline{AK}$即無法平分⬠ABCDE的面積。（如圖十）

〔作法〕

先作過A的鄰B（或E）的平分線$\overline{BH}$，再連接$\overline{AH}$，過B作$\overline{AH}$的平行線，交$\overline{DE}$於K′，$\overline{AK}$′即爲所求。（如圖十一）

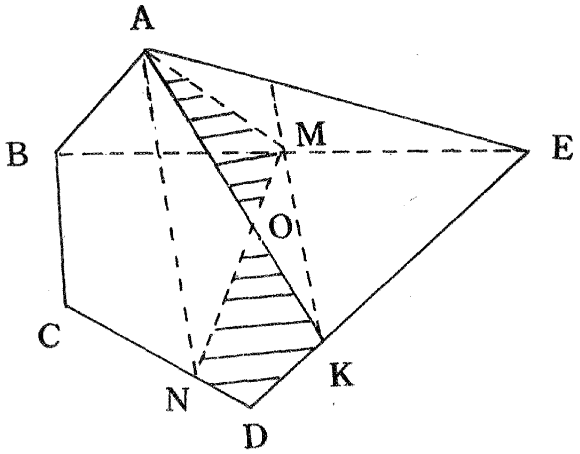


圖 十

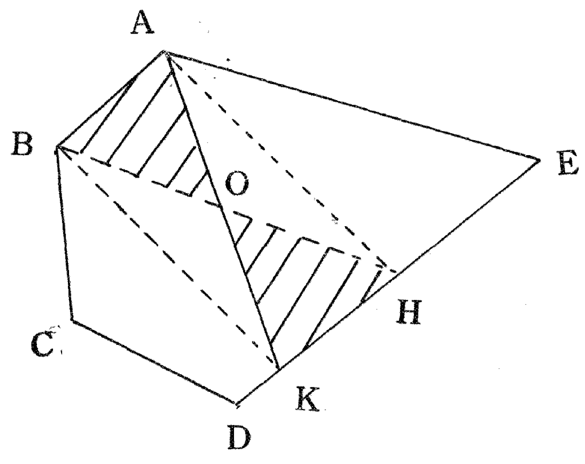


圖 十一

(2) P不爲頂點時，設P在$\overline{CD}$上

〔作法〕

a、過$\overline{CD}$的頂點A作$\overline{AK}$平分線K在$\overline{CD}$上，（作法如i）

b、連接$\overline{AP}$，過K作$\overline{AP}$之平行線交$\overline{AE}$（或$\overline{AB}$）於Q

c、連接PQ即爲所求。（如圖十二）

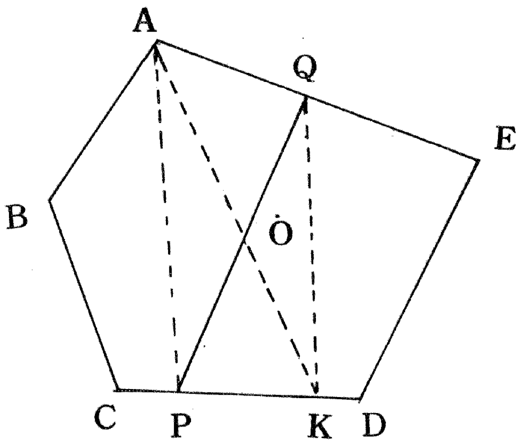


圖 十二

〔證明〕

a、AK平分⬠ABCDE的面積

∴ a □ABCK＝a □AKDE

b、$\overline{AP}$∥$\overline{KQ}$ ∴ a △AOQ＝a △POK

c、∴⬠ABCPQ＝a □PQDE

故$\overline{PQ}$平分⬠ABCDE的面積

討論 5.

上述作法中，如K不在$\overline{CD}$上，則改過C（或D）作$\overline{CL}$平分⬠ABCDE，連接$\overline{LP}$，過C作$\overline{LP}$之平行線交$\overline{AB}$於Q連接$\overline{PQ}$，$\overline{PQ}$即爲所求。（如圖十三）

討論 6.

上述(2) b 作法，若Q均不落在$\overline{AB}$，$\overline{AE}$，則 a □AOQE ≠ a △POK，即PQ不能平分⬠ABCDE的面積

〔作法〕

改作過A的鄰點E（或B）的平分線$\overline{EF}$，連接$\overline{EP}$，作過F平行$\overline{EP}$之直線，交$\overline{DE}$於Q′，$\overline{PQ'}$即爲所求。（如圖十四）

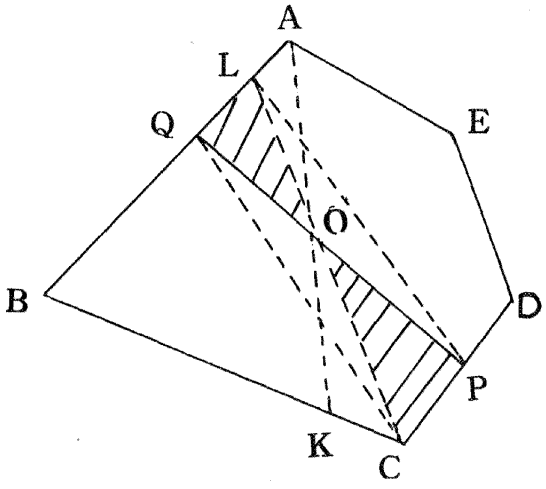


圖　十三

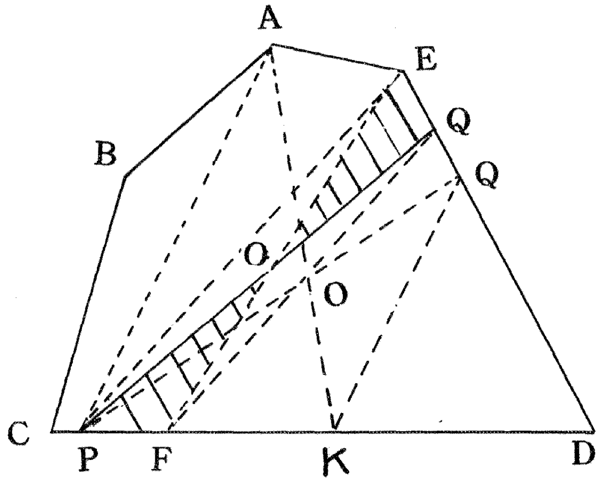
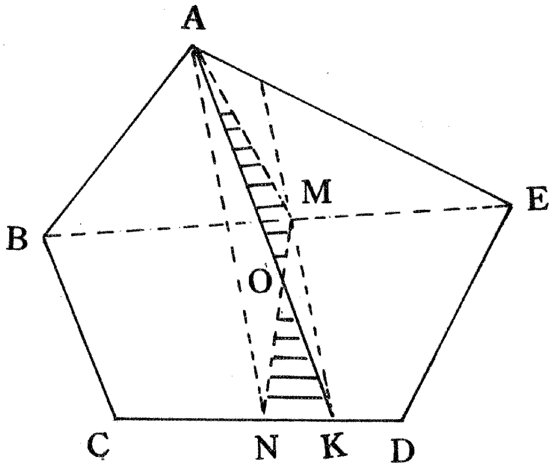


圖　十四

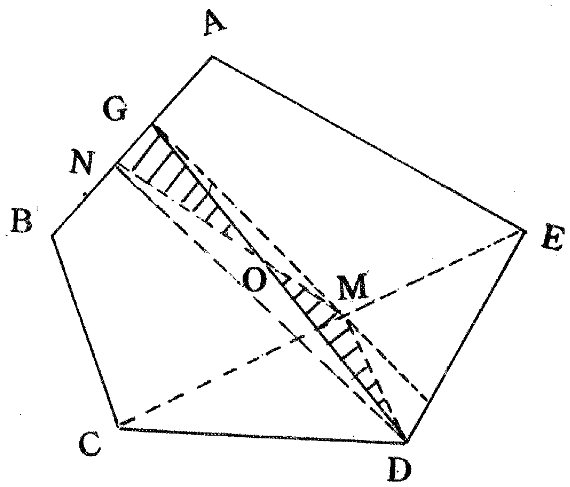
討論 7.

上述作法，討論雖對P的位置加以討論，但對任意邊上的一點P是否能作出過P點平分⬠ABCDE的面積之直線，尚未詳盡加以討論。此討論 7. 仿討論 3. 加以討論。而⬠ABCDE之五邊即爲以$\overline{AK}$，$\overline{BH}$，$\overline{CL}$，$\overline{DG}$，$\overline{EF}$爲對角線的各梯形的腰的聯集，那就是過

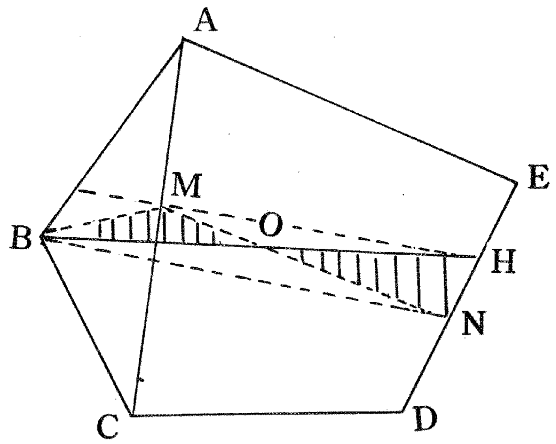
邊上的任一點P，都能作一直線平分此⬠ABCDE的面積。（參閱圖本二）



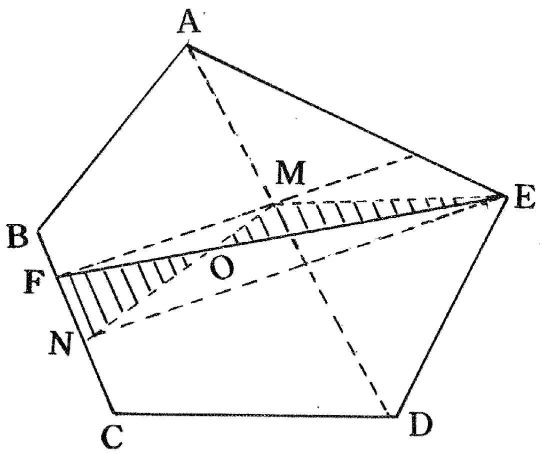
（過A點直線$\overline{AK}$平分⬠ABCDE的面積）



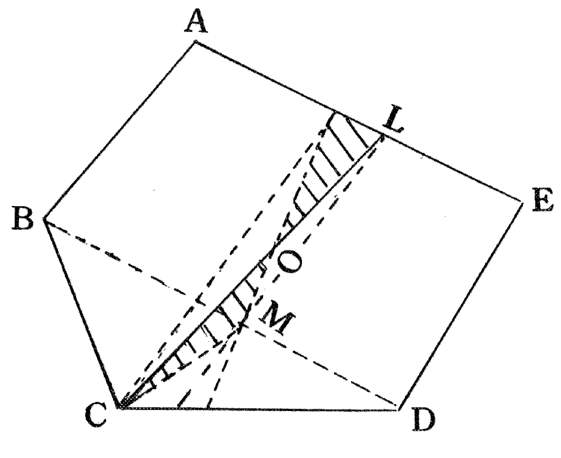
（過D點作直線$\overline{DG}$平分⬠ABCDE的面積）



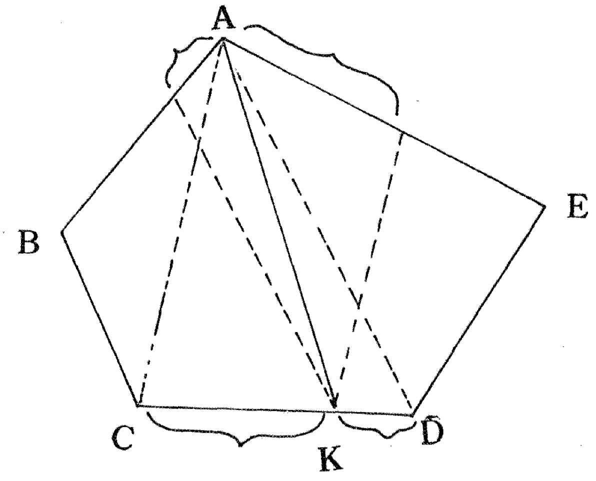
（過B點作直線$\overline{BH}$平分⬠ABCDE的面積）



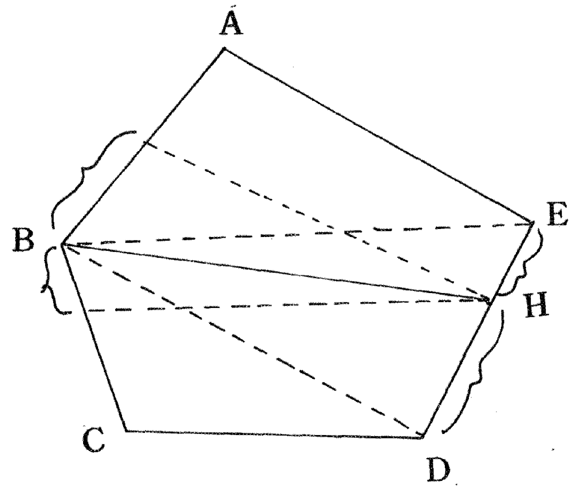
（過E點作直線$\overline{EF}$平分⬠ABCDE的面積）



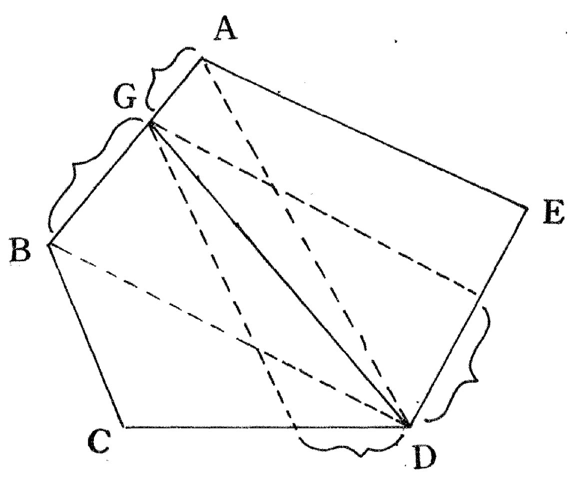
（過C點作直線$\overline{CL}$平分⬠ABCDE的面積）



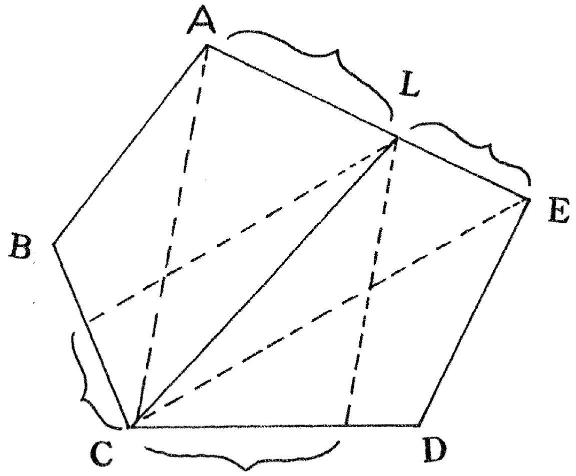
（能利用$\overline{AK}$平分線，作過P點平分⬠ABCDE面積之直線，P點的範圍）



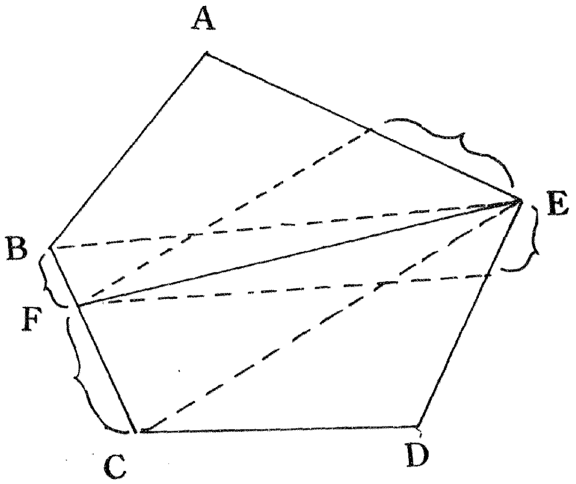
（能利用$\overline{BH}$平分線，作過P點平分⬠ABCDE面積之直線，P點的範圍）



（能利用$\overline{DG}$平分線，作過P點平分⬠ABCDE面積之直線，P點的範圍）



（能利用$\overline{CL}$平分線，作過P點平分⬠ABCDE面積之直線，P點的範圍）



（能利用$\overline{EF}$平分線，作過P點平分⬠ABCDE面積之直線，P點的範圍）

三、結　　論

1. 以上的討論，我們由三邊形、四邊形、五邊形面積平分方法，首先作過各頂點的平分線，再利用各頂點的平分線，如討論3.、討論7.推推展到邊上任意一點。

2. 至於其他多邊如六邊形、七邊形平分面積作法，首先將六邊形分為兩個四邊形，七邊形分為一個四邊形和五邊形，再利用已成的四邊形、五邊形過頂點平分線作法，應同理可做出各頂點的平分線，過邊一點的平分線。而可推至n 邊形，其情形可分兩點：

(1)當 n 爲偶數時，可將此分爲$\frac{n}{2}$個邊的兩部分，再加上一條對角線，故可爲兩個$\frac{n}{2}+1$邊的多邊形。

(2)當 n 爲奇數時，可將此分爲$\frac{n-1}{2}$和$\frac{n+1}{2}$個邊的兩部分，再加上一條對角線，故可分爲$\frac{n+1}{2}$和$\frac{n+3}{2}$的兩多邊形。再依照上述方法卽可做上述所求，只是較複雜，尙得有系統的硏究、討論。

3. 另外一個問題卽「過多邊形內一點，作一直線平分此多邊形的面積」也就是我們繼續硏究的目標。

參考資料：第 2 步驟的「過四邊形邊一點 P，作一直線平分此四邊形的面積」乃參考鄭永言著平面幾何學講義。

評語：以基本的三角原理系統地推論較繁的多邊形平分問題。