基層建設中鄉村聯絡道路之最經濟設計

高中組數學科第三名

省立新竹高級中學

作者：李洪松、林國輝、楊天祥、翁林琦

指導教師：黃靜卿

一、動機與目的

現在政府正積極推動基層建設，其中一件重要項目便是建設鄉村的連絡道連絡道路網。在不考慮人文、地質的條件下，以數學的觀點來看，當然希望連絡道路網之全長爲最小，而使工程費爲最省。此在交叉路口建立人行地下道，或在都市內建築高架橋連絡網、地下水道等均希望連絡網的全長爲最小。這些問題引發我們研究本文的動機—在一平面上，給定若干個定點，如何設計一連絡網，連接這些點而使連絡網之全長爲最小。

有關這問題，實驗課本第三册、第五章中曾經提到，到三定點距離和之最小值的求法與結論。但我們發現課本所做的結論，無法適用所有的情況，而有待修正。修正的方法與結論，及如何利用這結論將三個定點推廣到一般的任意幾個點是我們要研討的問題。

二、設計的方法

1. 任意三個村莊連絡道路網的經濟設計：

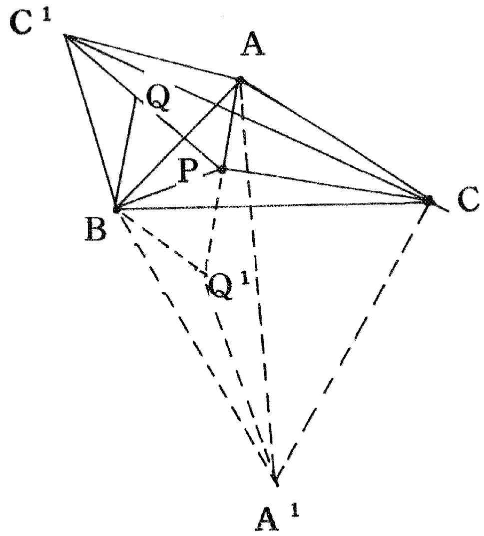
「論述 1 」：設 A 、B 、C 表不共線之三點，p 爲 A B C 平面上任一點，則 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 之最小值爲何？又此時 P 之位置 Pm 爲何？

設 P 爲 $\triangle ABC$ 內部任意一點

將 $\triangle ABP$ 以 B 爲中心，背着 C 的方向旋轉 60 °得 $\triangle C'BQ$ 由 $\overline{BP}=\overline{BQ}$，$\angle QBP=60°$　∴ $\triangle BPQ$ 爲正三角形 ∴ $\overline{PA}+\overline{PB}$

$+\overline{PC}=\overline{O'Q}+\overline{QP}+\overline{PC}\geq\overline{CC'}$故$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\geq\overline{CC'}$ 且等式成立時C′ ，Q，P，C四點共線，$P\in\overline{CC'}$同理將△CBP以B為中心，背著A方向旋轉60°得$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\geq\overline{AA'}$且等式成立時$P\in\overline{AA'}$。

（將△ACP以C為中心，背著B方向旋轉60°得$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\geq\overline{BB'}$ 且等式成立時$P\in\overline{BB'}$ ）



圖（1）

由附錄中，補助定理2，可證得$\overleftrightarrow{AA}$，$\overleftrightarrow{BB}$，$\overleftrightarrow{CC}$交於一點S，且$\overline{AA'}\fallingdotseq\overline{BB'}\fallingdotseq\overline{CC'}$ （如圖(2)）因此取Pm＝S時$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$之值為最小，而其值為$\overline{AA'}$ （或$\overline{BB'}$，$\overline{CC'}$）

由以上論述，實驗課本作以下結論：

到三定點A，B，C距離和之最小值，與此時P點之位置Pm可依下法取得。

(1)在$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$各邊向外作正三角形ABC′，BCA′，CAB′

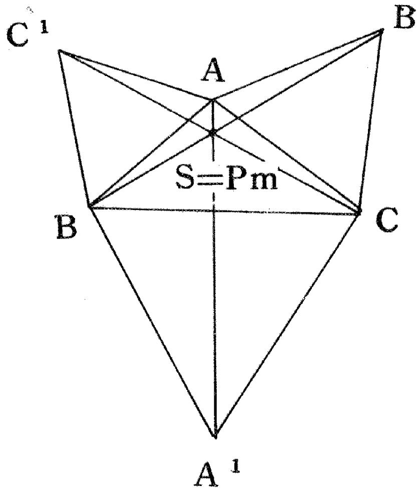
(2)連接$\overline{AA'}$，$\overline{BB'}$，$\overline{CC'}$ 其交點S即為所求之Pm

(3)最小值為$\overline{AA'}\fallingdotseq\overline{BB'}\fallingdotseq\overline{CC'}$且Pm到A、B、C所開張之角度皆為120°

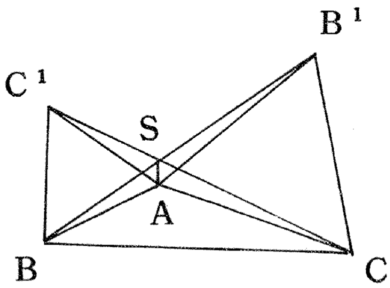
此結論大致可適用一般的狀況，但無法適用所有的情況因為△A

ＢＣ中有一內角大於120°時卽不可適用，今說明如下：

如圖(3)△ＡＢＣ中＜ＢＡＣ＞120°以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$，爲一邊向外作正三角形時，$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$ 之交點Ｓ在△ＡＢＣ之外部。



圖（２）



圖（３）

由附錄中補助定理１：得$\overline{SA}+\overline{SB}+\overline{SC}$不可能爲最小値

$\therefore Pm \neq S$。在這種情況下，Ｐｍ之位置究竟在那裏呢？

當Ｐ爲△ＡＢＣ外部或邊上時，由補助定理２得$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC} \geq \overline{AB}+\overline{AC}$，故只要考慮Ｐ在內部時卽可。

如P在△ABC內時仿上，將△ABP向外旋轉60°得

$\overline{CQ}\cup\overline{QP}\cup\overline{PC}$有如圖(4)及圖(5)兩種可能情形

(a)如圖(4)中，Q在△ABC′之內部時

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{C'Q}+\overline{QP}+\overline{PC}\geq\overline{C'P}+\overline{PC}>\overline{C'A}+\overline{AC}$

$=\overline{AB}+\overline{AC}$

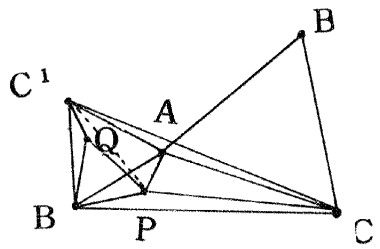
(b)如圖(5)中，Q在△ABC之外部時

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{C'Q}+\overline{QP}+\overline{PC}\geq\overline{C'P}+\overline{PC}>$

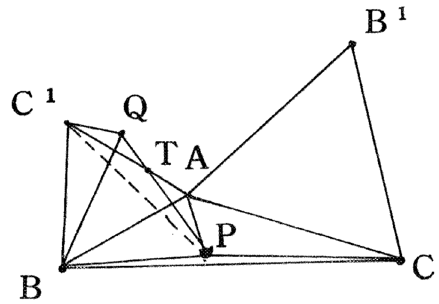
$\overline{C'A}+\overline{AC}=\overline{BA}+\overline{AC}$

∴不論P之位置為何$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\geq\overline{AB}+\overline{AC}$，∴Pm＝A

即當A、B、C三點決定之三角形有一內角大於120°時，最短的連絡網應為鈍角之二夾邊。



圖（4）



圖（5）

由以上論述，我們將課本之結論修正如下

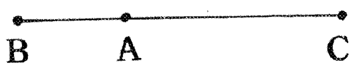
「結論1」：對任意A、B、C三點言

(1)當A、B、C三點共線時，連接這三點之最經濟道路網應為

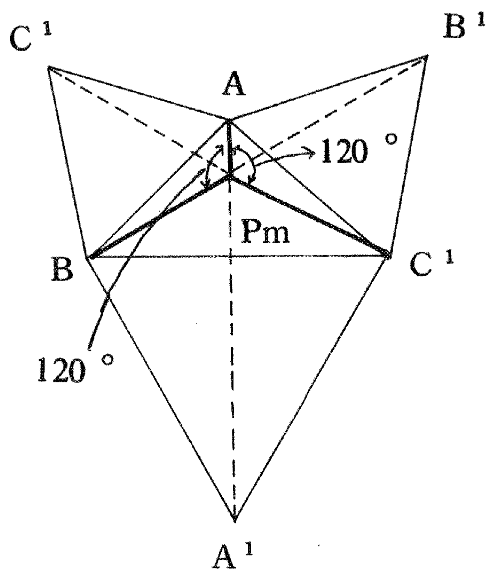
線段（圖6）

(2)如△ABC三內角皆小於120°時，連接A、B、C三點之最經濟連絡道路網應爲一三叉路口，且叉路口之夾角皆爲120°（圖7）.

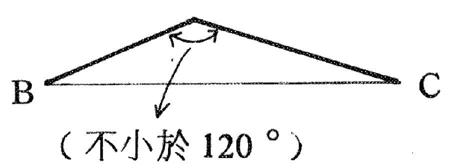
(3)如△ABC中有一內角不小於120°時連接A、B、C三點，最經濟連絡網應爲折線（圖8）



圖（6）



圖（7）



圖（8）

「定義」

1. 對任意之定點，以夾角皆爲120°之三叉路連接之連絡網爲經

三叉路（如圖(7)）如以轉角不小於 120° 之折線連接稱爲經濟折線（如圖(8)）。

2 經濟三叉路之 Pm 點，或經濟折線之 A 點，以後統稱爲經濟支點。

註：如 A、B、C 爲正三角形之三頂點時，其經濟支點爲重心，而最經濟道路網之全長爲 $\sqrt{3a}$

實例 1：設 A、B、C 三個村莊相距分別爲 7 公里、8 公里、9 公里，作一連路道路網，連接這 3 個村莊時，道路網全長之最小值爲何？

$$\mathrm{Cos}r = \frac{8^2+9^2-7^2}{2、8、9} = \frac{2}{3} \quad \therefore \mathrm{Sin}r = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

道路網全長之最小值爲 $\overline{AA'}$

$$\overline{AA'}^2 = 8^2+9^2-2.8.9\ \mathrm{Cos}(r+60°)$$
$$= 64+81-144(\mathrm{Cos}r\mathrm{Cos}60° - \mathrm{Sin}r\ \mathrm{Sin}\ 60°)$$
$$= 145-144\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 97+24\sqrt{15}$$

$$\therefore \overline{AA'} = \sqrt{97+24、15} \doteqdot 13.79 \text{ 公里}$$

實例 2：設 A 村在 B 村之正東 8 公里，C 村在 B 村之正北 8 公里，作一連絡道路網連接此三個村落而使道路全長爲最小，問此時全長爲幾公里，交叉路口之位置爲何？

取一直角坐標系使 B＝(0、0)　A＝(8、0) C＝(0、8)

C′ 之坐標爲 (8Cos(−60°), 8sin(−60°))

$=(4, 4\sqrt{3})$

$$\overleftrightarrow{CC'}: y = \frac{-4\sqrt{3}-8}{4-0}(x-o)+8$$

$y=-(2+\sqrt{3})x+8$

$\overleftrightarrow{BB'}$　$y=x$（$\because \overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{AB'}=\overline{B'C}$）

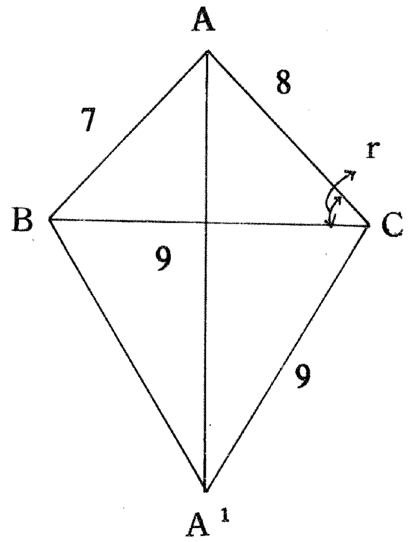
$$\therefore Pm: \begin{cases} y=-(2+\sqrt{3})x+8 \\ y=x \end{cases}$$

解之得 $pm\left(\frac{12-4\sqrt{3}}{3}, \frac{12-4\sqrt{3}}{3}\right)$

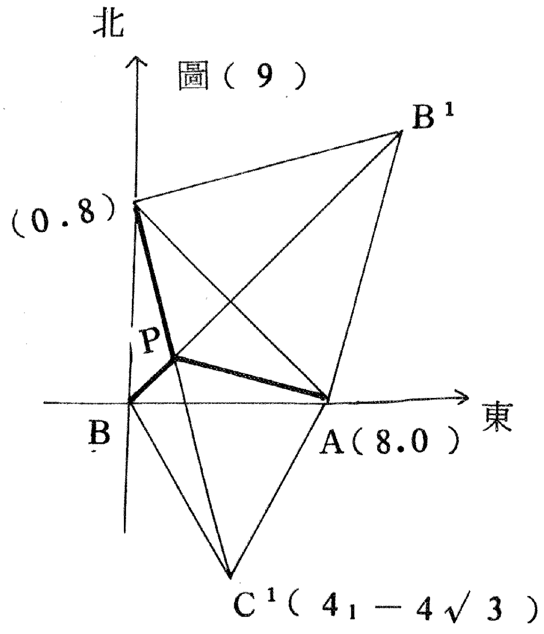
又 $\overline{CC'}=\sqrt{4^2+(-4\sqrt{3}-8)^2}=4(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 公里．

$$\overline{BP}m=\frac{12\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{3}$$

故最小值爲 $4(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 公里，Pm之位置在B之東北 $\frac{12\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{3}$ 公里處



圖（9）



圖（10）

由以上論述，可以將連接三個村莊的連絡道路網之經濟設計，作完全陳述，但在實際應用上，村莊絕不止於3個，那麼當村莊個數超過3個時，應如何設計呢？當然一個道路網，如果符合經濟原則，則連接任三點所用的道路網應是最經濟的，所以說任意幾個村莊的道路網的設計，應該是由3個村莊的性質推廣得來，而應如何推廣呢？今陳述於後§ 2 ：任意幾個村莊之最經濟道路網之特性。

「論述2」：對任意n個村莊所作之經濟連絡網應僅含經濟折線與經濟三叉路

證明：（Ⅰ）首先證明不能有4叉路口或4叉路口以上之設計：

若設計當中有一四叉路口 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}\cup\overline{PD}$ 連接A、B、C、D四點則 $\angle APB$，$\angle BPC$，$\angle CPD$，$\angle DPB$ 中必有一角小於 $120°$，今令 $\angle APB<120°$，而 $\triangle APB$ 之形狀僅有圖⑾，圖⑿兩種可能情形。

(1) $\triangle ABP$ 中三內角均小於 $120°$。

仿§ 1，可作一經濟之叉路 $\overline{QA}\cup\overline{QB}\cup\overline{QP}$ 連接A、B、P而使

$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QP}<\overline{AP}+\overline{BP}$

$\therefore \overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QP}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$

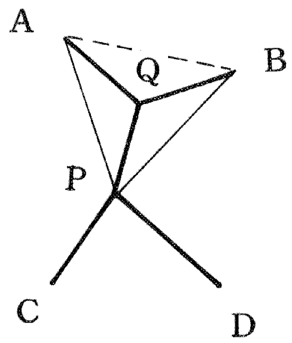
故 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}\cup\overline{PD}$ 不為最經濟的設計

(2) $\triangle ABP$ 中有一內角 $\angle PBA\geq 120°$

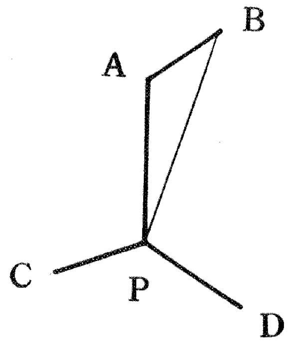
由§ 1中連接A、B、P三村之最經濟連絡道路網應為 $\overline{AB}\cup\overline{AP}$ 而不為 $\overline{AP}\cup\overline{BP}$。即

$\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$

故4叉路口不符合我們所要的經濟原則，同理5叉路口、6叉路口⋯⋯⋯皆不為所求



圖（11）



圖（12）

（Ⅱ）如為三叉路口之設計時，必為經濟三叉路（仿（Ⅰ），不再重複）

（Ⅲ）如以折線連接時，必須為經濟折線

設連接B、C、D三點以折線 $\overline{BC}\cup\overline{CD}$ 連接則 $\angle BCD\geq 120^\circ$，因如 $\angle BCD\leqq 120^\circ$ 時，有關 $\triangle BCD$ 亦有圖⒀、圖⒁兩種可能，很明顯的 $\overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CD}$ 不為最經濟設計。

⑴如圖⒀ $\triangle BCD$ 中有一內角不小於 120°

13－a時 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{BD}<\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$

（$\angle CBD\geq 120^\circ$）

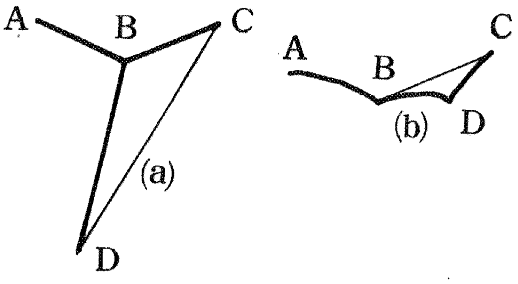
13－b時 $\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{CD}<\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$

（$\angle BDC\geq 120^\circ$）

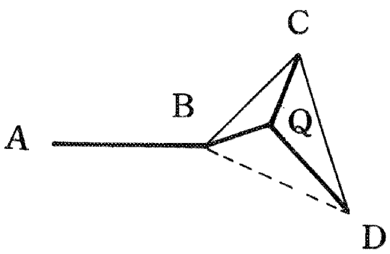
⑵如圖⒁ $\triangle BCD$ 中三內角小於 120°

由§1，可取一經濟三叉路 $\overline{QB}\cup\overline{QC}\cup\overline{QD}$

使$\overline{AB}+\overline{BQ}+\overline{QC}+\overline{QD}<\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$



圖（ 13 ）



圖（ 14 ）

「定義」

完全由經濟三叉路口與經濟折線所組成之連絡網稱爲經濟連絡網

註：我們所要的最經濟設計，便是從經濟連絡網中取其最小值

談完最經濟連絡網的原則之後，繼續要研究設計的方法。在§ 1 當中作三個村落的最經濟道路網時應用旋轉60°的方法。但此法無法推廣到一般的n個村莊。因此必須另求他途，首先由120° 的靈感，引進下列定理。

「定理」：設△ABC爲正三角形，0爲外接圓之圓心，若P爲$\overset{\frown}{BC}$上任一點則$\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{PA}$且$\angle BPC=120°$

證明：在$\overrightarrow{PC}$之反射線上取一點B使$\overline{PB'}=\overline{PB}$

由P、C、A、B四點共圓

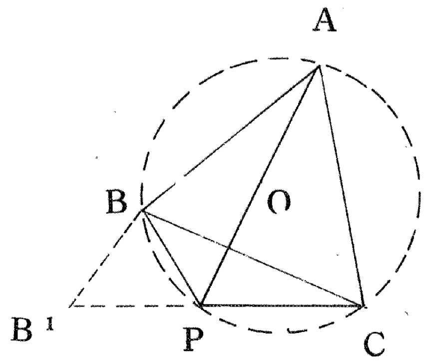
得$\angle BPB'=\angle BAC=60°$，∴△BPB′ 爲正三角形

∴$\overline{BB'}=\overline{BP}$，又$\overline{BC}=\overline{AB}$　$\angle CB'B=\angle APB=60°$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle CBB'$

$\therefore \overline{PA} = \overline{CB} \fallingdotseq \overline{CP} + \overline{PB'} \fallingdotseq \overline{PC} + \overline{PB}$

又$\angle BPC + \angle BAC = 180°$　$\therefore \angle BPC = 120°$



圖（ 15 ）

利用上述定理，將到三定點A、B、C（$\triangle ABC$三內角小於120°）之經濟連絡網的作圖簡化如下：

(1)從任一邊（$\overline{BC}$），向外部作正三角形$A'BC$，並作$\triangle A'BC$之外接圓。

(2)由$\angle BP_mC = 120°$ 故$P_m \in \overset{\frown}{BC}$且$\overline{P_mA} + \overline{P_mB} + \overline{P_mC} = \overline{P_mC} + \overline{P_mA} \fallingdotseq \overline{AA'}$ 。

(3)$\overline{P_m}$為$\overline{AA'}$與$\overset{\frown}{BC}$之交點，（此時$\angle AP_mB = 180° - \angle A'P_mB = 180° - 60° = 120°$）。

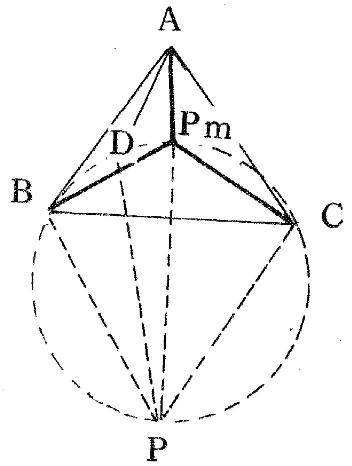
即經濟支點為$\overline{AA'}$與$\overline{BC}$之交點。

「定義」

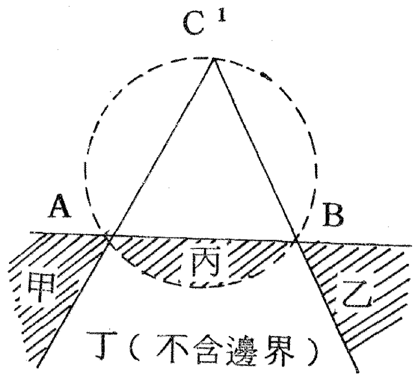
由$\overline{BC}$邊向外所作之正三角形其第三頂點A稱為B、C之等價點，而$\triangle BCA'$之外接圓稱為輔助圓CBC。

註：1.將來從3個點要推廣至4個點、5個點……，便是要應用等價點與輔助圓之觀念。

2.對任意A、B、C三點言，先固定$\overline{AB}$邊，由C點之位置，討論其經濟三叉路與經濟折線適用情形如下：



圖（ 16 ）



圖（ 17 ）

設C′ 爲以$\overline{AB}$爲一邊背著C所作之等價點，其輔助圓C$_{\overline{AB}}$與$\overleftrightarrow{AC}$，$\overleftrightarrow{BC'}$ 將$\overleftrightarrow{AB}$所分割之半平面分割成甲、乙、丙、丁四個區域

C之位置	內部情形	經濟支點	經濟連絡網	經濟連絡網之全長	適用情形
甲	$\angle CAB \geq 120°$	$Pm = A$	$\overline{CA} \cup \overline{AB}$	$\overline{CA} + \overline{AB}$	經濟折線
乙	$\angle ABC \geq 120°$	$Pm = B$	$\overline{AB} \cup \overline{BC}$	$\overline{AB} + \overline{BC}$	經濟折線
丙	$\angle ACB \geq 120°$	$Pm = C$	$\overline{AC} \cup \overline{BC}$	$\overline{AC} + \overline{BC}$	經濟折線
丁	$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 皆小於 120°	$Pm = \widehat{AB} \cap \overline{CC'}$	$\overline{PmA} \cup \overline{PmB} \cup \overline{PmC}$	$\overline{CC'}$	經濟三叉路

註：當C在丙區域內時對C $\overline{BC}$ 言A在甲或乙區域內

§ 3 ：到四個村莊的最經濟連絡網之設計：

首先處理其特殊狀況，再推及一般的情形

「論述 3 」：設有二條等寬之道路垂直相交，在交叉路口要設計一人行地下道，其平面圖應如何設計，使其全長為最短，又當路寬為 a 時，其全長為何？

由正方形ABCD之四內角皆小於 120° ，故連接四點不可能全用折線，故其最經濟連絡網至少有一經濟三叉路。

（Ⅰ）設有一經濟三叉路之二條道路直接連接A、B，其經濟支點為P，則$\angle APB = 120°$

以$\overline{AB}$為一邊，背著$\overline{CD}$作其等價點M與輔助圓C $\overline{AB}$

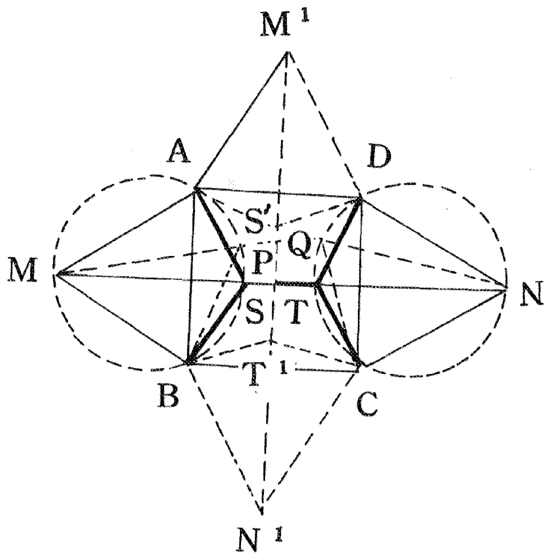
P必為$\widehat{AB}$上之一點，又$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PM}$

故連接A、B、C、D之經濟道路網之全長等於連接M、C、D之經濟連絡網之全長，由$\triangle MCD$之三內角皆小於 120° ，連接C、D必也是經濟三叉路，其支點為Q，作C、D之等價點N與輔助圓C $\overline{CD}$由§ 2之論述知連接M、C、D之經濟連絡網全長為$\overline{MN}$（此時M、P、Q、N四點共線）

故從$\overline{AB}$邊開始，作連接A、B、C、D之經濟連絡網為$\overline{AS} \cup \overline{BS} \cup \overline{ST} \cup \overline{TD} \cup \overline{TC}$（其中S、T分別為$\overline{MN}$與$\widehat{AB}$，$\widehat{CD}$之交點）而其全長為$\overline{MN}$。

（Ⅱ）從$\overline{BC}$邊開始作經濟道路網時，仿（Ⅰ）得$\overline{AS'} \cup \overline{DS'} \cup \overline{S'T'} \cup \overline{T'B} \cup \overline{T'C}$而其全長為$\overline{M'N'}$。

又$\overline{MN}=\overline{M'N'} \fallingdotseq a+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=(\sqrt{3}+1)a$故（Ⅰ）（Ⅱ）中所找出之2條路線皆為最經濟之道路網，而全長為$(\sqrt{3}+1)a$。



圖（ 18 ）

「論述4」：將論述3中之正方形ABCD，改成長邊 $a=\overline{AD}$，短邊 $b=\overline{AB}$ 之矩形時，其最經濟連絡網為何？

（Ⅰ）仿論述3，從較胖之二邊（$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 相距較遠，稱之為較胖）作出第1條經濟連絡網 $\overline{AS'}\cup\overline{BS'}\cup\overline{S'T'}\cup\overline{T'C}\cup\overline{T'B}$，而其全長為 $\overline{M'N'}=a+\sqrt{3}\,b$

（Ⅱ）從較瘦之二邊（$\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 二邊相距較近，稱之為較瘦）可以做出第2條經濟連絡網 $\overline{AS}\cup\overline{DS}\cup\overline{ST}\cup\overline{T'C}\cup\overline{T'B}$ 而其全長為 $\overline{M'N'}=b+\sqrt{3}\,a$

由 $a>b$ $\therefore a+\sqrt{3}b<b+\sqrt{3}a$，故

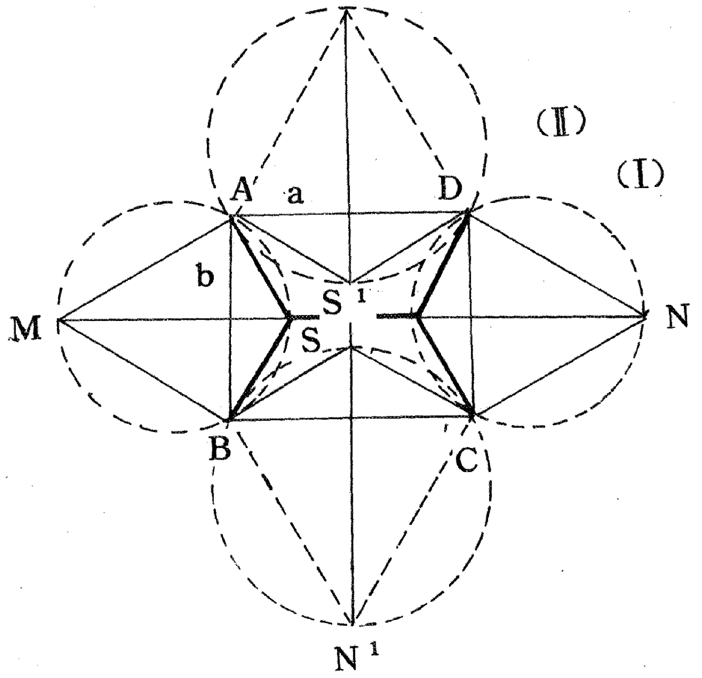
第一條路線為最經濟之連絡網

註：（1）當A、B、C、D四點形成一矩形ABCD時，連接A、B C、D四點之最經濟連絡網為2個經濟三叉路之連結。

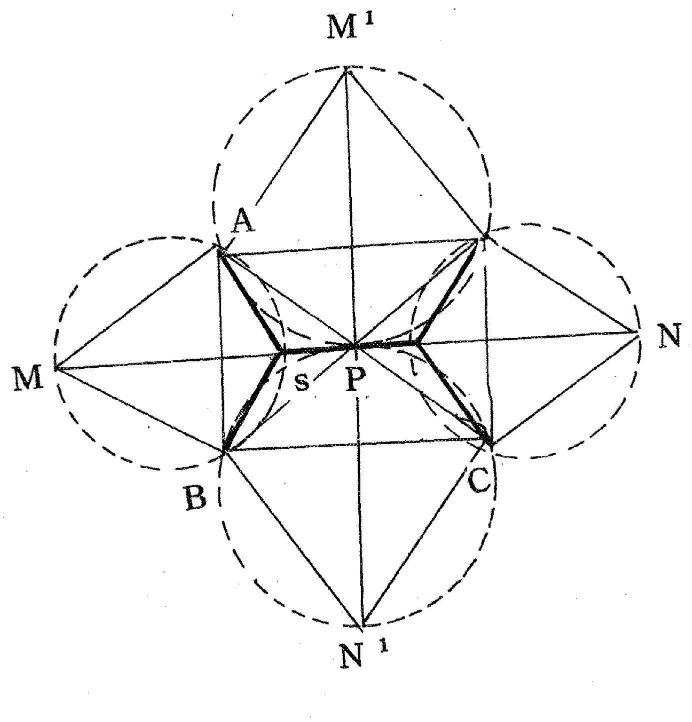
（從較胖的2邊作輔助圓所形成之連絡網）

（2）當 $b\leqq(\frac{1}{2}a\ \tan 30^{\circ})$ 即 $b\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}$ 時，由較瘦之二邊無法形成二個經濟支點之經濟三叉路連結。

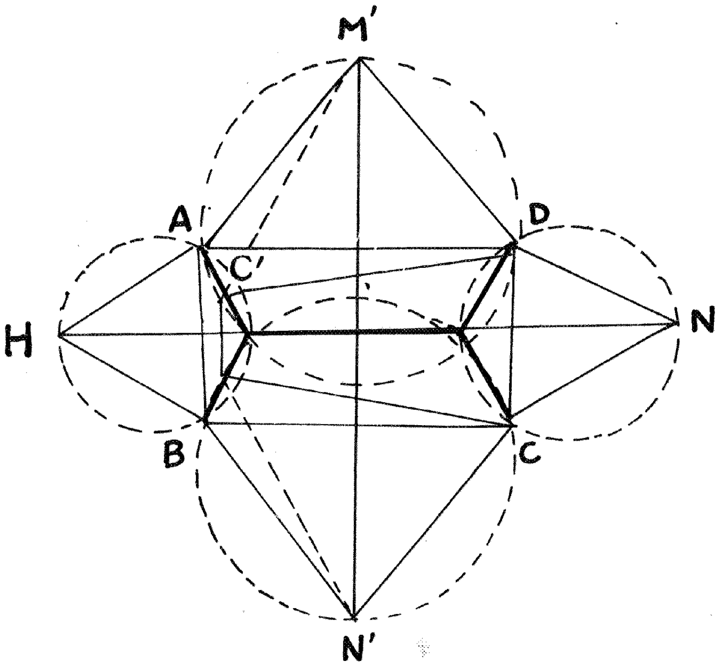
（如圖 20 與圖 21 ）



圖（ 19 ）



圖（ 20 ）



圖（ 21 ）

如圖 20 當 $b=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 時　$C_{\overline{AD}}$ 與 $C_{\overline{BC}}$ 相切於一點 P，如欲使 $\angle AS'D = 120^\circ$　$\angle BT'C = 120^\circ$　且 A、S'、T'、C' 共線，勢必 $S' \doteq T'$

形成一四叉路口，不爲經濟連絡網。何況 $\overline{M'N'} > \overline{MN}$

當 $b < \frac{2}{\sqrt{3}}$ 時，$C_{\overline{AD}}$ 與 $C_{\overline{BC}}$ 相交

如欲使 $\angle AS'D = 120^\circ$，$\angle BT'C = 120^\circ$ 時

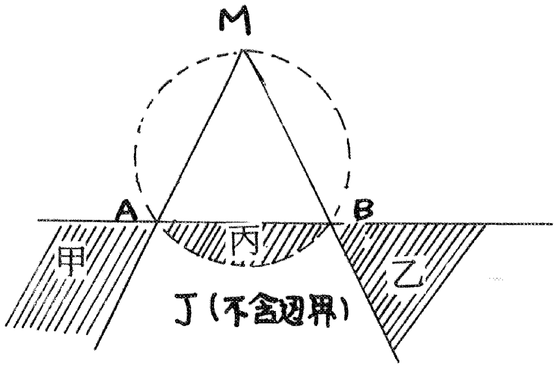
勢必 M'，S'，T'，N' 不共線或 $\overline{M'S'}$，$\overline{T'N'}$ 重疊，

故利用 $C_{\overline{AD}}$，$C_{\overline{BC}}$ 無法做出 2 個經濟三叉路（且只有二個支點）之連結。

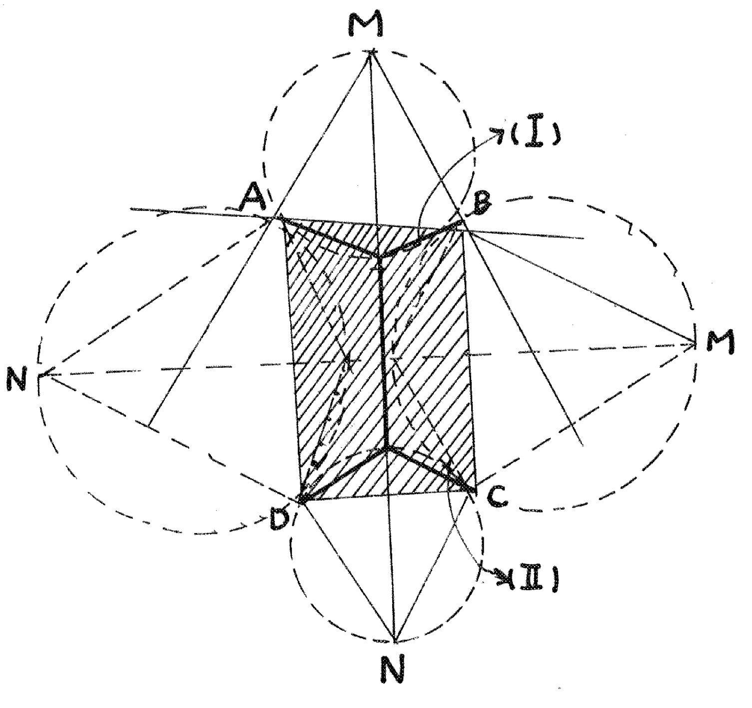
討論完以上特殊情形之後，我們將推廣至一般情形—任意 4 個村莊之最經濟連絡網之設計。

「論述 5 」：任意 4 點 A、B、C、D 其最經濟之連絡網爲何？

任取二點A、B　使C，D二點在$\overleftrightarrow{AB}$之同側（或$\overleftrightarrow{AB}$上）以$\overline{AB}$爲一邊背著C、D作等價點M與輔助圓C$\overline{AB}$以$\overline{CD}$爲一邊背著A、B作等價點N與輔助圓C$\overline{CD}$爲方便起見令$\overrightarrow{ND}$在$\overrightarrow{NC}$之逆時針方向。



圖（ 22 ）



圖（ 23 ）

如圖22 ，$\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{AM}$，$\overleftrightarrow{MB}$與C $\overline{AB}$將半平面分割成甲、乙、丙、丁四個區域，就N之位置與C $\overline{CD}$之性質討論如下：

(一)N在區域丁內時

(甲)若C、D在$\overleftrightarrow{MN}$之反測則有下列4種可能情形：

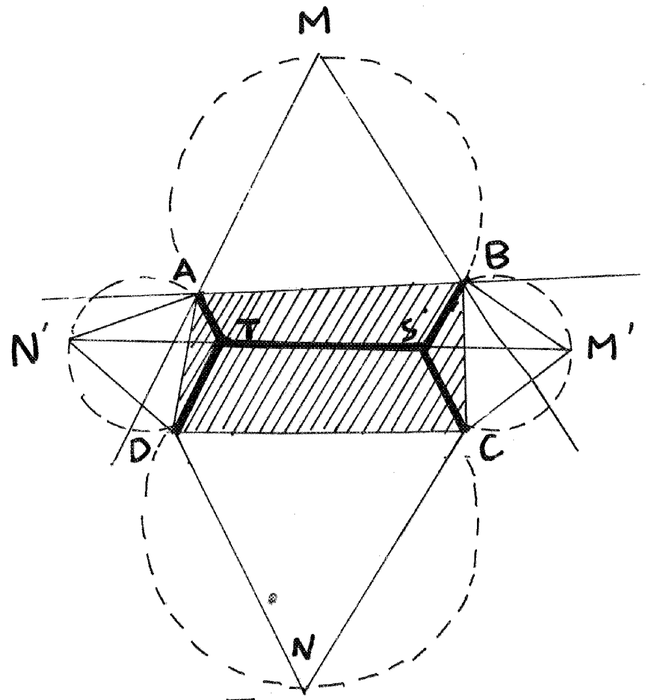
(1) C $\overline{AB}$與C $\overline{CD}$不相交，且C $\overline{AD}$與C $\overline{BC}$也不相交（如圖23 ）有2條符合經濟原則之連絡道路網。

路線(I) $\overline{AS}\cup\overline{BS}\cup\overline{ST}\cup\overline{TD}\cup\overline{TC}$其全長$\overline{AS}+\overline{BS}+\overline{ST}+\overline{TD}+\overline{TC}=\overline{MS}+\overline{ST}+\overline{TN}=\overline{MN}$

路線(II) $\overline{AT'}\cup\overline{D'T}\cup\overline{T'S'}\cup\overline{S'B}\cup\overline{S'C}$其全長$\overline{AT'}+\overline{D'T}+\overline{T'S'}+\overline{S'B}+\overline{S'C}=\overline{N'T'}+\overline{T'S'}+\overline{S'M'}=\overline{M'N'}$

比較$\overline{MN}$，$\overline{M'N'}$ 得$\overline{MN}<\overline{M'N'}$

故路線(I)為最經濟之連絡網（為2個經濟三叉路之連結）



圖（24）

註：一般而言若ABCD為凸四邊形，由較胖之二邊之輔助圓所形成之連絡網為最佳。

(2) $C_{\overline{AB}}$ 與 $C_{\overline{CD}}$ 交於 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 所夾區域之內側（如圖24 此時 $C_{\overline{AD}}$ 與 $C_{\overline{BC}}$ 必不相交。$\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 爲較胖之二邊）只有一條符合經濟原則的連絡網。

$\overline{AT'} \cup \overline{DT'} \cup \overline{TS} \cup \overline{S'B} \cup \overline{S'C}$，爲 2 個經濟三叉路之連結，而其全長爲 $\overline{M'N'}$

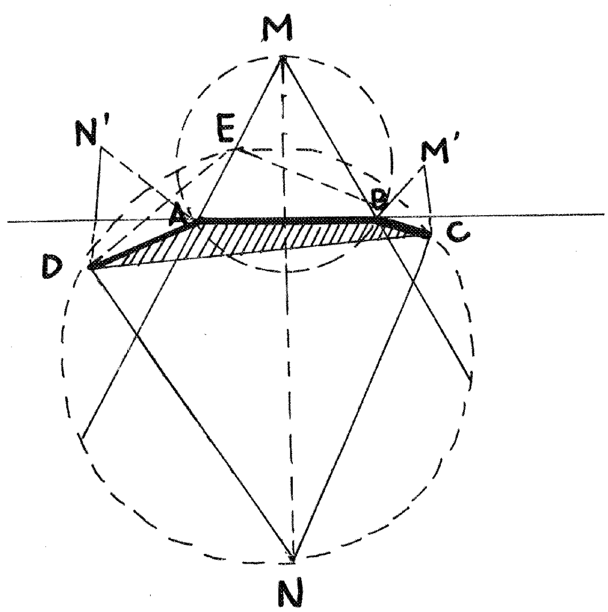
註：$C_{\overline{AD}}$ 與 $C_{\overline{BC}}$ 相交於內側時，同理可得。

(3) $C_{\overline{AB}}$ 與 $C_{\overline{CD}}$ 相交於 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 所夾區域之外側或邊上時（如圖25 $C_{\overline{AD}}$ 與 $C_{\overline{BC}}$ 相交於外側時，同理可得）

此時 $\angle DAB \geq \angle DAC > \angle DEC = 120°$，$\therefore \angle DAB > 120°$

同理 $\angle ABC > 120°$

故 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 邊之等價點皆在 $\overleftrightarrow{AB}$ 之上方，而無法以經濟三叉路連接，其最經濟道路網爲 $\overline{DA} \cup \overline{AB} \cup \overline{BC}$。（爲 2 個經濟折線之連結）



圖（25）

註：1. $C_{\overline{AB}}$，$C_{\overline{CD}}$ 之交點皆在 $\overleftrightarrow{CD}$ 之下方時其最經濟道路網應爲 $\overline{AD} \cup \overline{DC} \cup \overline{CB}$。

2. 當 C 在 $\overrightarrow{AB}$ 上時，其最經濟道路網爲一個經濟折線。

3. 當 C、D 皆在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上時，最經濟道路網爲一線段。

(4)$C_{\overline{AB}}$與$C_{\overline{CD}}$之交點，一點在外側一點在內側（指$\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{CD}$所夾之區域）此時$\angle CAD > 120°$（∵A在$C_{\overline{CD}}$之內部）$\angle ABC < 120°$（∵B在$C_{\overline{CD}}$之外部）連接此四點之最經濟連絡網為$\overline{DA} \cup \overline{AS'} \cup \overline{S'B} \cup \overline{S'C}$。

（為一個經濟三叉路與一個經濟折線之連結）

（乙）C、D二點在$\overline{MN}$同側或邊上時，為方便起見令C、D皆在左側（右側同理可得）此時對$\overline{CD}$言，$\overline{CD}$上之點以C點與$\overleftrightarrow{AB}$之距離為最近，故必須討論C之位置，有下列5種情形：

(1)C在丁區域內且在$C_{\overline{AD}}$之外部：

由C在$C_{\overline{AB}}$之外部∴$\angle MCB < \angle MSB = 60°$

∴$\angle DCB = \angle DCN + \angle BCN > 120°$

又$\angle ACB < \angle ASB = 120°$，$\angle ACD < \angle AT'D = 120°$

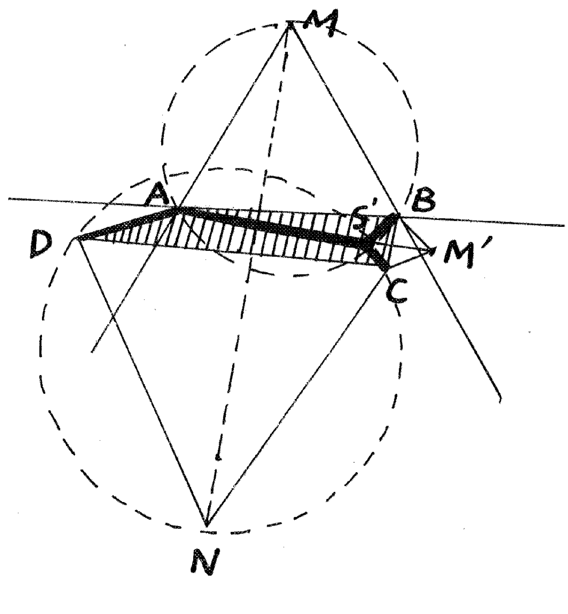
有二條符合經濟條件之連絡網

比較$\overline{AS} \cup \overline{BS} \cup \overline{SC} \cup \overline{CD}$全長為$\overline{MC} + \overline{CD}$

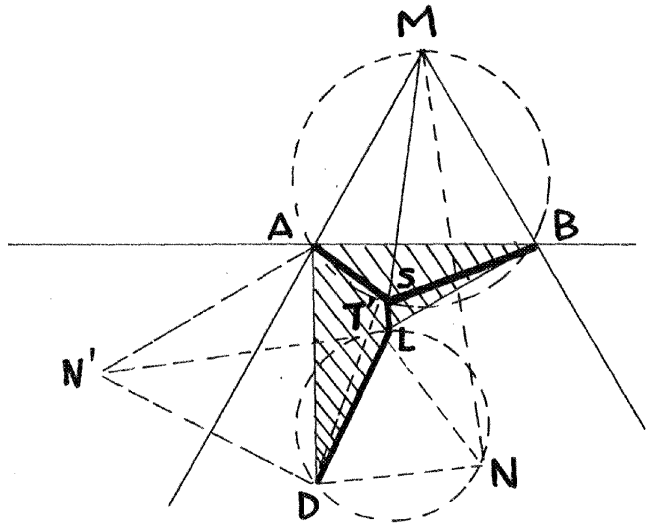
$\overline{AT'} \cup \overline{T'D} \cup \overline{T'C} \cup \overline{CB}$全長為$\overline{N'C} + \overline{CB}$

以圖27 為例$\overline{MC} + \overline{CD} < \overline{N'C} + \overline{CB}$

故$\overline{AS} \cup \overline{BS} \cup \overline{SC} \cup \overline{CD}$為所求（為一經濟折線與經濟三叉路之連結。）



圖（26）



圖（ 27 ）

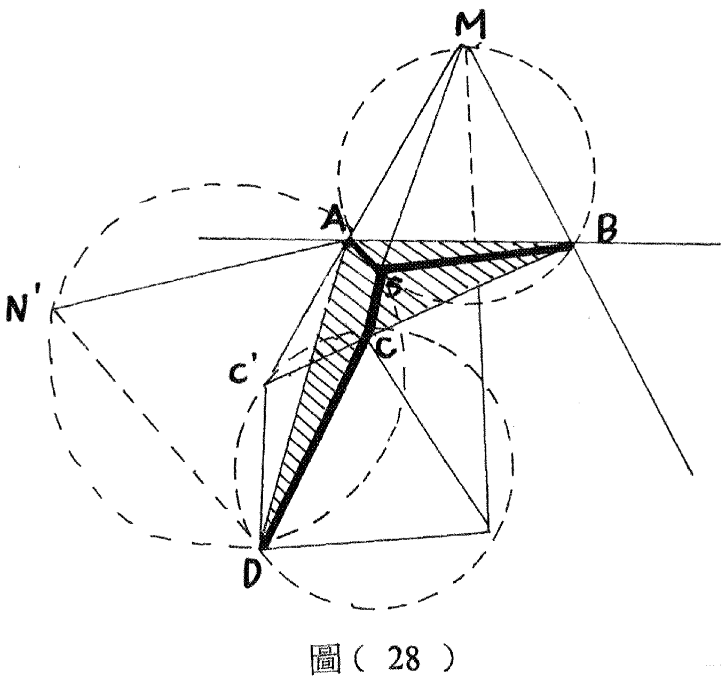
⑵ C在丁區域內且在C $\overline{AD}$之區域內，如圖28

由$\angle ACD \geq 120°$，$\angle BCD \geq \angle BC'D = 120°$

只能做一條符合經濟條件之連絡網

$\overline{AS} \cup \overline{BS} \cup \overline{SC} \cup \overline{CD}$

此連絡網即爲所求（爲一經濟折線與經濟三叉路之連絡）



圖（ 28 ）

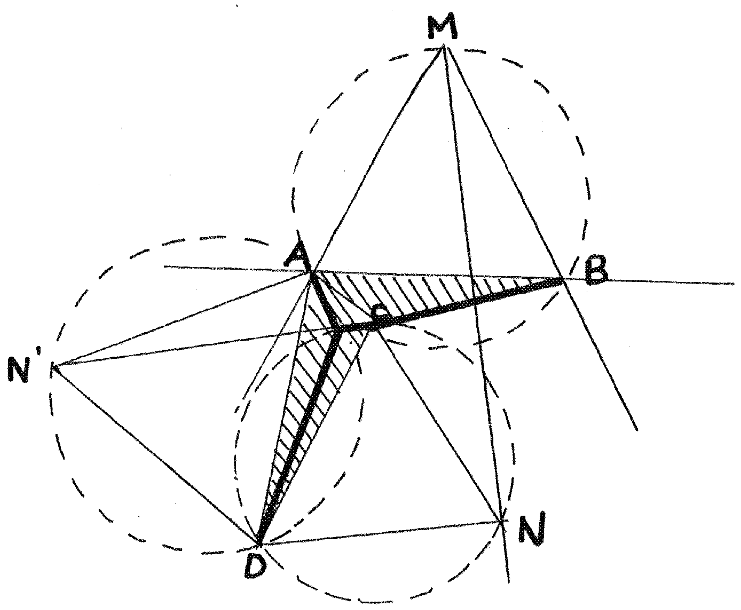
⑶C在丙區域內且A在C $\overline{CD}$之外部時，如圖29

由$\angle BCD \geq 120°$，$\angle ACB \geq 120°$ $\therefore \angle ACD < 120°$

只能做一條符合經濟條件之連絡網

$\overline{AT'} \cup \overline{DT'} \cup \overline{T'C} \cup \overline{CB}$ ，此連絡網即爲所求

（爲一經濟三叉路與經濟折線之連結）



圖（29）

⑷C在丙區域內且A在C $\overline{CD}$之區域內

$\angle BCD > 120°$，$\angle ACB > 120°$，$\therefore \angle ACD < 120°$

又$\angle CAD \geq 120°$

$\therefore$連接A、B、C、D之最經濟連絡網爲$\overline{DA} \cup \overline{AC} \cup \overline{CB}$

（爲2之二個經濟折線之互相連結）。

⑸C在甲區域內時

$\angle CAB \geq 120°$，觀察$\overline{AC}$邊之等價點與C $\overline{AC}$對C $\overline{AC}$言，B、D之位置如同（甲－3）（甲－4）不再重複。

㈡N在甲（或乙）區域內時

1.C、D在$\overleftrightarrow{AN}$之反側時，如考慮C $\overline{CD}$，$\overleftrightarrow{CD}$，$\overleftrightarrow{ND}$，$\overleftrightarrow{NC}$之分割區域時$\overline{AB}$邊之等價點在丁區域內，此與㈠部分相同，不再重

複。

2. C、D在$\overleftrightarrow{AN}$之同側時，C、D必在$\overleftrightarrow{AN}$之上方

C $\overline{AB}$與C $\overline{CD}$不相交

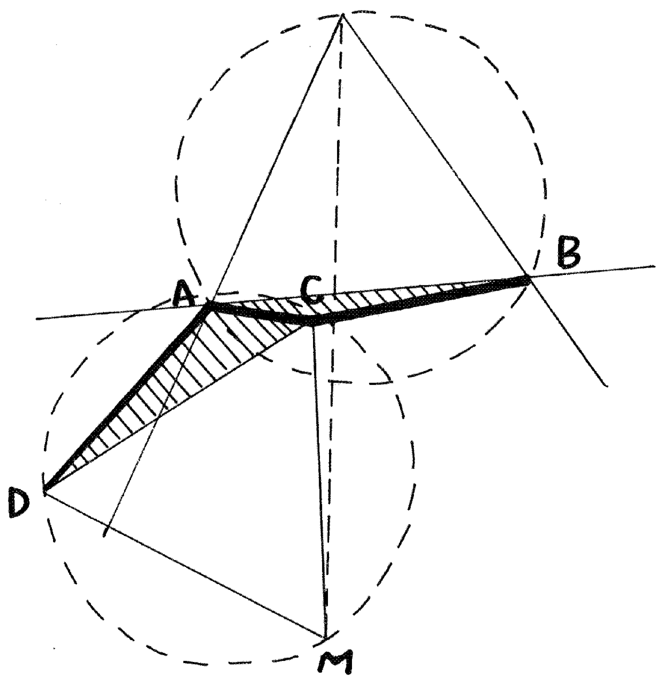
而得$\angle ACD \geq 120°$，$\angle C'AB \geq 120°$

其最經濟之連絡網為$\overline{DC} \cup \overline{CA} \cup \overline{AB}$

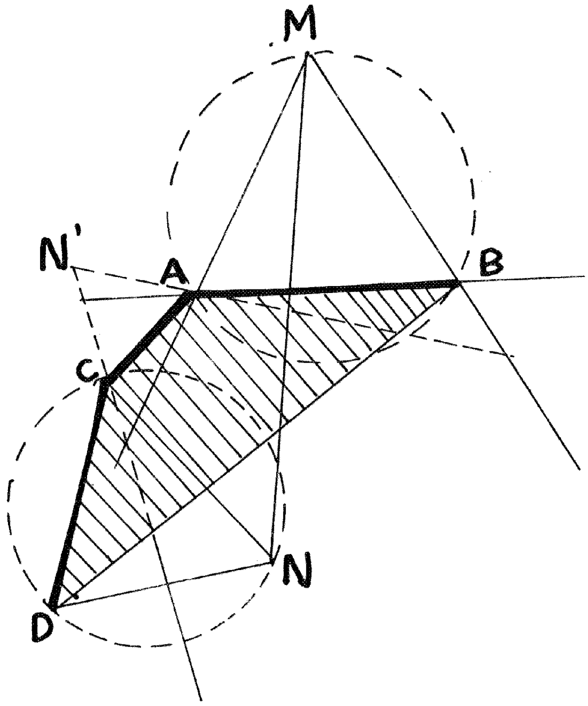
（為2個經濟折線之互相連結）

㈢N在丙區域內時，如A、B、C、D形成凸四邊形則如（甲－3）

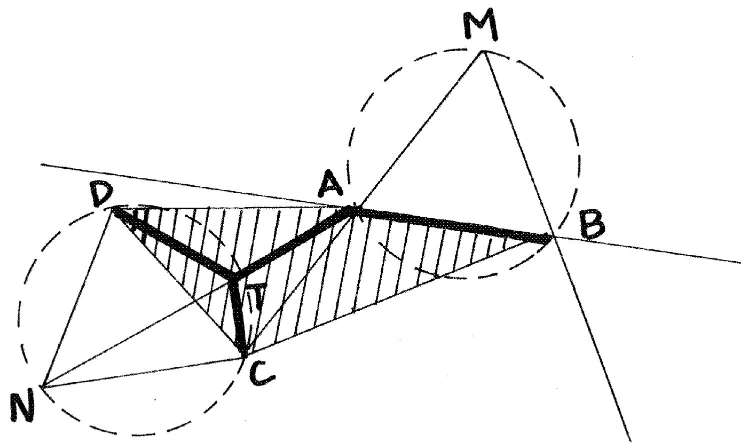
圖25　如A、B、C、D形成凸四邊形則如乙－4圖30　不再重複。



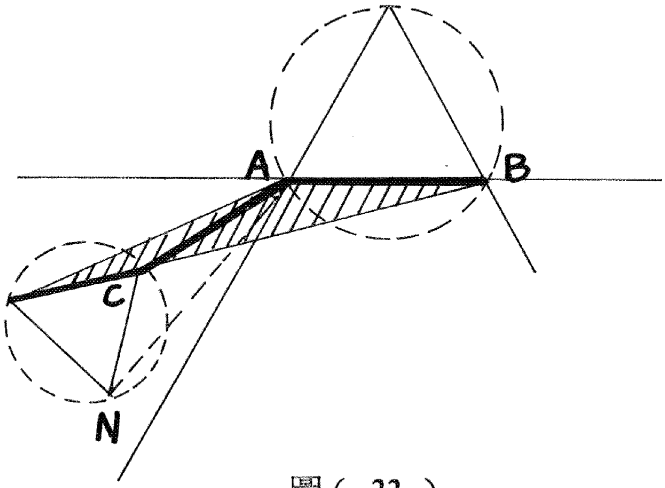
圖（30）



圖（ 31 ）



圖（ 32 ）



圖（ 33 ）

§ 4 、四個以上村莊之經濟道路網之設計：

在§ 3 中討論從 3 個村莊推廣到 4 個村莊的方法，及所有可能碰到的情形，利用這方法，可以推廣到 5 個村莊，甚至 5 個以上村莊。一般而言，對 5 個村莊言，尋找二個較疏離之二點，尋求這 2 個點之等價點，利用這等價點與其他 3 個點，形成 4 個點，利用§ 3 之結論，便可找出其最經濟的連絡網來。以此類推，可以找出任意 n 個村莊的經濟連絡網來。今以實例說明如下：

「論述6」：設有A、B、C、D、E等 5 個村莊，正好圍成一正五邊形，連接此五個村莊之最經濟道路網為何？又假設該五邊形邊長為 a 求最經濟道路網之全長：

(1)以$\overline{DE}$為一邊向外部作正△DED′，D′即為$\overline{DE}$之等價點，並作其輔助圓$C_{\overline{DE}}$次考慮ABCD之最經濟道路網，因$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD'}\doteqdot\overline{CD'}$，故從那一方面著手，結果必相同，此為（圖23型）。

(2)作$\overline{AB}$之等價點M，輔助圓$C_{\overline{AB}}$ $\overline{CD'}$之等價點N，輔助圓$C_{\overline{Cd'}}$ 。

(3)連接$\overline{MN}$與$C_{\overline{AB}}$之$\overset{\frown}{AB}$交於P，與$C_{\overline{CD}}$之$\overset{\frown}{CD'}$交於Q，連接$\overline{QD'}$與$C_{\overline{DE}}$之$\overset{\frown}{DE}$交於R。

(4)P， Q，R即爲經濟支點。

(5)最經濟道路網

爲$\overline{AP}\cup\overline{BP}\cup\overline{PQ}\cup\overline{CQ}\cup\overline{QR}\cup\overline{RE}\cup\overline{RD}$而其全長爲$\overline{MN}$。

$\angle CDD' = \angle CDR + \angle EDD' = 108° + 60° = 168°$

$$\angle D'CD = \frac{180° - 168°}{2} = 6°$$

$\overline{MC} = \overline{CN}$ $\triangle MCN$爲等腰$\triangle$

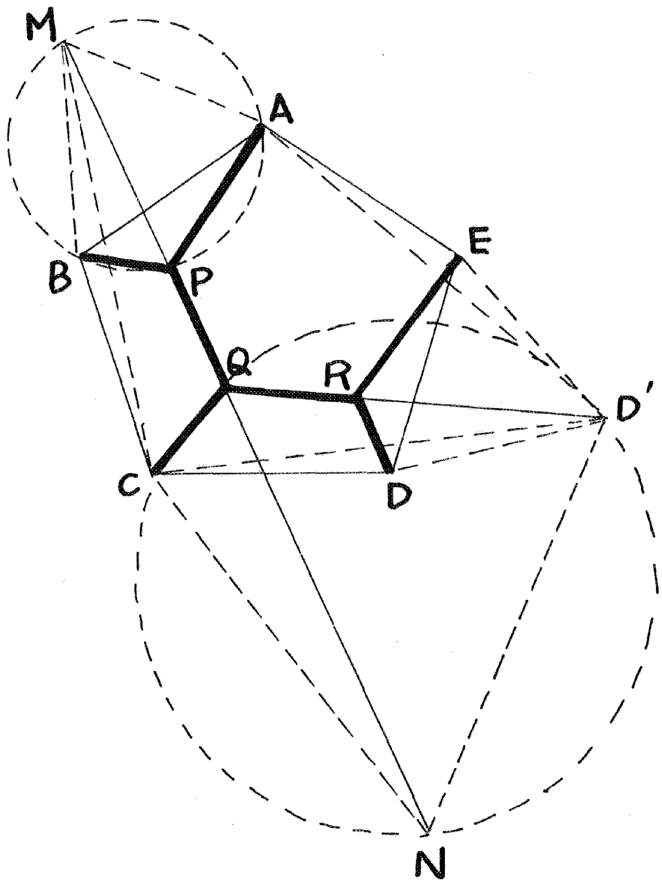
$\angle MCN = 108° - 12° + 60° = 156°$

$$\angle CMN = \frac{180° - 156}{2} = 12°$$

$\overline{MN} = 2〔\overline{MC} . \cos 12°〕$

又$\overline{MC} = 2 .〔a . \cos 6°〕= 2a . \cos 6°$

$\overline{MN} = 4a . \cos 6° . \cos 12° = 3.8909\ a$



圖（ 34 ）

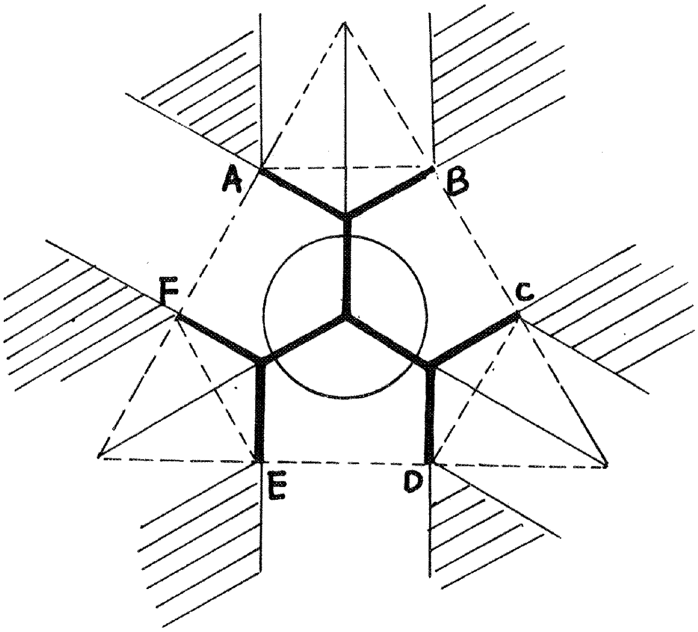
「論述 7 」：某圓環（如圖 35 ）有三條等寬的道路交叉，路口形成一正六邊形，今在此圓環設計一人行地下道應如何設計較好？

由正六邊形每一內角皆爲 120°，故沿著邊皆爲經濟折線利用(二)節的論述連接此六點之最經濟連絡網應爲 $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DE} \cup \overline{EF}$，而全長爲 5 a 。

註：1. $\overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DE} \cup \overline{EF} \cup \overline{FA}$ 亦可。

2. 超過 5 邊以上之正多邊形之幾個頂點，其最經濟之連絡網應爲多邊形之（ n − 1 ）個邊。

但如採取這方法築地下道，必須上上下下很不方便，且如從 A 要到 F，必須繞行 B 、C 、D 、E 路程遙遠很不方便。在顧行人方便與工程費較省的條件下，折衷的辦法是採取另一條經濟連絡網（但不是最經濟）如圖 35 所示爲較理想的設計。而其全長爲 $3\sqrt{3}\,a \approx 5.19a$。



圖（ 35 ）

由以上論述知在設計道路網時，除了道路全長最經濟外，尚必須考慮地質、人文、流量…… 等其他因素。

地質因素必須隨個案，實地觀察才能有所依據。在此不予討論，一般而言，如果有二個村莊，人口較多彼此交流量較大，爲實際需要這兩個村莊間應採取直綫到達，較爲理想，也就是說採用“主要幹道設計”今說明如后：

㈢主要幹道的修正：

首先看個實例，再推廣到一般

> 「論述8」：如果論述6中，A、C二村人口較多，往來較頻繁。則連絡此5個村莊的連絡網如何設計較好。

(1)因A、C二村間交通流量較大，故連接A、C採直綫連接，作主要幹道。

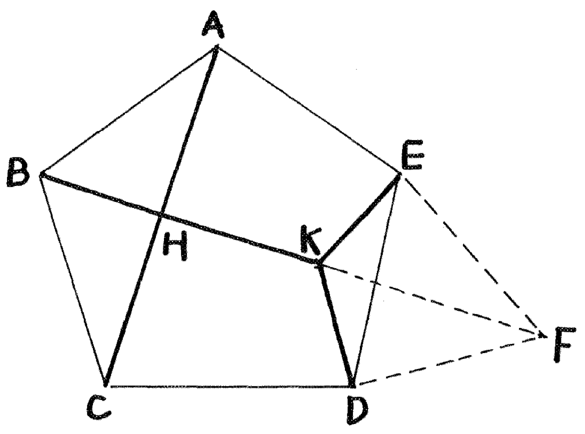
(2)連接B村，以垂直綫段$\overline{BH}$連接主要幹道。

(3)連接D、E二村時，作$\overline{DE}$之等價F與輔助圓C$\overline{DE}$。

(4)過F作$\overline{AC}$之垂直綫段$\overline{FH}$，交$\overset{\frown}{DE}$於K。

(5)較理想的設計爲$\overline{HA}\cup\overline{HB}\cup\overline{HC}\cup\overline{HK}\cup\overline{KE}\cup\overline{KD}$

而其全長爲$\left(2\sin 54^\circ+\frac{1}{2}\tan 72^\circ+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)a$，其中主要幹道長$2a\sin 54^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$。

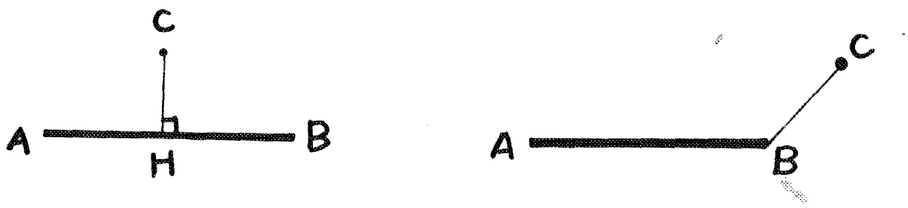


圖（36）

「論述 9」：對若干村莊言，其中二村莊間設立主要幹道，其他無特殊規定時，應如何設計較好。

只要討論主要幹道之一側即可，設$\overline{AB}$為主要幹道。

⑴主要幹道之一側只有一個村莊時，採用最短距離（村莊與$\overline{AB}$間）連接。

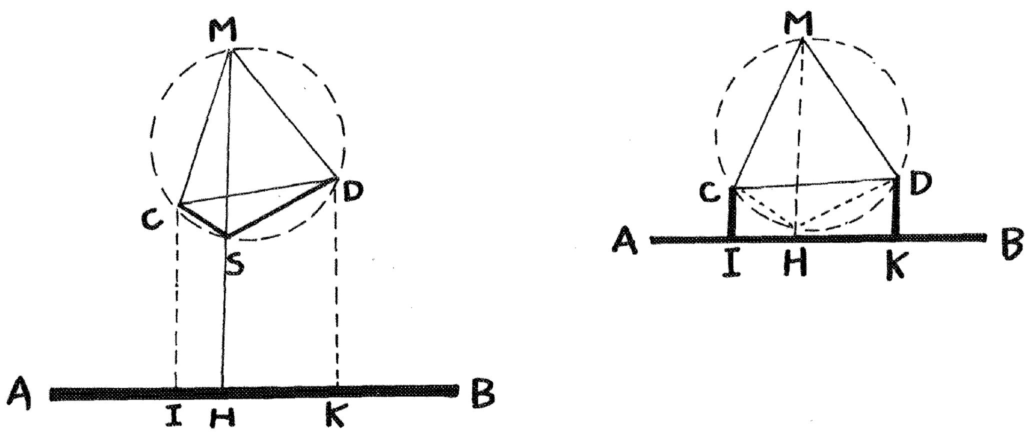


圖（37）

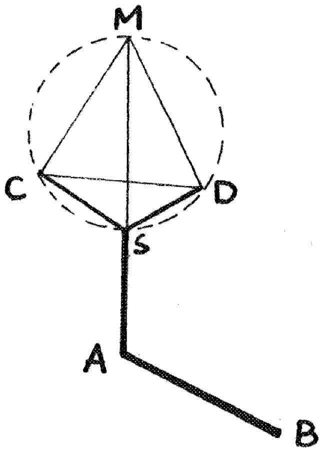
⑵主要幹道之一側有2個村莊C、D時，令C、D二點之等價點為M，輔助圓為$C\overline{CD}$，M到$\overline{AB}$之最短距離為$\overline{MH}$，C、D到$\overline{AB}$之最短距離為$\overline{CI}$，$\overline{DK}$。

①$C\overline{CD}$與$\overline{AB}$不相交，且C、D在$\overline{MH}$之反側

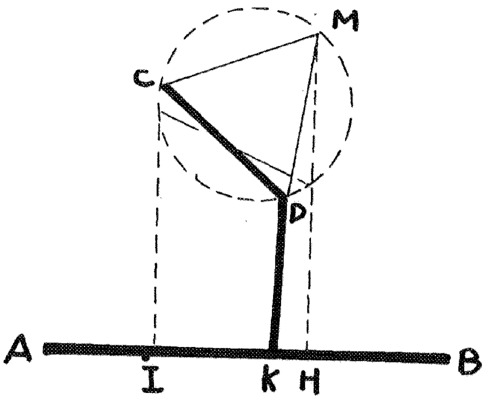
$\overline{MH}<\overline{CJ}+\overline{DK}$	$\overline{MH}>\overline{CI}+\overline{DK}$
最佳連路網為	最佳設計為
$\overline{CS}\cup\overline{DS}\cup\overline{SH}\cup\overline{HA}\cup\overline{HB}$	$\overline{CI}\cup\overline{IA}\cup\overline{IK}\cup\overline{DK}\cup\overline{KB}$



②C $\overline{CD}$與$\overline{AB}$不相交且C、D在$\overline{MH}$之反側。



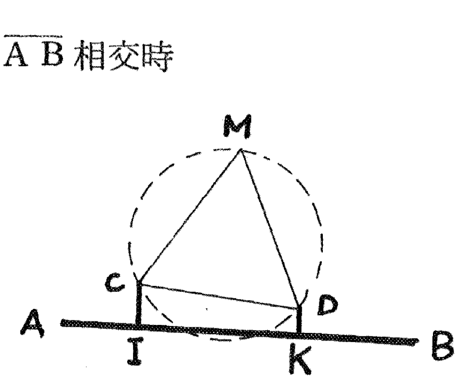
H＝A　最佳設計爲$\overline{CS}\cup\overline{DS}\cup\overline{SA}\cup\overline{SB}$



如$\overline{CD}<\overline{CI}$時　最佳設計爲$\overline{CD}\cup\overline{DK}\cup\overline{AB}$

如$\overline{CD}>\overline{CI}$時　最佳設計爲$\overline{CI}\cup\overline{DK}\cup\overline{AB}$

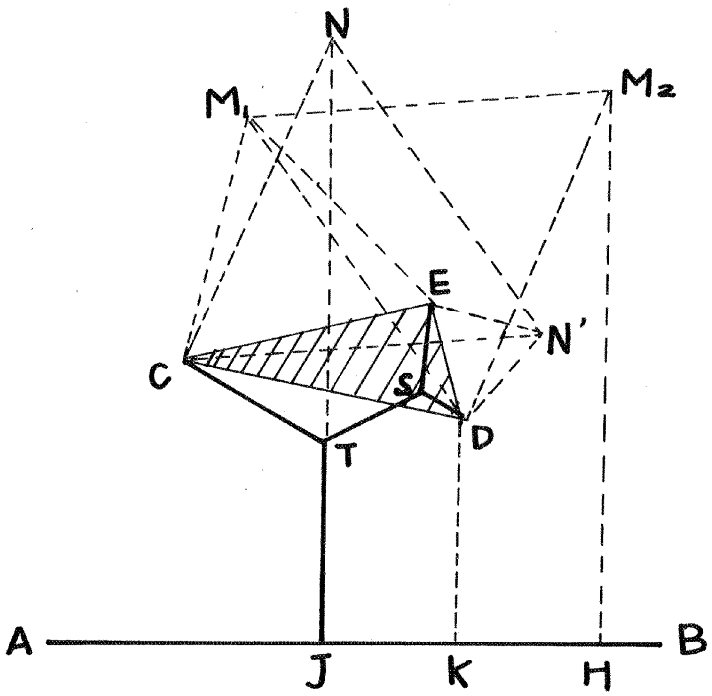
③C $\overline{CD}$與$\overline{AB}$相交時



最佳設計爲$\overline{CI}\cup\overline{DK}\cup\overline{AB}$

(3)主要幹道$\overline{AB}$之一側有 3 個村莊時，背著$\overline{AB}$將其中二點化成其等價點，則幹道一側僅得考慮二村莊，仿(2)即可得最經濟連路網:

如圖幹道$\overline{AB}$之一側有C、D、E，設計其最經濟連路網爲何？



①作$\overline{CE}$對△CDE之等價點M_1

作$\overline{M_1D}$對$\overline{AB}$之等價點M_2

M_2與$\overline{AB}$之最短距離爲$\overline{M_2H}$

M_1，D在M_2，H之同側

連接M_1，D，$\overline{AB}$之最經濟道路網全長爲$\overline{M_1D}+\overline{DK}$

②作$\overline{DE}$對△CDE之等價點N_1

作$\overline{N_1C}$對$\overline{AB}$之等價點N_2

N_2與$\overline{AB}$之最短距離爲$\overline{N_2J}$

連接C，N_1，$\overline{AB}$之最經濟道路網全長爲$\overline{N_2J}$

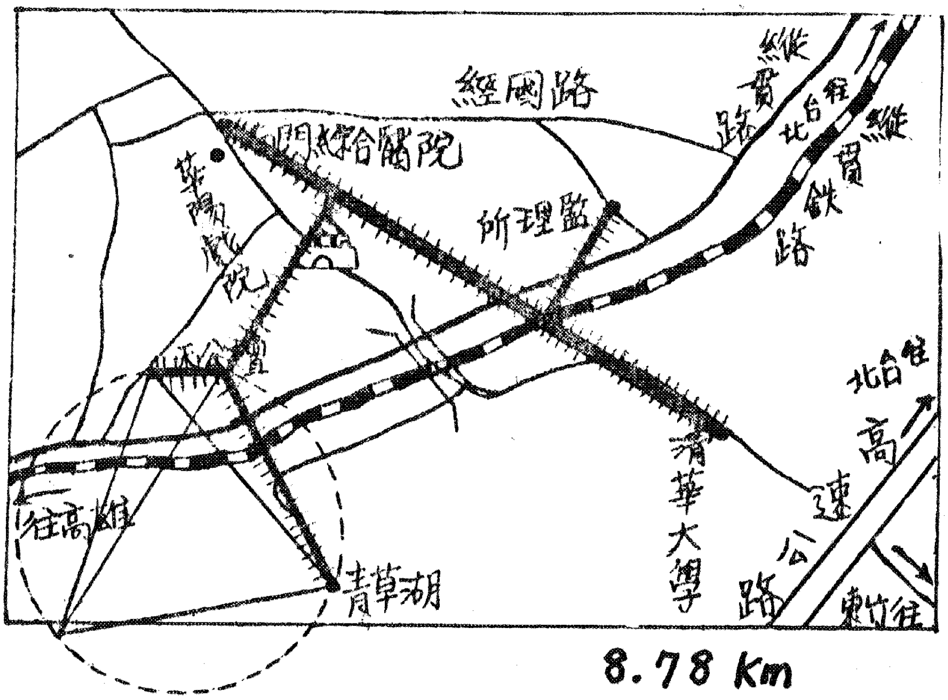
③比較$\overline{N_2J}$與$\overline{M_1D}+\overline{DK}$得$\overline{N_2J}<\overline{M_1D}+\overline{DK}$

④連接$\overline{AB}$，C，D，E之最經濟道路網

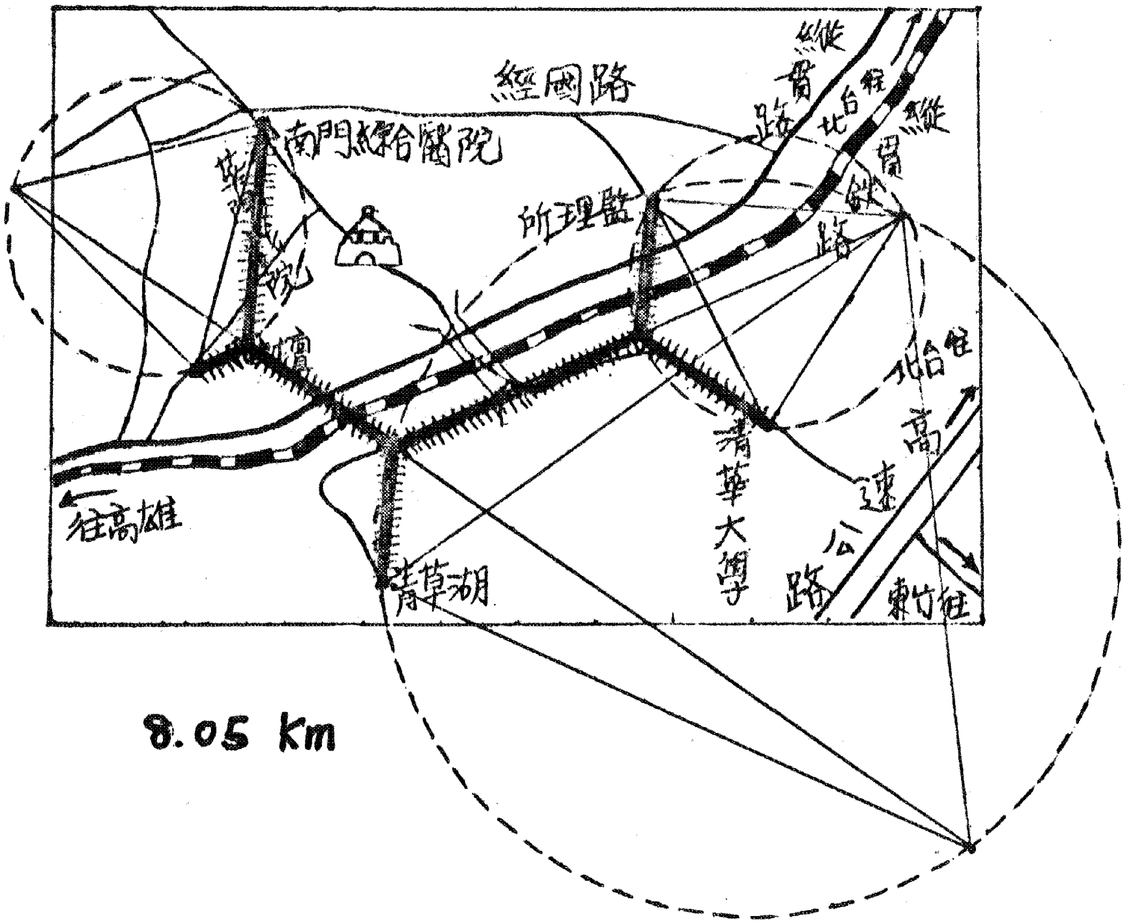
爲$\overline{ES}\,\overline{UD}\,\overline{SU}\,\overline{ST}\,\overline{UC}\,\overline{TU}\,\overline{TJ}\,\overline{UAB}$

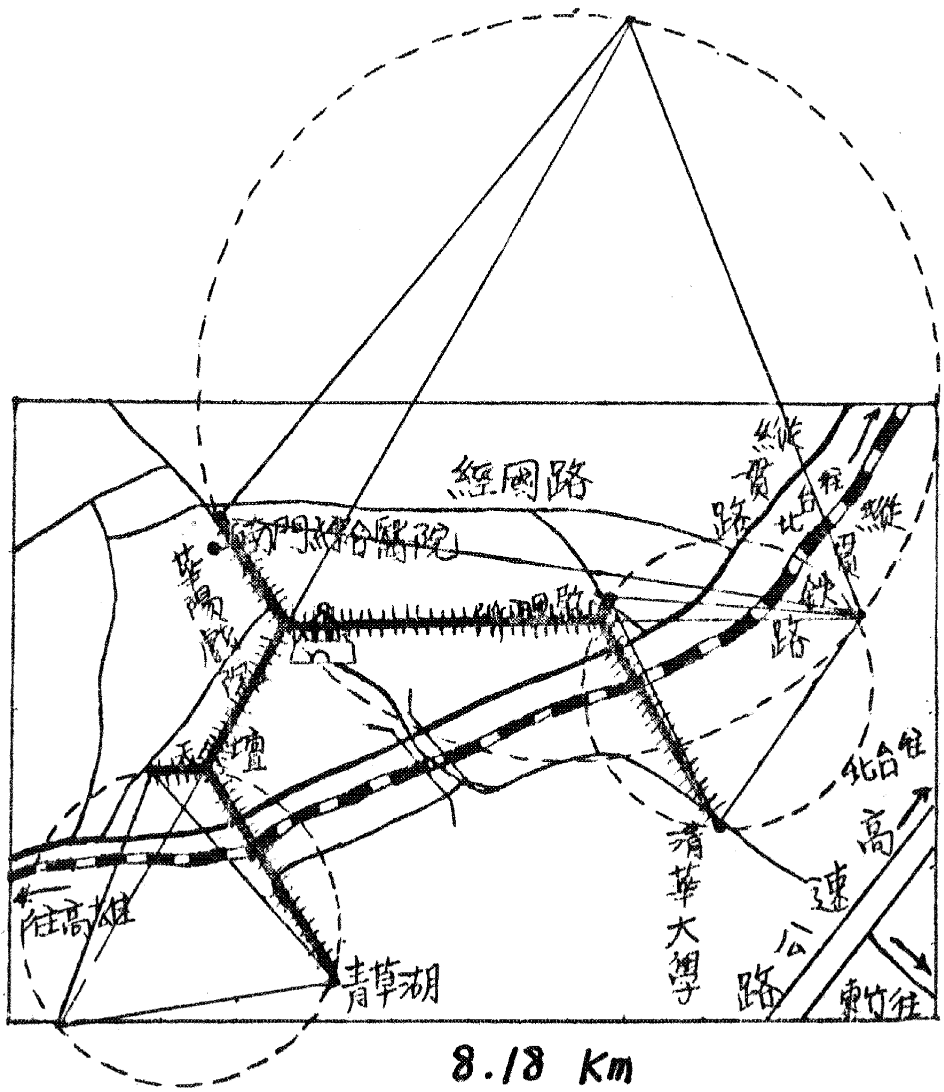
「論述 10 」：新竹市升格之後，爲實際需要，擬在市區建立一高架橋道路網，連接南門醫院、監理所、天宮壇、清草湖、清華大學，應如何設計，較爲理想。

比例 1 ： 54000

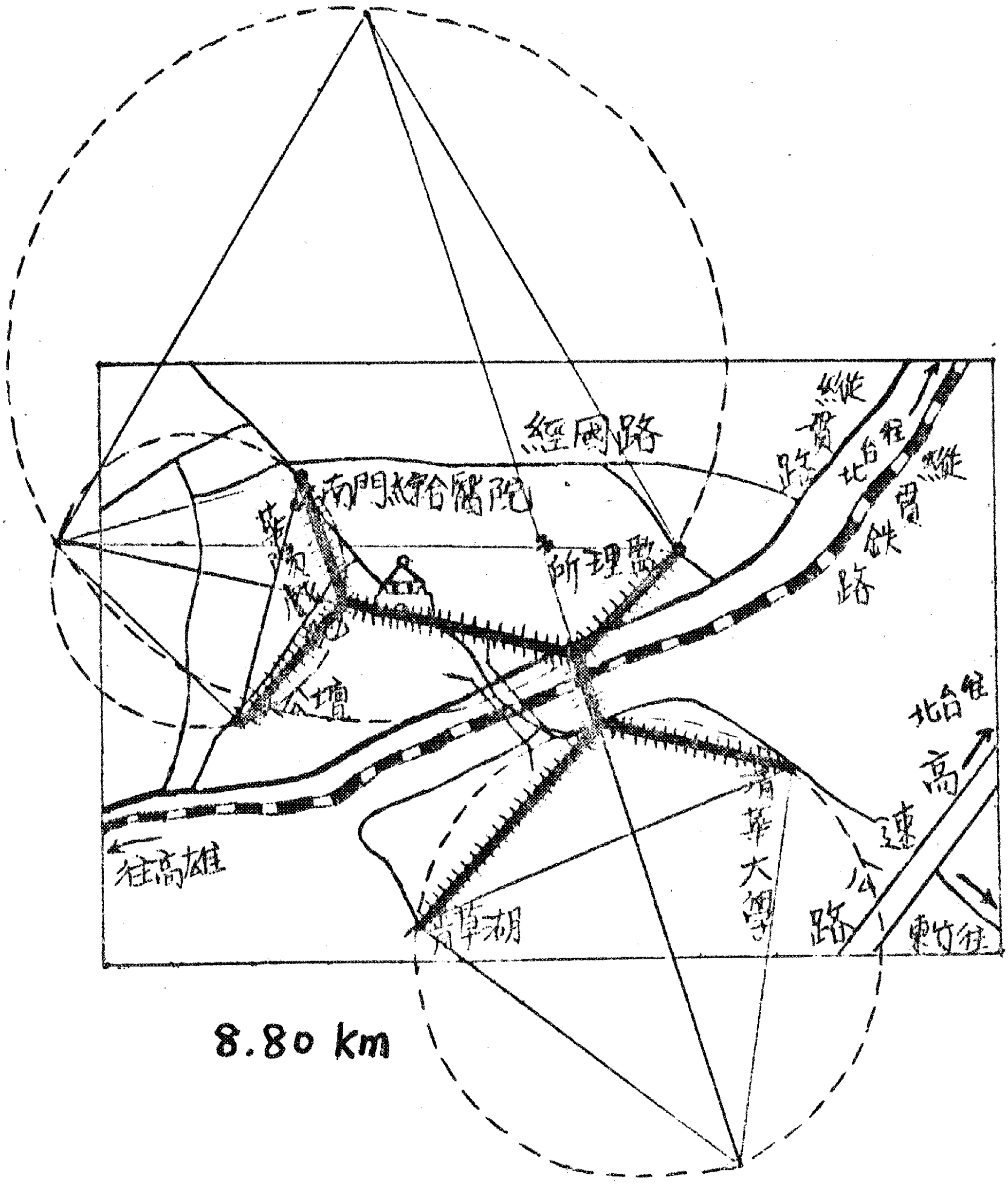


※最為經濟

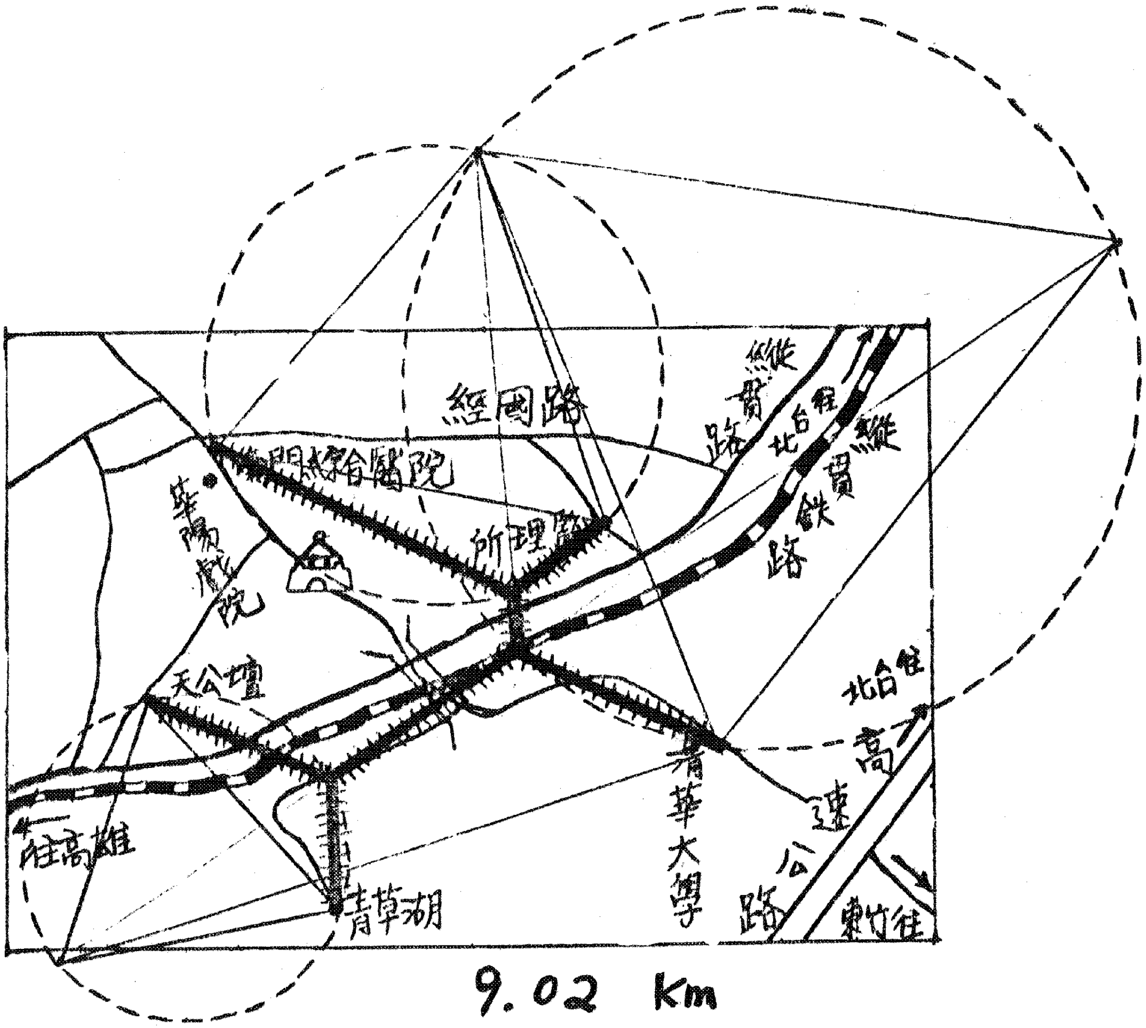




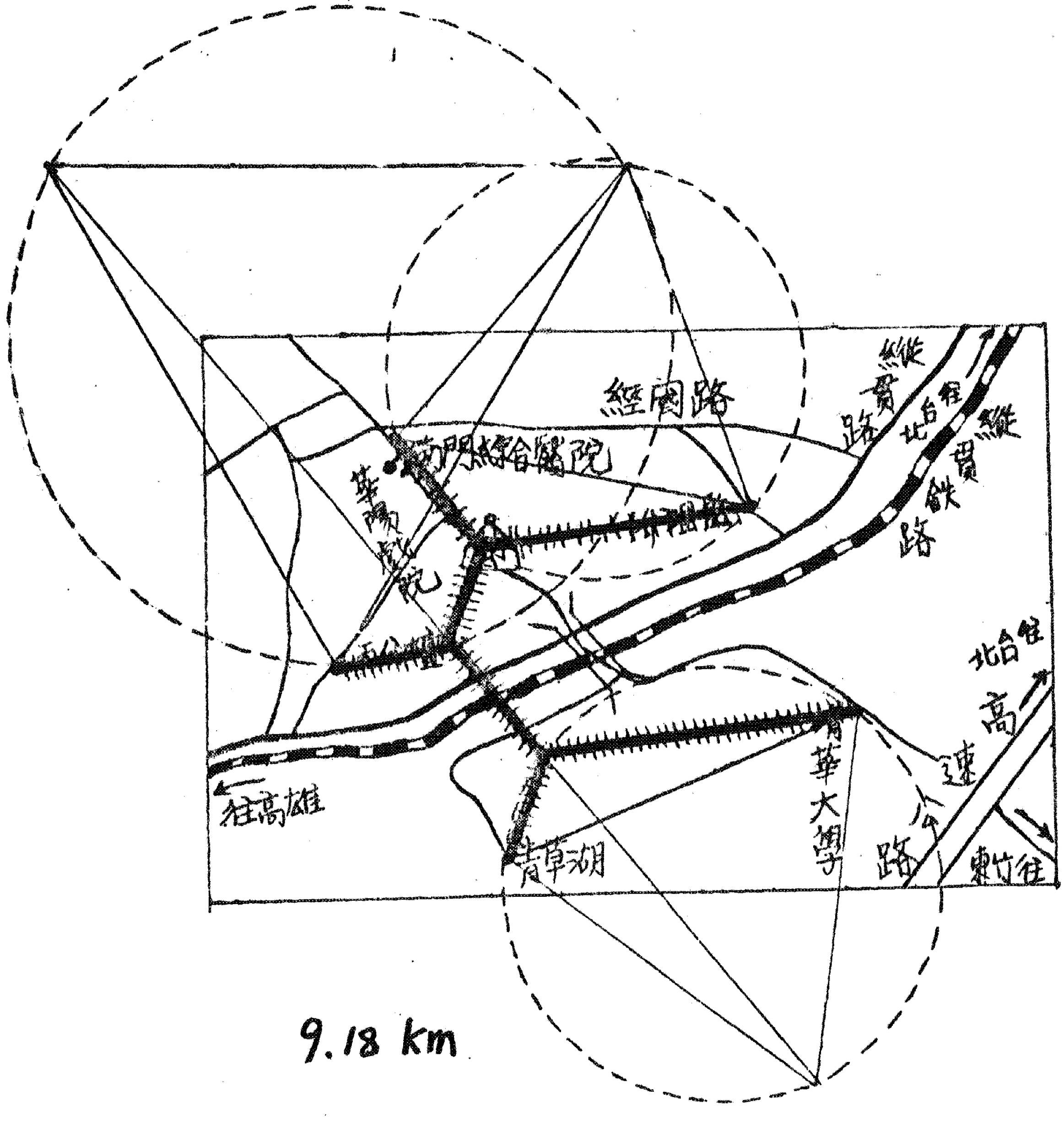
8.18 Km



8.80 km



9.02 Km


經國路
縱貫路
往台北
縱貫鐵路
往高雄
青草湖
清華大學
往台北
高速公路
往竹東
9.18 km

三結論與展望：

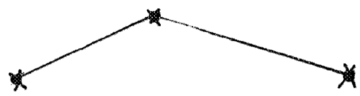
1. 結論：

(1)由以上討論，我們可以知道（連絡任意 n 個定點之最經濟連絡網是由經濟三叉路與經濟折線所組成之道路網）。就點數討論如下:

a 、當點數為 3 時，連絡三點之最經濟連絡網可能為

ⓐ直線（三點共線）

ⓑ經濟折線（有一內角不小於 120 °）



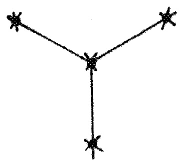
ⓒ經濟三叉路（三內角皆小於 120 °）

b 、當點數為 4 時，最經濟道路網有以下幾種可能：

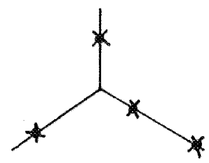
ⓐ直線（四點共線時）

ⓑ經濟折線

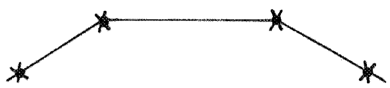
ⓒ經濟三叉路



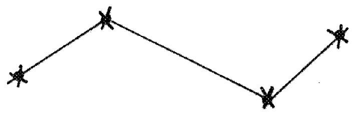
或



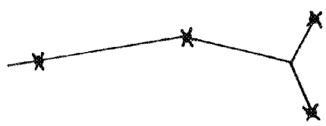
ⓓ二經濟折線之連結



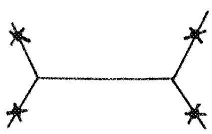
或



ⓔ一經濟折線，一經濟三叉路之連結



ⓕ二經濟三叉路之連結



至於點之位置與其適用情形，在(二)節中已作詳細之討論。

c 、四個以上的點，可以仿三點推測至四點時，利用等價點之方法，而求出最經濟的連絡道路網。

d、連接正三角形三頂點之最經濟道路網之全長爲$\sqrt{3}\,a$（其中a爲邊長）。

連接正方形四頂點之最經濟道路網之全長爲（$\sqrt{3}+1$）a

連接正五邊形五頂點之最經濟道路網之全長爲（$4\cos 6^\circ \cos 12^\circ$）$a = 3.8909\,a$

當$n \geqslant 6$時，連接正n邊形n個頂點之最經濟道路網之全長爲（$n-1$）a

(2)若考慮交通流量，而須開闢主要幹道時，可兼採〝最短距離〞與經濟連絡網的觀念。可得到較合乎理的設法。

(二)今後的展望：

本文係從〝經濟連絡網〞與〝主幹道〞的觀念來設計道路網。而主要幹道也只考慮2個村莊，今後可以將主幹道推廣至2個村莊以上，同時我們也可以再參考其他因素（如地形、地質……）等利用線性規劃的觀念將我們的設計，修正爲最理想。

四、參考資料：

(一)數學實驗本教材第三冊

(二)新竹市地圖與交通流量調查

（附錄）：

「定理證明1」：設A，B，C表不共線之三點，P爲△ABC所在平面上任一點，若存在一點Pm，使得$\overline{PmA}+\overline{PmB}+\overline{PmC}\leq\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$則Pm必不在△ABC的外部（即到A，B，C三定點距離和最小值之點Pm必不在△ABC的外部）。

（證明）：我們可將△ABC之外部分爲S，T二大區域：

(1)P在S_1區域時，則$\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{AB}+\overline{AC}$

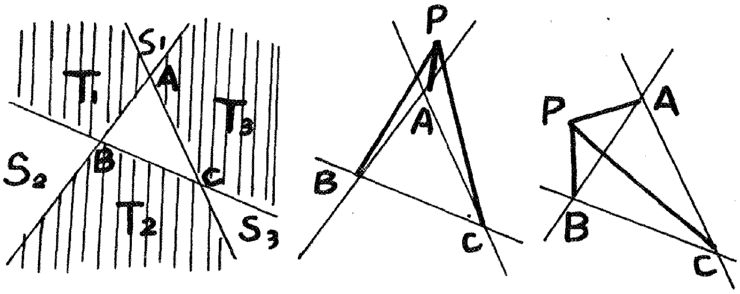
$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{AB}+\overline{AC}$，故$Pm\notin S_1$

同Pm′ S2，Pm S3 Pm不在S區域內

(2)P在T_1區域時（$P\in T2$，$P\in T3$同理）

令$\overline{PC}$交$\overline{AB}$於M　則($\overline{PA}+\overline{PB}$)$+\overline{PC}>\overline{AB}+\overline{MC}$

$\overline{Pm}\notin T1$，卽$\overline{Pm}$不在T區域內



註如$\overline{BC}>\overline{AB}$，$\overline{BC}>\overline{AC}$時$\overline{AB}+\overline{MC}>\overline{AC}+\overline{BC}$

由(1)(2)知Pm必不在△ABC之外部

「定理證明2」：若△ABC爲銳角三角形，且各以$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$爲一邊，向△ABC之外部各作正△ABC′，正△BCA′，正△CAB′，則$\overline{AA'}$，$\overline{BB'}$，$\overline{CC'}$共點，且$\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}$

（證明）：

(1)連$\overline{BB'}$，$\overline{CC'}$，令二線交於P點

則$\overline{AB}=\overline{AC'}$（△ABC′爲正△）

$\overline{AB'}\fallingdotseq\overline{AC}$（△ACB′爲正△）

$<BAB'\fallingdotseq<BAC+60°=<BAC'$

$\triangle BAB'\cong\triangle C'AC$

故$\overline{BB'}=\overline{CC'}$　　$<ABB'=<AC'C$

(2)在△ASC′與△BSP中

$<1=180°-(<ABB'+<BSP)$

$=180°-(<AC'C+<ASC')$

$=<SAC'=60°$

(3)作$\overrightarrow{AP}$，在$\overrightarrow{AP}$上取一點A′，使$\overline{AA'}=\overline{BB'}$（$=\overline{CC'}$）

(4)在$\overline{PC'}$上取一點Q，使$\overline{PQ}=\overline{BP}$，又$<1=60°$

∴△BPQ爲正△

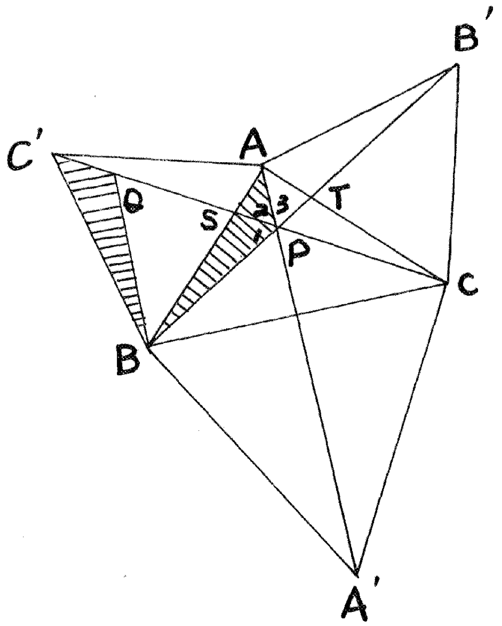
∵$\overline{BP}=\overline{BQ}$，$\overline{BA}=\overline{BC'}$，$<ABP=60°$

$-QBA=<C'BQ$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle C'BQ$

$\therefore \angle APB = \angle BQC' = 180^\circ - \angle BQP = 120^\circ$

$\therefore \angle 2 = 120^\circ - \angle 1 = 60^\circ \Rightarrow \angle APT = 180^\circ$
$- \angle 1 - \angle 2 = 60^\circ$



(5)在△APT與△CTB′中，$\angle 3$
$= 180^\circ - (60^\circ + \angle ATP)$
$= 180^\circ - (60^\circ + \angle CTB') = \angle 4$

(6)在△AA′C與△B′BC中
$\angle 3 = \angle 4$，$\overline{AA'} = \overline{BB'}$，$\overline{AC} = \overline{B'C}$
$\triangle AA'C \cong \triangle B'BC$　$\overline{A'C} = \overline{BC}$

(7)同理$\overline{A'B} = \overline{BC}$　　△A′BC爲一正三角形

(8)故$\overline{AA'}$，$\overline{BB'}$，$\overline{CC'}$交於一點P，　$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$

評語：以高中數學知識適切地應用到規劃問題上。