極限應用

高中組數學科第二名

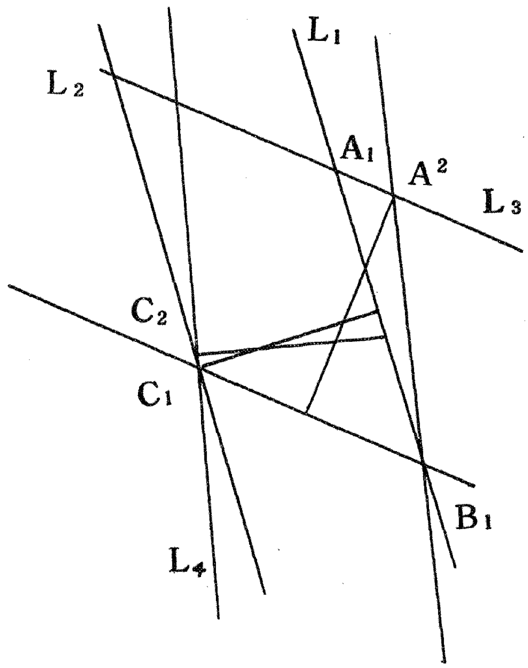
台灣省立嘉義高級中學　　作者：莊懷祜

指導老師：郭茂雄

一、動　　機

極限在近代數學中無異扮演者極重要的角色。但是在高中數學介紹了極限之後，我們却很少找到實際去應用的例子。有很多例子本可用極限的概念作一典型的描述，但是數學課本一直避而不談；我們看整個課程，除了切線、導數一部分採用極限的作法，極少數是以極限爲立論的根據。並且在一般學生的概念中，對於極限的定義都似懂非懂，原因是在於其抽象的證明。今天我們希望能藉此件作品來引起大家對於這個部分的重視。我們盡量少用證明，而多用實際運算來作這一些題目。我們只要先把握住一一一個（數列（點列）若收斂，則極限唯一）一一的觀念就可以做好下面的問題。

二、預備定理：P，Q在直線L同側欲在L上取R點



使$PR+QR$ 有極小值，只要將P對L作對稱點P' $P'Q\cap L$即爲所求之R點

※a $\triangle ABC=4\sqrt{3}$周長之極小值是什麼？

設$A_1B_1=L_1$

取$L_1 \parallel L_2$在L_1上取A_1,B_1二點$(A_1B_1=d_1=a, d\in L_1,L_2)$

$=\dfrac{8\sqrt{3}}{a}=h_1$

則C_1爲A_1B_1中垂直線L_2交點$B_1C_1=d_2$又如圖示，做$L_3\parallel B_1C_1$若以h_n 表第$(n-1)$次所劃之直線和底之距離

$h_2=d(L_3,B_1C_1)=\dfrac{8\sqrt{3}}{\frac{d_2}{2}}$，做$B_1C_1$中垂線和$L_3$交點爲$A_2$，令$A_2B_1=d_3$再作$C_2$與$A_2B_1$距$\dfrac{8\sqrt{3}}{d_3}=h_3$

我們可知所求的一系列點$C_1,A_2,C_2,A_3,C_3,\cdots\cdots$愈來愈逼近極小時之A，C點，又$d_n=\sqrt{(\dfrac{d_{n-1}}{2})^2+h_{n-1}^2}$而△之周長遞減，

又$d_nh_n=8\sqrt{3}\ \lim\limits_{n\to\infty}d_n=\lim\limits_{n\to\infty}d_{n-1}=\alpha,\alpha^2=(\dfrac{\alpha}{2})^2+(\dfrac{8\sqrt{3}}{\alpha})^2\Rightarrow\dfrac{3}{4}\alpha^4=8^2\cdot3\ \ \alpha^4=8^2\cdot4\Rightarrow\alpha=4$即$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=4$

即此解$\triangle ABC$爲正△

〔評〕—其實此類題目一般作法，並非如此，而是如F

(i) $s(s-a)(s-b)(s-c)=48$ 又 $\dfrac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}$

$\geq\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}\quad\sqrt[3]{s\cdot\dfrac{s}{3}}\geq\sqrt[3]{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

同時三次方

$s^4/27\geq48\quad s^4\geq48\cdot27\quad s\geq6$ 即$a+b+c\geq12$

即周長至少爲12，僅$a=b=c$時成立

L_1 ：x 軸 $L_e: x=y$ $s(2,1)$

$P \in L_1$ ，$Q \in L_2$ $\triangle PQS$ 周長之極小值？

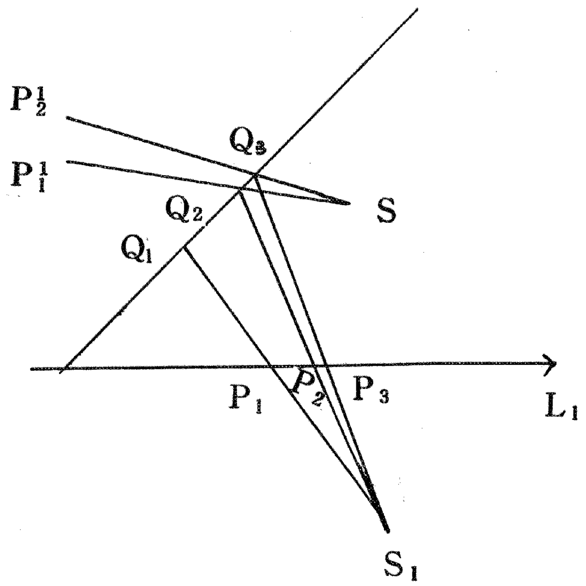
在 L_2 上任取一點作 Q_1 ，然後依據定理

將 s 對 L_1 作對稱點 s^1 ，Q_1 和 s' 連接起來 $Q_1 S \cap L_1 = P_1$，

然後 P_1 再作 L_2 之對稱點 P_1'，連 SP'_1 ，交 L_2 於 Q_2，依此類推

……設 $Q_n = (q_n, q_n)$ ，P_n (p_n, o) 然後我們得

$$p_n = \frac{3q_n}{q_n+1} \text{ 且 } q_{n+1} = \frac{2p_n}{p_n+1}$$



即 $q_{n+1} = \dfrac{2p_n}{p_n+1} = \dfrac{\frac{6q_n}{q_n+1}}{\frac{3q_n+1}{q_n+1}} = \dfrac{6q_n}{4q_n+1} \Rightarrow q_{n+1} = \dfrac{6q_n}{4q_n+1}$

$$p_{n+1} = \frac{3\cdot\frac{2p_n}{p_n+1}}{\frac{2p_n}{p_n+1}+1} = \frac{6p_n}{3p_n+1} \Rightarrow p_{n+1} = \frac{7p_n}{3p_n+1}$$

根據我們所作 $\triangle SP_nQ_n$ 之周長爲一減數列 $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_{n+1} = q$，$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} p_{n+1} = p$

$\Rightarrow q = \dfrac{6q}{4q+1}$ $4q+1 = 6 = q = \dfrac{5}{4}$（$\because q = o$ 不合）即 Q 點之

極限位置在（$\frac{5}{4}$，$\frac{5}{4}$）$\Rightarrow p=\frac{5p}{3p+1}$　$3p+1=6\Rightarrow p=\frac{5}{3}$

（∵ p＝o 不合）即 p 之極限位置在（$\frac{5}{3}$，o）即△PQS之周長

極小值在P（$\frac{5}{3}$，o），Q（$\frac{5}{4}$，$\frac{5}{4}$），S（2，1）時出現。

〔評〕—S（2，1）對L_1，L_2 做對稱點分別爲S_1，S_2，連S_1S_2

與L_1，L_2 交點，即爲所求。

註：對於一般的銳角Q內部一點，此方法仍然可行，答案依然相同，

對於直角或鈍角則不復成立。

下面是一個例子，用極限的方法，來求方程式的根

證明：$x=q\sin x+a$，$q\in(0,1)$ q，$a\in R$ 僅有一根

取數 x_0　$x_1=q\sin x_0+a$

$$x_2=q\sin x_1+a$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_n=q\sin x_{n-1}+a$$

設 $m>n$

$$x_2-x_1=q(\sin x_1-\sin x_0)=2q\sin\frac{x_1-x_0}{2}\cos\frac{x_1+x_0}{2}$$

$$\because |\sin\alpha|<|\alpha|,\ |\cos\alpha|<1$$

$$|x_2-x_1|\leq 2q\frac{|x_1-x_0|}{2}=q|x_1-x_0|$$

$$|x_3-x_2|\leq 2q\frac{|x_2-x_1|}{2}=q|x_2-x_1|$$

$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots$$

$$-)\ |x_{n+1}-x_n|\leq q|x_n-x_{n-1}|$$

$$|x_{n+1}-x_n|\leq q^n|x_1-x_0|$$

$$0\leq|x_m-x_n|=\left|\sum_{k=m+1}^{m}(x_k-x_{k-1})\right|\leq$$

$$\sum_{k=n+1}^{m}|x_k-x_{k-1}|\leq\sum_{k=n}^{m-1}q_n|X_1-X_0|=q^n\frac{1-q^{m-n}}{1-q}|x_1-x_0|$$

$$0 \leq \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\to\infty}} |\ x_m - x_n\ | \leq \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\to\infty}} q^n \frac{1-q^{m-n}}{1-q}\ |\ x_1 - x_0\ | = 0$$

即 $\underset{n\to\infty}{n\to\infty}\quad x_n = x_m$

故 $< x_m >$ 有尾梢 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \epsilon \Rightarrow \epsilon = q \sin \epsilon + a$

即 ϵ 爲 $x = q \sin x + a$ 之一根

若方程式尙有另一根爲 ϵ'

$\epsilon' = q \sin \epsilon' + a$ 即 $|\ \epsilon' - \epsilon\ | \leq q\ |\ \epsilon' - \epsilon\ |$（由前可知）

但 $q < 1$，故上式欲成立 $\epsilon' = \epsilon$

即 ε 爲 $x = q \sin x + a$ 之唯一根

（註：此方程式爲著名之刻卜勒方程式）

本例：取自 Smirno "A Course in Higher Mathematics" .

三、結　論

這種用極限的方法來解題目，乍看之下比起原來的解法那種快和簡明是大有不同的，也就是說，不但慢而且不容易完成。如例三的刻卜勒方程式，我們或許可用牛頓法，級數展開法來求其一般近似解，但是操作上就略嫌麻煩。假如我們使用的是冪級數展開來作，對於二次、三次方程式解的過程就須要電子計算機以求精確性，而且每一次所作的計算工作也是很可觀，如果我們改用極限的方法，只要不斷的按動 sin 鍵，就可以求得相當精確的答案，比起冪級數法、牛頓法，自然有其方便之處，再就例二而言，這個作法可以正確的表達出每個點 P_n，Q_n 都在漸漸地向 P Q 接近，這一點可由另一種觀點看下，我們做 S 對於 L_1L_2 之對稱點 S'，S''。P_i 和 S' 連線交 L_2 之交點即爲 Q_{i+1}，Q_{i+1} 和 S'' 之連線交 L_1 於 P_{i+1}，如此形成 P_i，Q_{i+1} P_{i+1} 之遞迴式，我們可以看出 $\angle S''P_iS'$ 和 $\angle S'Q_iS''$ 均在漸漸的 $\rightarrow 180°$，就是說 S'，P，Q，S'' $\rightarrow$ 共線，這就是爲什麼做對稱點後連線段的由來。我們因此可以知道所謂極限的方法和一般所謂的正式解法（一般解法）其實在實際上的意義上，他們有相同的來源，

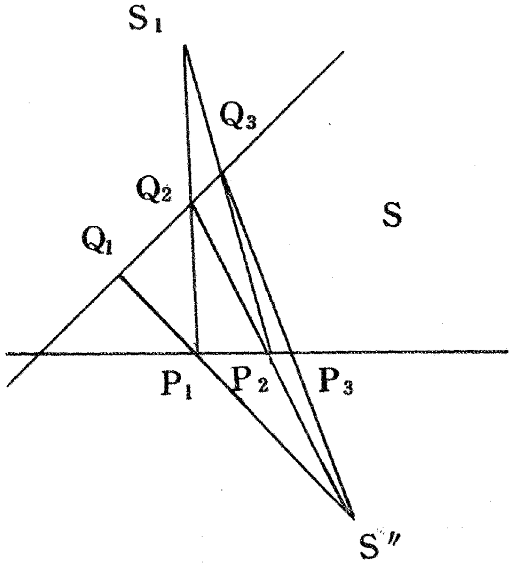
而且得到完全一致的結論。

茲再舉數例如下：

1. 圓之內接 n 邊形中以正 n 邊形面積最大

2. 銳角△ABC在AB，BC，CA上各取一點P，Q，R，△PQR之周長極小值在什麼時候發生？

3. P爲△ABC內部一點，PA，PB，PC爲a, b, c,求A，B，C的相對位置，使△ABC有最大面積？



評語：將幾個問題的已知結論以極限（及對稱）之看法推論之。具創新的概念。