三角函數值表上那些方爲眞值

高中組數學科第一名

高雄市前鎮高中　　作者：洪振富

指導老師：吳建生

一、研究動機

上學期數學上到數理本第三册第三章三角函數時，我對附錄之三角函數值表產生了疑問？當然此表來源老師曾說由某些我們未學到的公式導出，但此表內是眞值或近似值如何以我們現有的數學程度判別。當然有些可無置疑的如 $cos60° = 0.5000$ 爲眞值 $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteqdot 0.8660$ 爲近似值，而若是非特別角如表上查出 $cos21.3° = 0.9317$ 到底是否眞值，我問過老師，他曾提示我，研究一些角度的值是否爲有理數，說不定可解決問題，於是花了幾個月的時間，斷斷續續的研究，最後得到幾個有用的結論，而解決上述之問題，在導出結論的過程中我利用到了一些第一、二册所學的東西，如小數、有理、無理數、多項式、因數、倍數的概念、性質及三角公式、特別角、數學歸納法、輾轉相除法、一次因式檢驗法反證法（有理根之判別）等，使我對數學的連貫性、整體性、綜合應用性有了更進一步的了解。

二、說　　明（內容簡要）

1. 由引理(1)、(2)導出引理(3)

   引理(3)：若 $x \in N$　$x \neq 60$　$1 \leqslant x \leqslant 89$ 則 $cosx° \in R \setminus Q$

2. 由 1. 導出結論(1)、(2)

   結論(2)：若 x 爲有限小數且 $60 \nmid x$，$90 \nmid x$ 則 $cosx° \in R \setminus Q$

   結論(1)：若 $x \in Q$　$x = \frac{q}{p}$　p，$q \in N$（p，q）$= 1$，

   $90 \nmid q$，$60 \nmid q$ 則 $cosx° \in R \setminus Q$

3. 由結論(1)、(2)得知表內餘弦只在 $0°$ ，$60°$ ，$90°$ 為眞值，正弦在 $0°$ 、$30°$ 、$90°$ ，正切在 $0°$ 、$45°$ ，餘切在 $45°$ 、$90°$ 才為眞值而解決了問題。

4. 應用到幾何上的兩個例子。

5. 指導老師的意見

(一)進一步可得到結論(3)

結論(3)：

若 $x=\dfrac{k\cdot 90}{n}$，n、$|k\in N$ $(k\cdot 90, n)=1$ 且 $n\neq 1$

$k=2$ 或 $4M+1$ 或 $4M+3$ $M\in N\cup\{0\}$ 則 $\cos x°\in R\setminus Q$。

(二)尚差幾小步即可得完美的結論

完美的結論：若 $0<x<90$，$x\in Q$ $x\neq 60$ 則 $\cos x°\in R\setminus Q$

(三)：本作品與第 12 屆全國科展高中學生數學組第一名作品之參照比較。

三、內　　容

1. 引理(1)：任意 $n\in N$，$\cos n\theta$ 可表成 $\cos\theta$ 之多項式，即

$\cos n\theta=f(\cos\theta)$ 且 $\deg f(x)=n$

證明：

在公式 $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ 中令 $\alpha=(n-1)\theta$ $\beta=\theta$ 得 $\cos n\theta=2\cos(n-1)\theta\cdot\cos\theta-\cos(n-2)\theta$ ☆

用數學歸納法：

(a)令 $n=2$ 得 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ 成立

$n=3$ 得 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ 成立

(b)假設 $n=k-1$ 及 k 成立

即 $\cos k\theta=f_1(\cos\theta)$，$\cos(k-1)\theta=f_2(\cos\theta)$

且 $\deg f_1(x)=k$，$\deg f_2(x)=k-1$

則 $n=k+1$ 時代入☆式

得 $\cos(k+1)\theta=2\cos\theta f_1(\cos\theta)-f_2(\cos\theta)=$
$f(\cos\theta)$ 且 $\deg f(x)=k+1$

引理(2)：若 $\cos\theta\in R\setminus Q$ 則任意 $n\in N$，$\cos\dfrac{\theta}{n}\in R\setminus Q$

證明：（反證法）

若 $\cos\dfrac{\theta}{n}\in Q$ 由引理(1) $\cos\theta=\cos n\cdot\dfrac{\theta}{n}=f(\cos\dfrac{\theta}{n})\in Q$

與已知矛盾，故得證。

引理(3)：任意 $x\in N$，$1\leqslant x\leqslant 89$，$x\neq 60$ 則 $\cos x^\circ\in R\setminus Q$

證明：

a.當 $x\mid 360$ 時（計有 1，2，3，5，6，8，9，10，12，15，18，20，4，24，30，36，40，45，72）

(A)由 $\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in R\setminus Q$ 由引理(2)得 $x=1,3,5,9,15,45$ 時 $\cos x^\circ\in R\setminus Q$

(B)由 $\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\in R\setminus Q$ 知 $x=2,6,10,30$ 時成立

（重覆不計）

(C)由 $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ 可求出 $\cos$ 的 12°，18°，24°，36°，72° 值可發現其全帶平方根號易知爲無理數又 $4\mid 24$，$8\mid 24$ $\therefore x=8,4,12,18,24,36,72$ 時成立。

(D)在 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ 中令 $\theta=20^\circ$ $y=\cos 20^\circ$ 得 $8y^3-6y-1=0$ 依一次有理因式檢驗法判別出無有理根 $\therefore y=\cos 20^\circ\in R\setminus Q$

又 $\cos 20^\circ=-\cos 160^\circ$，$40\mid 160$ $\therefore x=20,40$ 時成立，由(A)、(B)、(C)、(D)故得證。

b.當 $x\nmid 360$ 時令 $(360, x)=d$ $\because d\mid x$，$1\leqslant x\leqslant 89$ $x\neq 60$ $\therefore d\neq 60$ 又 $d\mid 360$ 由(1)得 $\cos d^\circ\in R\setminus$

Q，今用輾轉相除法可知存在n_1，$n_2 \in Z$使得

$360 \cdot n_1 + xn_2 = d$ 則 $\cos(xn_2)^\circ = \cos(360n_1 + xn_2)^\circ$

$= \cos d^\circ \in R \setminus Q$ 由引理(2) $\therefore \cos x^\circ = \cos\left(\dfrac{xn_2}{n_2}\right)^\circ \in$

$R \setminus Q$　由a.、b.故得證

2. 結論(1)：若$x \in Q$，$x = \dfrac{q}{p}$　p，$q \in N$（p，q）$= 1$，

$90 \nmid q$ ，$60 \nmid q$ 則 $\cos x^\circ \in R \setminus Q$　※$\cos\theta = \cos(-\theta)$ 故可令$x > 0$

證明：

a.先證$\cos q^\circ \in R \setminus Q$　若$0 < q < 90$ 則令$q' = q$ (A') 否則由三角公式可找出q''及q' 而$0 \leqslant q' \leqslant 90$，$0 \leqslant q'' \leqslant 360$ 使得$q = 360m + q''$，$m \in N \cup \{0\}$

而且

(A)若$0 < q'' \leqslant 90$ 則$q'' = q'$ 即$q = 360m + q'$

(B)若$90 < q'' \leqslant 180$ 則$q'' = 180 - q'$ 即$q = 360m + 180 - q'$

(C)若$180 < q'' \leqslant 270$ 則$q'' = 180 + q'$ 即$q = 360m + 180 + q'$

(D)若$270 < q'' \leqslant 360$ 則$q'' = 360 - q'$ 即$q = 360m + 360 - q'$

其中$\cos q^\circ = \cos q''^\circ = \pm\cos q'^\circ$

若$q' = 0$或60或90 則由(A)(B)(C)(D)（A）知$60 \mid q$或$90 \mid q$與已知矛盾$\therefore 1 \leqslant q' \leqslant 89$ 且$q' \neq 60$ 由引理(3)　$\cos q'^\circ \in R \setminus Q \therefore \cos q^\circ = \pm\cos q'^\circ \in R \setminus Q$

b.由引理(2)　$\cos x^\circ = \cos\left(\dfrac{q}{p}\right)^\circ \in R \setminus Q$

結論(2)：若x為有限小數（含整數）且$60 \nmid x$，$90 \nmid x$ 則$\cos x^\circ \in R \setminus Q$

證明：

可令 $x=\dfrac{q}{p}$ 　p，$q\in N$，$(p,q)=1$ 　$p=2^{M_1}5^{M_2}$

M_1，$M_2\in N\cup\{0\}$

則 a.若 $p=1$ 得 $x=q$ 即 $60\nmid q$ ，$90\nmid q$

b.若 $p\neq 1$ 也得 $60\nmid q$ ，$90\nmid q$ 否則 $(p,q)\neq 1$

矛盾　故由結論(1)得證。

3. 例如前面提到表上之 $\cos 21.3^\circ=0.9317$ 是否爲眞值則 $\cos 21.3^\circ$

$=\cos\left(\dfrac{213}{10}\right)^\circ$ 又 $\cos 213^\circ=-\cos 33^\circ$ $\therefore \cos 33^\circ\in R\setminus Q$ $\therefore$

$\therefore \cos 213^\circ\in R\setminus Q$ 故 $\cos 21.3^\circ\in R\setminus Q$ 故 0.9317 爲近似值

依前面結論得知在三角函數值表內

(1)餘弦只在 $\cos 0^\circ=1.0000$，$\cos 60^\circ=0.5000$，$\cos 90^\circ=0.0000$ 爲眞值（有理數）其他都是近似值（無理數）

(2)由 $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$ 知正弦只在 0°，30°，90° 爲眞值

(3)由 $\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ 可知正切只在 0°，45° 爲眞值

證明：

(a) $\tan 45^\circ=1.0000$，$\tan 0^\circ=0.0000$

(b)令 $0^\circ<\theta<45^\circ$　$\theta\neq 30^\circ$　θ 爲有限小數假定

$\tan\theta\in Q$ 則 $\cos 2\theta\in Q$ 又 $0^\circ<2\theta<90^\circ$　$2\theta\neq 60^\circ$

2θ 爲有限小數，由結論(2)得 $\cos 2\theta\in R\setminus Q$ 矛盾

故 $\tan\theta\in R\setminus Q$ 又 $\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\in R\setminus Q$

再由 $\tan\theta\cdot\tan(90^\circ-\theta)=1$ 可知當 $45^\circ<\theta<90^\circ$ 時

$\tan\theta\in R\setminus Q$ 故 $\tan\theta\in R\setminus Q$ 當 $0^\circ<\theta<90^\circ$　$\theta\neq 45^\circ$

(4)由 $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$ 知 $\cot\theta\in R\setminus Q$ 當 $0^\circ<\theta<90^\circ$

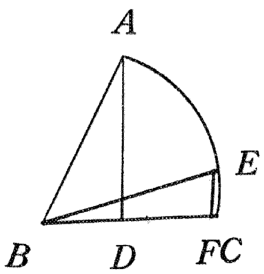
$\theta\neq 45^\circ$　故餘切只在 45°，90° 時才爲眞值

由(1)(2)(3)(4)本問題完全解決

4. 幾何上的兩個例子

例(一)：

如圖(一)之扇形半徑 $\overline{AB}\in Q$　$\overline{AB}$ 之投影長 $\overline{BD}\in R\diagdown Q$ 則將 $\angle ABC$ 任意 n 等分 $n\in N$ 其中一等分爲 $\angle EBC$ 則 $\overline{BE}$ 之投影長 $\overline{BF}\in R\diagdown Q$（由引理(2)即知）



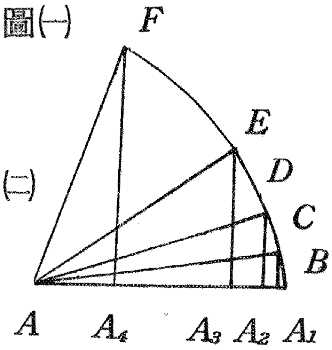
圖(一)

例(二)：

如圖(二)在以 $\overline{AB}\in Q$ 爲半徑之圓內先作 $\angle CAB=11°$ 而得投影長 $\overline{AA_1}=a_1$ 再作 $\angle DAB=2\angle CAB$ 得投影長 $\overline{AA_2}=a_2$ 再作 $\angle EAB=2\angle DAB$ 得 $\overline{AA_3}=a_3$ ……………

如此得一無窮數列 a_1, a_2, a_3 ……

則全是無理數。



圖(二)

證明：

由三角公式得 $a_n=\overline{AB}\cdot\cos x°$　$0\leqslant x\leqslant 90$ 且 $x\in N$，$n\in N$，$m\in N\cup\{0\}$ $11\cdot2^{n-1}=360m+180\pm x$ 或 $11\cdot2^{n-1}=360m\pm x$ 得 $30\mid 11\cdot2^{n-1}\pm x$ 若 $a_n\in Q$ 則 $\cos x°\in Q$ 故得 $x=0$ 或 60 或 90 而知 $30\mid x$

故 $30\mid 11\cdot2^{n-1}$ 但 $(3, 11\cdot2^{n-1})=1$ 故矛盾而得證

5. 指導老師的意見

a. 進一步可得結論(3)

結論(3)：

$$\text{若 } x=\frac{k\cdot 90}{n} \qquad k, n\in N \quad (k90, n)=1 \quad n\neq 1$$

且 $k=4M+1$ 或 $4M+3$ 或 2　$M\in N\cup\{0\}$

則 $\cos x°\in R\diagdown Q$

證明：

(a)引理(4)

若 p 爲質數 $p\neq 2$ 且令 $y=\cos\theta$

則 $\cos p\theta=2^{p-1}y^p+a_{p-2}y^{p-2}+a_{p-4}y^{p-4}+\cdots\cdots$

$+a_3p^3 \pm py$ 且 $p \mid a_{p-2}$，$p \mid a_{p-4}$……，$p \mid a_3$

證明：

由複數之棣美佛定理

$(\cos p\theta + i\sin p\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^p$

$\therefore \cos p\theta = R_e[(\cos\theta + i\sin\theta)^p]$（二項式展開）

$= C_0^p(\cos\theta)^p - C_2^p(\cos\theta)^{p-2}(\sin\theta)^2 + C_4^p(\cos\theta)^{p-4}$

$(\sin\theta)^4 + \cdots\cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} C_{p-1}^p \cos\theta(\sin\theta)^{p-1}$

$= C_0^p y^p - C_2^p y^{p-2}(1-y^2) + C_4^p y^{p-4}(1-y^2)^2 +$

$\cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} C_{p-1}^p y(1-y^2)^{\frac{p-1}{2}}$ 合併可知首項

為 $(C_0^p + C_2^p + C_4^p + \cdots\cdots + C_{p-1}^p)\, y^p = 2^{p-1}y^p$

末項為 $(-1)^{\frac{p-1}{2}} C_{p-1}^p y = \pm py$

而其他一般項（$k \in N$，$k \leqslant \frac{p-3}{2}$）

$a_{p-2k}y^{p-2k} = \pm[C_{2k}^p + C_{2k+2}^p(K+1) - C_{2k+4}^p(k+2)$

$+ \cdots\cdots]\, y^{p-2k}$

$\because p$ 為大於 2 之質數且無 C_0^p，C_p^p 型式

$\therefore p \mid C_{2k}^p$ $p \mid C_{2k+2}^p$………得 $p \mid a_{p-2k}$

故 $p \mid a_{p-2}$，$p \mid a_{p-4}$……，$p \mid a_3$

(b)若 $x = (\frac{k \cdot 90}{n})$　$k=4M+1$ 或 $4M+3$ 時 $\exists \mid P$

為 n 之質因數且 $p \neq 2$

則 $\cos(k \cdot 90)^\circ = \cos p(\frac{k90}{p})^\circ$ 令 $y = \cos(\frac{k90}{p})^\circ = \cos\theta$

由引理(4)

$\cos(k \cdot 90)^\circ = \cos p\theta = 2^{p-1}y^p + a_{p-2}y^{p-2} + \cdots + a_3y^3$

$\pm py$ 又 $k=4M+1$ 或 $4M+3$ $\therefore cos(k\cdot 90)^\circ=0$

則可見 $cos(\frac{k\cdot 90}{p})^\circ$ 爲 $2^{p-1}y^p+a_{p-2}y^{p-2}+\cdots\cdots+$

$a_3y^3\pm py=0$ 之一根又 $cos(\frac{k90}{p})^\circ\neq 0$ 故爲

$2^{p-1}y^{p-1}+a_{p-2}y^{p-3}+\cdots\cdots\pm p=0$ 之一根

由引理(4)：$p\mid a_{p-2}$，$p\mid a_{p-4}\cdots\cdots p\mid a_3$，

$p\mid p$ 又 $p^2\nmid p$，$p\nmid 2^{p-1}$ 依整係數多項式，在

Q 中是質式，之存在判別定理知其無有理根

故吾人得 $cos(\frac{k\cdot 90}{n})^\circ\in R\diagdown Q$

由 $p\mid n\rightarrow cos(\frac{k\cdot 90}{n})^\circ\in R\diagdown Q$

(c) $k=2$ 時同理 $\exists p$ 爲 n 之質因數 $p\neq 2$ 此時

此時 $cos(\frac{180}{p})^\circ=cos(2\cdot\frac{90}{p})^\circ=2cos^2(\frac{90}{p})^\circ-1$

在(2)中令 $k=4M+1=1$ 時得 $cos(\frac{90}{p})^\circ$ 爲上述方

程式 $2^{p-1}y^{p-1}+a_{p-2}y^{p-3}+\cdots\cdots+a_3y^2\pm p=0$

一根

上式左邊全爲偶次項故可令 $x=y^2$

得 $2^{p-1}x^{\frac{p-1}{2}}+a_{p-2}x^{\frac{p-3}{2}}+\cdots\cdots+a_3x\pm p=0$

同理可判別出 $x\in R\diagdown Q$ 顯然

顯然 $cos(\frac{180}{p})^\circ=2x-1\in R\diagdown Q$ 故得 $cos(\frac{180}{p})^\circ$

$\in R\diagdown Q$　綜合(2)(3)得證

b.但下列兩個問題一直沒辦法解決

(1) $x=\frac{k\cdot 90}{n}$ 時　$k=4M$，$4M+2$　（$k\neq 2$）時

$\forall x$，$\cos x°$ 是否為無理數？

(2) $x=\dfrac{k\cdot 60}{n}$時　（$k\neq 3$）時

$\forall x$，$\cos x°$ 是否為無理數？

換而言之，結論(3)尙未理想若(1)(2)之答案是肯定時，則得結論(4)　（※結論(3)只是結論(4)一部分）

結論(4)：

若 $x\in Q$，$x=\dfrac{q}{p}$，$p\cdot q\in N$（p，q）$=1$

且 $90 \mid q$ 或 $60 \mid q$ 又 $60 \nmid x$，$90 \nmid x$（$p=1$時）

則 $\cos x°\in R\setminus Q$

而由結論(1)(4)可得結論(5)

結論(5)：

若 $0<x<90$，$x\in Q$　$x\neq 60$

則 $\forall x$，$\cos x°\in R\setminus Q$（※若 $x\notin$（0，90）可先化成鋭角）到此吾人相信，此問題的發展已告一段落了，那麼結論(4)成立否？

c.本人去年在五福國中參加高市科學教師講習時，得到一份資料卽第 12 屆全國科展高中學生數學組第一名作品題目爲「頂點坐標爲 I × I 中元素之正多邊形」

其內容大要是由硏究何種正多邊形之諸頂點坐標爲 I × I 之元素爲出發點再加上代數整數之一些觀念而導出結論㈣☆

結論㈣☆：

若 $\theta / \pi\in Q$　$\cos\theta\in Q$ 則 $\cos\theta\in\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$

各位將很容易發現結論㈣☆與結論(4)等値，而結論(1)導出結論(2)，並且本作品之結論(1)與它的結論㈣☆是恰互補的兩回事，而本作品的結論(3)是結論㈣☆的一部分，但可貴的是結論㈣☆彌補了本作品的缺陷，而確定最後的可貴結果結論(5)成立，「相得益彰」在此我們可領會此句成語的含意了。

最後我們再提一次此完美的結論即結論(5)

若 $0 < x < 90$，$x \in Q$　$x \neq 60$

則 $\forall x$　$\cos x^\circ \in R \setminus Q$（同理 $\sin$ 在 $x \neq 30$ $\cot \cdot \tan$ 在 $x \neq 45$）

評語：取材甚佳，想法具創意，內容亦充實。