

透過數學的模式研究民生主義

國中教師組數學第三名

高雄市光華國中

作者：張簡永福、蔡富雄

一、前言

人類社會的現象可說是錯綜複雜，其影響的因素甚多，故一切社會科學的理論及決策，往往必須透過數學的模型，給予簡化，並藉此印證實際現象，更提供往後更深入的研究。雖然數學模式不能切實代表實際現象，然而它可提供一個近似的模型，如我們常見報紙登載說：今年預計我國經濟成長率為 7.5%，難道這是自我吹噓，無憑無據的嗎？答案是不對的，原來那是透過國民所得的理論模型下而估計的，現在吾人也欲想透過一套數學的模式而對民生主義，何以主張均富？何以民生主義是解決民生問題中最完美的主義？及一些政府決策，提出一個新註解更能使其理論有所依據。

二、研究內容與全文

讓我們首先依（人類基本心理）給予以下五個假設：

假設(1)：若一個人擁有財富，則這財富必定會帶給他某種程度的滿足感（ Satisfaction ）。

假設(2)：滿足感是可以計數的（ Cardinality ）。

假設(3)：決定一個人的滿足感只有二種因素

A.自己所擁有的財富。

B.外界對他施或取的財富。

假設(4)：個人擁有的財富愈多，則外界所對其施或取的財富而引起滿足感的變化較少。

假設(5)：當外界給予（施）他財富，若與其擁有的財富之比例大

到某種程度以上，則他所增加的滿足感會有劇增的現象。相反地當外界獲得（取）他的財富，若與其擁有的財富之比例小到某種程度以下，則他所減少的滿足感會有劇減的現象。

根據以上的五個假設，作以下幾個定理。

定義(1)：以 S 表是滿足感， G 表外界對其施或取的財富（其中 G 值以正的表施，以負的表取）， W 表自己所擁有的財富。則 S 是 G 與 W 的函數。讓 $S = f_w(G, W)$ ，（其中 $f_w(G, W)$ 表自己擁有財富 W ，外界再施取財富 G 的總滿足感）。

定義(2)： $f_w(G, W) = f_w(O, W) + f_w(G, O)$

其中 $f_w(O, W)$ 表自己所擁有財富 W 的滿足感。

$f_w(G, O)$ 表自己當擁有 W 時，外界所施或取 G 後，滿足感的變化值，也就是 ΔS 。

定義(3)： $\Delta S = f_w(G, O) = \int_{W}^{W+G} \frac{1}{x} dx + g\left(\frac{W+G}{W}\right)$

其中函數 g 類似脈衝函數 (impulse function)

定義 g 函數如下：

$$g\left(\frac{W+G}{W}\right) \begin{cases} = 0 & \text{當 } \alpha \leq \frac{W+G}{W} \leq \beta \quad \alpha, \beta \text{ 為兩定實數} \\ < 0 & \text{當 } \frac{W+G}{W} < \alpha \\ > 0 & \text{當 } \frac{W+G}{W} > \beta \end{cases}$$

且 g 是一個增函數〔也就是當 $x_1 > x_2 \rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$ 〕。

現在我們根據以上的數學模型，做如下的研究。

問題(1)：

假定有一個很簡單的國家，只有 A, B 二人所構成，A 擁有財富 W_1 ，B 擁有 W_2 ，且 $W_1 > W_2$ ，政府預計徵稅

G ($G < W_1$, $G < W_2$)，問應如何徵收，才能讓徵稅後的社會總滿足感最大。

解：徵稅前，A 的滿足感為 $S_A = f_{W_1}(O, W_1)$ ，B 的滿足感為 $S_B = f_{W_2}(O, W_2)$ 。現在假設對 A 徵 G_A ，對 B 徵 G_B ， $G_A + G_B = G$ 。徵稅後 A 的滿足感變成 $f_{W_1}(-G_A, W_1)$ ，B 的滿足感變成 $f_{W_2}(-G_B, W_2)$ 。問題就是 $\text{Max} [f_{W_1}(-G_A, W_1) + f_{W_2}(-G_B, W_2)]$
 $\rightarrow \text{Max} [f_{W_1}(O, W_1) + f_{W_1}(-G_A, O) + f_{W_2}(O, W_2) + f_{W_2}(-G_B, O)]$
 $\rightarrow \text{Max} [f_{W_1}(-G_A, O) + f_{W_2}(-G_B, O)]$
 $\rightarrow \text{Max} [\log(W_1 - G_A) + \log(W_2 - G_B)]$ ，
 因 $f_{W_1}(-G_A, O) + f_{W_2}(-G_B, O)$

$$\begin{aligned} &= \int_{W_1}^{W_1 - G_A} \frac{1}{x} dx + \int_{W_1}^{W_2 - G_B} \frac{1}{x} dx \\ &= \log(W_1 - G_A) - \log W_1 + \log(W_2 - G_B) \\ &\quad - \log W_2 \\ &\rightarrow \text{Max} [(W_1 - G_A)(W_2 - G_B)] \\ &\text{讓 } x = W_1 - G_A, y = W_2 - G_B \\ &\rightarrow \text{Max} [x \cdot y], \text{ 其中 } x + y = (W_1 - G_A) + (W_2 - G_B) = W_1 + W_2 - G = \text{定數} \\ &\rightarrow x = y \rightarrow W_1 - G_A = W_2 - G_B, \text{ 但 } W_1 > W_2, \text{ 所以} \\ &\quad G_A > G_B \end{aligned}$$

最後結論是多徵 A，使他們在徵稅後的最終財富維持相等。

[註]：當 $W_1 - W_2 > G$ 時，則要使徵稅後社會總滿足感最大，必須全部徵 A。

問題(2)：

假定有一很簡單的國家，只有 A, B 二人，A 擁有財富 W_1 ，B 擁有財富 W_2 ， $W_1 > W_2$ ，現在政府想補貼 A, B 二人的財富為 G ，問應有何補貼法才能使補貼後的社

會總滿足感爲最大。

解：補貼前，A的滿足感爲 $f_{W_1}(O, W_1)$ ，B的滿足感爲 $f_{W_1}(O, W_2)$ 。補貼後，A的滿足感變成 $f_{W_1}(G_A, W_1)$ ，B的滿足感變成 $f_{W_1}(G_B, W_2)$ ，其中 G_A 為對A的補貼， G_B 為B的補貼， $G_A + G_B = G$ 。

問題就是 $\text{Max} [f_{W_1}(G_A, W_1) + f_{W_1}(G_B, W_2)]$

$\rightarrow \text{Max} [f_{W_1}(G_A, O) + f_{W_1}(G_B, O)]$

$\rightarrow \text{Max} [\log(G_A + W_1) + \log(G_B + W_2)]$

$\rightarrow \text{Max} [(W_1 + G_A) \cdot (W_2 + G_B)]$

讓 $x = W_1 + G_A$ ， $y = W_2 + G_B$

$\rightarrow \text{Max} [x \cdot y]$ 其中 $x + y = (W_1 + G_A) + (W_2 + G_B) = W_1 + W_2 + G = \text{定數}$

$\rightarrow x = y$

$\rightarrow W_1 + G_A = W_2 + G_B$ ，但 $W_1 > W_2 \rightarrow G_B > G_A$

最後的結論是多補貼窮者，使他們受補貼後的最終財富一樣。

〔註〕：當 $W_1 - W_2 > G$ 時，則要使補貼後社會總滿足感最大，必須全部補貼B。

推論(A)：我們由問題(1)(2)可從A，B二人推廣到一國所有人民，而得到一結論，即政府部門因支出而必定要向人民徵稅，爲了要使現有的社會財富重新分配，以達到社會總滿足感維持最大，必須採取徵稅——即取之於民，及社會福利——即用之於民，的二條路線一齊進行，而政府所採取的政策，由問題(1)(2)可引伸出。

(a)取之於民的部份——多徵富者，少徵窮者。

(b)用之於民的部份——多補貼窮者，少補貼富者。

這便是民生主義中，主張求均的觀點，因它可使現有的社會財富之下，由於求均而使社會總滿足感維持最大。

推論(B)：由問題(2)，我們可以推廣到一國所有人民，若能賺取更多外來的財富，則會使社會總滿足感增加。

這就是民生主義中主張求富的觀點。

由以上我們知道何以民生主義中同時主張求均，富之道理所在。

推論(C)：民生主義中，達成求均的過程中，其手段與政策繁多，而其中徵直接稅又何以採用累進稅率？

解：設A擁有的財富W，被課G的稅收

則A滿足感之總減少為 $\Delta S = f_W(-G, 0)$

$$= \int_W^{W-G} \frac{1}{x} dx$$

現將G做n等分，即 $G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n$ ，

$$G_i = \frac{G}{n}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

並假定政府分n次向A徵稅，每次徵收 $\frac{G}{n}$

$$\text{則 } \Delta S_1 = \int_W^{W-G_1} \frac{1}{x} dx$$

$$\Delta S_2 = \int_{W-G_1}^{W-G_1-G_2} \frac{1}{x} dx$$

⋮

$$\Delta S_n = \int_{W-G_1-G_2-\dots-G_{n-1}}^{W-G} \frac{1}{x} dx$$

$$\rightarrow 0 > \Delta S_1 > \Delta S_2 > \Delta S_3 > \dots > \Delta S_n$$

這也就說明了在財富愈高的區域課以同樣的稅收，其所減少的滿足感較少，故政府在一個人財富愈高的區域多取之不爲虐，因而採用累進稅率。

推論(D)：何以政府要照顧低收入者，而視為一種德政。

推論(E)：何以要激發人們「雪中送炭」的美德，而不能「錦上添

花」？

解：設 A 擁有財富 W_1 ，B 擁有財富 W_2 ，且 $W_1 > W_2$

(a) 雪中送炭：即 A 施于 B 之財富 G，則社會總滿足感增加爲

$$\Delta S_1 = \int_{W_1}^{W_2} -G \frac{1}{x} dx + \int_{W_2}^{W_1} G \frac{1}{x} dx$$

(b) 錦上添花：即 B 施于 A 之財富 G，則社會總滿足感增加為

$$\Delta S_2 = \int_{W_1}^{W_2} G \frac{1}{x} dx + \int_{W_2}^{W_1} -G \frac{1}{x} dx$$

$$0 > \int_{W_1}^{W_2} G \frac{1}{x} dx > \int_{W_2}^{W_1} G \frac{1}{x} dx \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$\text{由(1)(2)得} \int_{W_1}^{W_1-G} \frac{1}{x} dx + \int_{W_2}^{W_2+G} \frac{1}{x} dx$$

$$> \int_{W_1}^{W_1+G} \frac{1}{x} dx + \int_{W_2}^{W_2-G} \frac{1}{x} dx$$

→△S₁ > S₂ 故要激發雪中送炭，不要錦上添花。

〔註〕：事實上我們可以算出 $\Delta S_1 > 0$ ， $\Delta S_1 < 0$ 意味著雪中送炭能增加社會總滿足感，而錦上添花反而減少社會總滿足感。

問題(3) :

我們都知道愛國獎券中獎所得的期望值比獎券面值小，但何以購買者仍很踴躍，甚至有搶購潮，難道其動機出自愛國心嗎？

解：爲簡化此問題，而不失一般性

假設愛國獎券，券值每張 20 元，只有一特獎，， 奬金 100 萬元，中獎的機率爲 $\frac{1}{200}$ 萬

則未購買前 $S = f_w(-20, W)$ ， 其中 W 為某人擁有的財富購買後的滿足感以機率表示爲

$$S' = \left\{ [f_w(-20, W) + g\left(\frac{W-20}{W}\right)] \times \frac{1999999}{2000000} + \right.$$

$$\left. [f_w(1000000, W) + g\left(\frac{W+1000000}{W}\right)] \times \right.$$

$$\left. \frac{1}{2000000} \right\}$$
 比較 S 與 S' 大小關係，端視 W 與 g 而定。

(A) 當 $W \gg 20$ ：也就是 W 相當大，使得 $g\left(\frac{W-20}{W}\right) = 0$ ，且 $g\left(\frac{W+1000000}{W}\right) = 0$ 則很顯然 $S' < S$ ，

$$\text{此處 } S' = f_w(-20, W) \times \frac{1999999}{2000000} + f_w($$

$$1000000, W) \times \frac{1}{2000000}$$
 故他對購買愛國獎券缺乏興趣。

(B) 當 W 介於兩定財富 W_1, W_2 之中 ($W_1 < W_2$) 足以使 $S' > S \rightarrow$ 則他很樂意購買。

其中 W_1 與 W_2 可由函數 g 之定義而決定。

(C) 當 $0 < W < W_1$ ：則 $g\left(\frac{W-20}{W}\right) + g\left(\frac{W+1000000}{W}\right)$

$\doteq 0$ (即不中獎所帶來滿足感的劇減，足以抵銷中獎時所帶來滿足感劇增)

顯然 $S' < S$ ，故他不願冒這個險。

(例如：一個人若僅擁有 20 元的財富，則他可能不願冒這個險)。

然而我們知道社會人們財富的分配滿足在(B)中的居大部分，也就是說大富豪及乞丐太少，故我們可斷言愛國獎券的購買必很踴躍，這也就是我們政府自發行第一期至今近千期而永不中斷之原因所在。

推論(A)：若其他狀況未變動，而僅將愛國獎券獎額變少，而中獎的機率增大，則我們必可推斷購買者將減少。

解：因在 S' 中 $g\left(\frac{W + \text{獎額變小}}{W}\right) \leq g\left(\frac{W + 1000000}{W}\right)$ ，

因 g 是一個增函數，故原先一些擁有財富滿足(B)的人們，將不會購買，導致購買者減少。

應用以上模式探討

問題(4)：個人勞動量（也就是工作時間），如何受①工資②自己所擁有的財富③社會各項建設成果（包括文化、經濟、物質、精神等等建設）的影響。

解：在解此問題之前，(a)經濟與事實告訴我們，若社會各項建設成果輝煌，則個人休閒時間所獲得的滿足感愈大（因他愈能享受到這建設的成果而滿足）。(b)每人休閒同樣的時間所獲得之滿足感應相等。

現在以 W 表一個人所擁有的現有財富。

G 表一個人所獲得之意外財富（包括遺產）。

K 表一個人每天工作的時間。

i 表每小時的工資。

R 表社會各項建設的成果。

L 表一個人每天休閒的時間（包括睡眠）。

則我們可將定義(3)改成

$$\Delta S = \int_W^{W+G} \frac{1}{x} dx + g\left(\frac{W+G}{W}\right) + \int_{W+G}^{W+G+iK}$$

$$\frac{1}{x} dx + h_R(L) \quad \text{其中 } K+L=24 \text{ 小時}$$

(二) 短期看 (short run)：短期間，我們知道社會建設成果可視為不變，故 $h_R(L)$ 僅隨 L 而變動。

讓 $h_R(L) = C \cdot L$ ， C 是常數 (C 代表在社會固定建設成果下，個人休閒一小時所增加的滿足感)。

$$\rightarrow \Delta S = \int_W^{W+G} \frac{1}{x} dx + g\left(\frac{W+G}{W}\right) + \int_{W+G}^{W+G+iK} \frac{1}{x} dx \\ + C \cdot L$$

$$\text{要 } \text{Mas } \Delta S \rightarrow \int_{W+G+i(K-1)}^{W+G+iK} \frac{1}{x} dx = C \dots\dots\dots(A)$$

以上的 (A) 式是告訴我們一個人的工作時間及休閒時間的調配在「每當一個人增加一小時的工作所增加的滿足感」恰好等於「放棄工作而去休閒所增加的滿足感」時，其 ΔS 為最大的條件，(吾人姑且稱其為工作與休閒的均衡條件)。

$$\text{當 } i = \text{constant} \xrightarrow{\text{Max } \Delta S}$$

$$\int_{W+i(K-1)}^{W+iK} \frac{1}{x} dx = C$$

$$\text{當 } G=0 \rightarrow \Delta S = \int_W^{W+iK} \frac{1}{x} dx + C \cdot L \rightarrow \rightarrow W \text{ 愈大， } K \text{ 必愈小} \\ \xrightarrow{\text{Max } \Delta S}$$

$$\int_{W+i(K-1)}^{W+iK} \frac{1}{x} dx = C$$

$$\rightarrow i \text{ 愈大， } K \text{ 必愈小}$$

結果告訴我們，在短期間個人在

工資固定下，則愈有錢者，
愈不想工作（也就是勞動量
愈少。）
財富相同時，工資愈高者，
其勞動量必愈大。

推論(A)：政府必須訂定最低工資，否則會有增加失業現象。

(B)：政府何以要課遺產稅及愛國獎券中獎的所得稅？

因 $G > 0$ ，則會促進一個人愈有財富，而不想工作。

(二)長期看 (Long run)：

社會建設成果如果愈輝煌，則 C 愈大。

當 C 愈大，則由 (A) 式 (工作與休閒的均衡條件) 知 K 必減少，這就告訴我們社會建設愈輝煌，則社會上個人休閒時間必會增加。

推論(A)：當其他因素不變下，提高社會各項建設，將可增加社會總滿足感，這也印證到我們民生主義中主張極力建設五大建設之原因所在。

問題(5)：各種主義優劣之比較

在此我們僅拿三種主義來做比較，即民生主義，資本主義，共產主義，在比較前，假定我們皆明瞭三種主義的決策：

(a) 民生主義決策在求均且求富。

(b) 資本主義之決策只重求富，不重求均。

(c) 共產主義之決策乃主張財富歸國家所有，不准私人擁
有財富。

設 T 表某國 N，其政府奉行某種主義下的政府總稅收 (也就是取之於民之多寡)。

δ_T 表某國 N，其政府奉行某種主義下的，徵稅 T 後
，社會財富平均程度。

R 表某國 N，其政府奉行某種主義下的政會總福利

(也就是用之於民之多寡)。

TS 表某國N，其政府奉行某種主義下的社會總滿足感。

△S 表總滿足感的改變值。

現假定

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{在奉行資本主義下的 } T = T_2, \delta = \delta_{T2}^2, \\ R = R_2, TS = TS_2 \\ \text{在奉行民生主義下的 } T = T_1, \delta = \delta_{T1}^1, \\ R = R_1, TS = TS_1 \\ \text{在奉行共產主義下的 } T = T_3, \delta = \delta_{T3}^3, \\ R = R_3, TS = TS_3 \end{array} \right.$$

透過我們的數學模式，知道在某國N現有的社會總財富不變：

$$T \uparrow \rightarrow 0 > \Delta S \downarrow \rightarrow TS \downarrow$$

$\delta_T \uparrow \rightarrow 0 > \Delta S \uparrow \rightarrow TS \uparrow$ 其中↑表遞增(increasing)

$R \uparrow \rightarrow 0 < \Delta S \uparrow \rightarrow TS \uparrow$ ↓表遞減(decreasing)

①民生主義與資本主義之比較

$$T_1 \neq T_2, \delta_{T1}^1 > \delta_{T2}^2, R_1 > R_2 \rightarrow TS_1 > TS_2$$

故可推得民生主義優於資本主義。

②民生主義與共產主義之比較

$$T_1 \ll T_3, \delta_{T1}^1 < \delta_{T3}^3, R_1 \gg R_3$$

但因 T_3 太大，故引起人民滿足感的劇降，而足以超越財富較平均因而減少較少的滿足感，故

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{在 } T_1 \ll T_3, \delta_{T1}^1 < \delta_{T3}^3 \text{ 時 } TS_1 > TS_3 \\ \text{在 } R_1 \gg R_3 \text{ 時 } TS_1 > TS_3 \end{array} \right.$$

故在 $T_1 \ll T_3, \delta_{T1}^1 < \delta_{T3}^3, R_1 \gg R_3 \rightarrow TS_1 > TS_3$
→民生主義優於共產主義

結果：我們可推得民生主義必優於其他主義，因為奉行民生主

義之下，社會的總滿足感必為最大，這不就說明了民生主義是解決民生問題中最理想的主義了。

三、結論

- (一) 凡一切社會科學，其理論皆不能確切地代表社會現象，而僅對社會現象的一種合理的解釋罷了，換言之，我們所關切的不是理論的真實性，而是理論的可用性，基於這論點，吾人根據人類基本心理，而設計一套數學模式，以對現實的社會現象，賦予新的註解。並想藉此模式再更深入探討社會科學中新的理論與決策。
- (二) 吾人僅在以上提出五個問題及一些推論，除此之外，相信必有其他問題可藉此數學模式來解說，進而訂定決策以便提供政府有關單位，做為往後施政參考。——例如以上愛國獎券的例子，若我們將函數 g 確切定義數值，則我們可在①固定利潤②國民所得在何種分配情形③全國多少人口。三種假設下，推算愛國獎券的券值及獎額應如何訂定，才能達到最適點，也就購買量最大的時候。
- (三) 由本數學模式出發，比較民生主義社會，資本主義社會及共產主義社會，吾人發現以實行民生主義均富思想的社會，才是最理想、最進步的社會，藉此期望在這民主與共產集團對立的世界中，能將我們的民生主義發揚光大之，以打倒世界禍亂根源——共產主義思想。

評語：數學在經濟上的應用並不是很新奇的。本作品提出以
$$W + a \left(\frac{1}{x} dx \right)$$
 的模式來代表一個擁有 W 元的人得到 a 元時的滿足感函數，相當合適。