代數與幾何的橋樑

國中組數學第三名

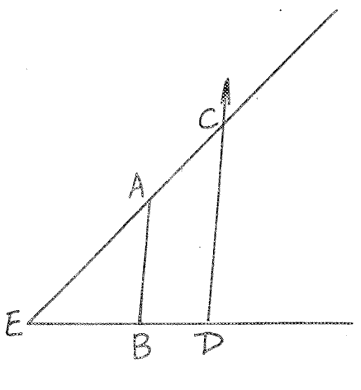
宜蘭縣三星國民中學　　　　　　　　作者：潘寶蓮、林素卿等四名

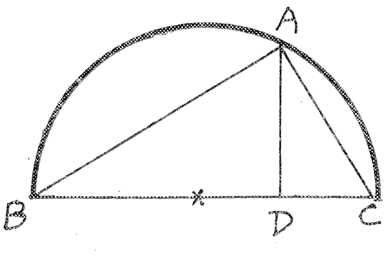
指導老師：潘冠雄

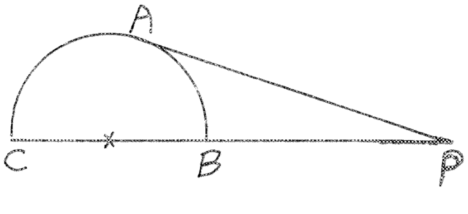
一、動機與目的：

某一天當我正在作圖時無意之中發現到$\frac{2}{3}=0.666\cdots$ 在這直線坐標系裏不知該如何下筆來點出這令人頭痛的一點，$\sqrt{3}=1.732\cdots\cdots$也碰到同樣令人百思莫解的問題，於是我絞盡腦汁，十分費神地反覆思考著，想觸類旁通來發現代數中$+-\times\div$在幾何上扮演著什麼重要角色？能否利用幾何方法證明三大平均數呢？這一連串的問題，引起我無限的好奇，但又攪得我眼花撩亂，頭昏腦脹，於是下定決心，想徹底細心加以研究分析，來證明這顛撲不破的眞理，但却又令我腸枯思竭，不曉得該從何著手做起，於是便與志同道合的同學，日夜不間斷加以深入討論，有問題再去請教數學老師，終於發現到其中奧妙的哲理，想做一個代數與幾何的橋樑，來溝通代數與幾何的密切關係。

二、預備知識：





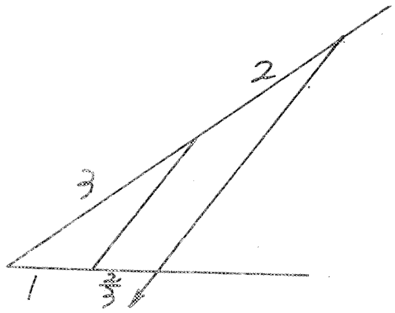


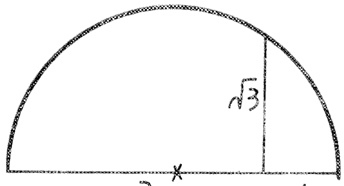
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$　$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{EB}}{\overline{BD}}$　　$\overline{AD}^2=\overline{BD}\times\overline{DC}$

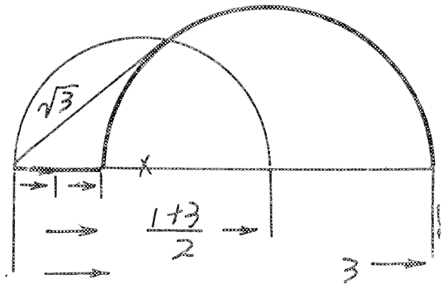
$\overline{AB}^2=\overline{BC}\times\overline{BD}$　$\overline{PA}^2=\overline{PB}\times\overline{PC}$

三、研究過程

我們由平行線比例線段與直角△試作了$\frac{2}{3}$與$\sqrt{3}$。



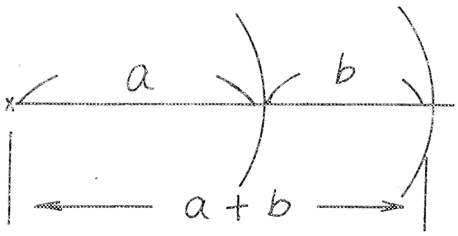


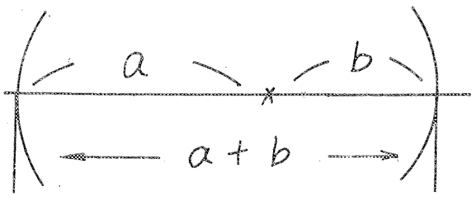


為考慮一般情形我們假設二線段長度為a ，b

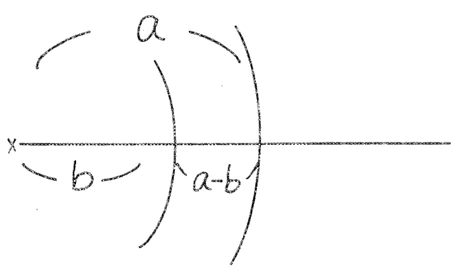
(一)基本性質：

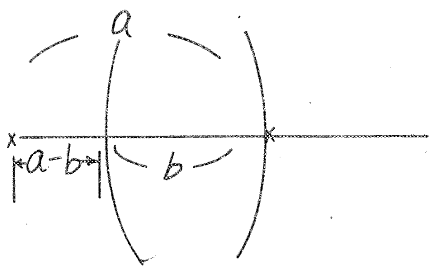
加$a+b$



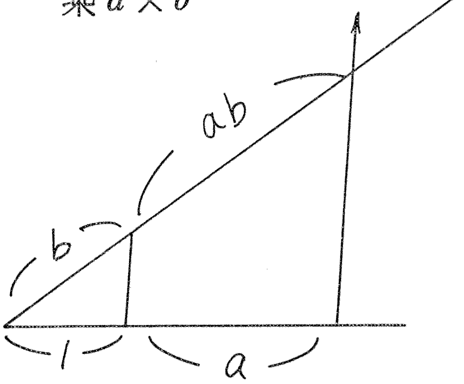


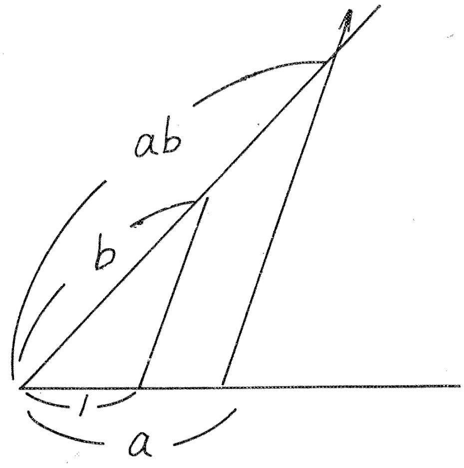
減 a－b



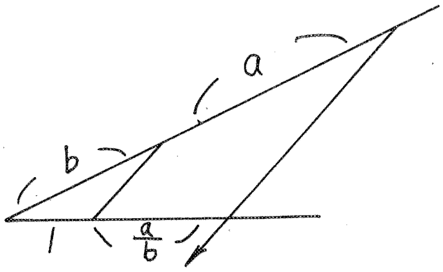


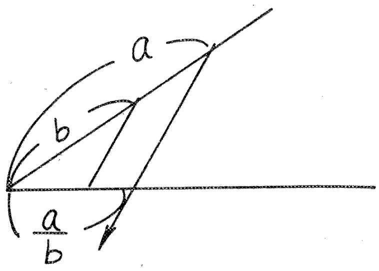
乘 $a \times b$



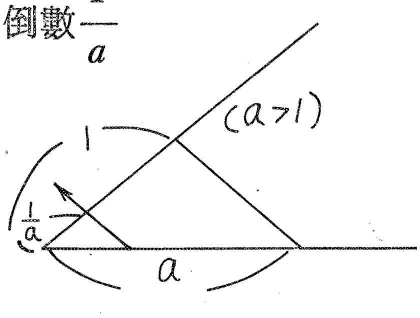


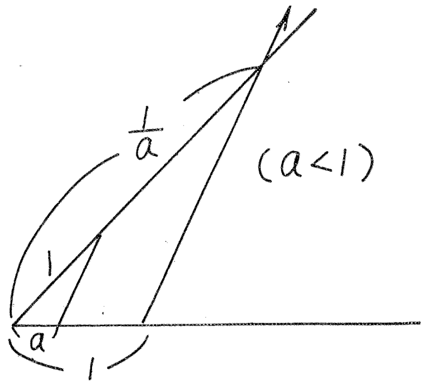
除 $\frac{a}{b}$



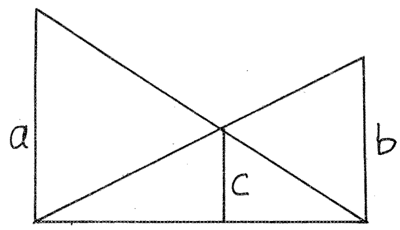


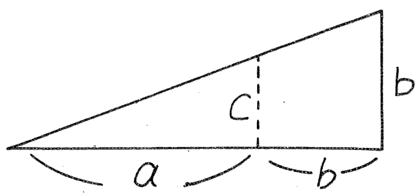
倒數 $\frac{1}{a}$



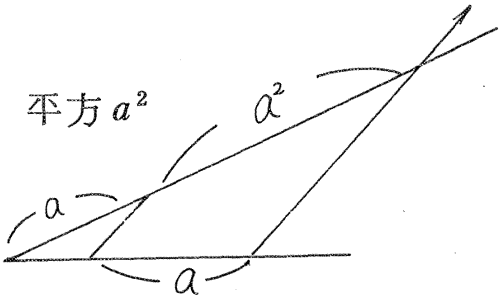


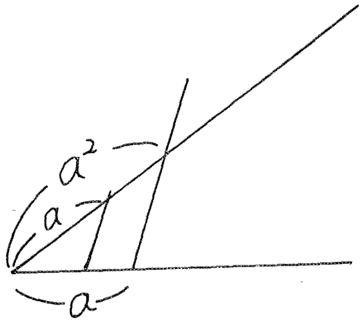
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$





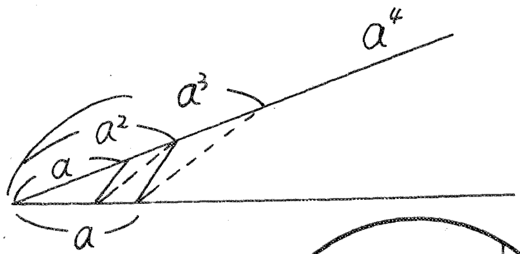
平方 a^2



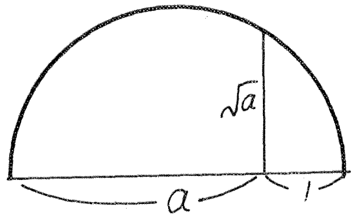


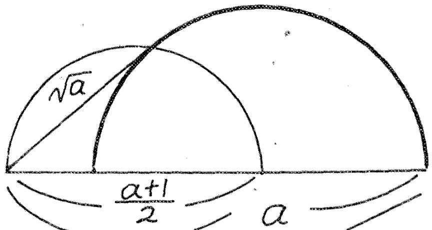
$$a^2 = a.a$$
$$a^3 = a^2.a = a.a.a$$
$$a^4 = a^3.a = a.a.a.a$$
$$a^n = a^{n-1}.a = \underbrace{a \quad\quad a}_{n\text{個}}$$

n 次方 a^n

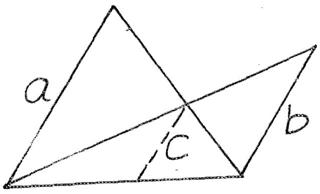


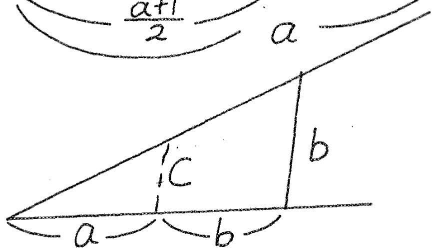
平方根 $\sqrt{a}$



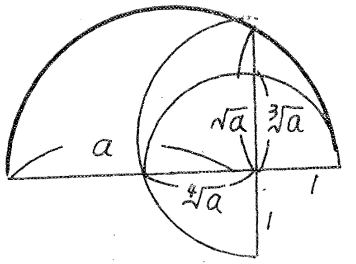


$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$



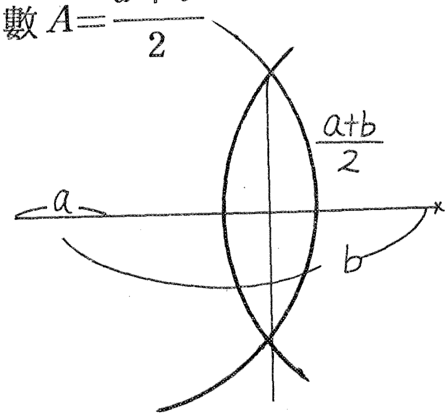


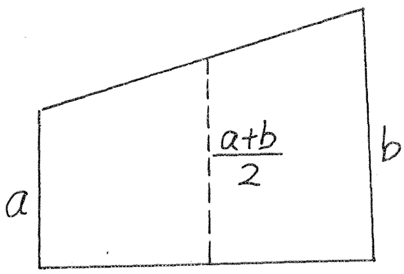
2^n 次方根



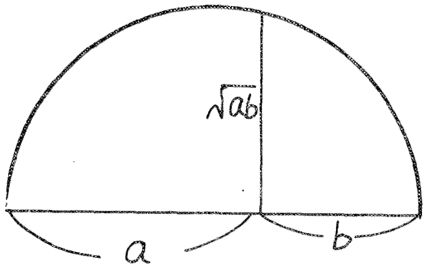
可連續產生 $\sqrt{a}\ \sqrt[4]{a}\ \sqrt[8]{a}$
$\sqrt[16]{a}\ \sqrt[2^n]{a}$

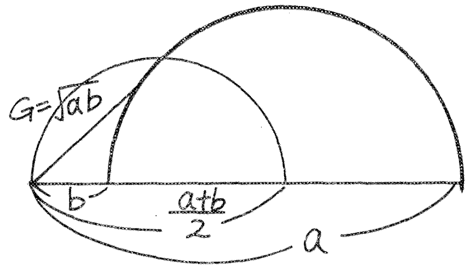
算術平均數 $A=\dfrac{a+b}{2}$





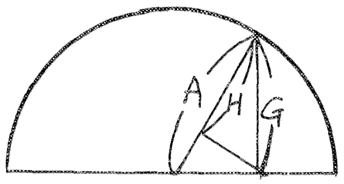
幾何平均數 $G=\sqrt{ab}$





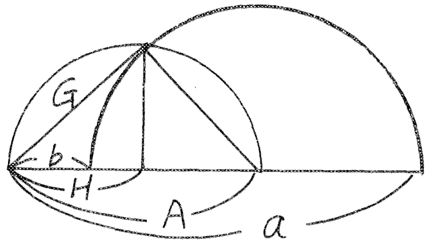
調和平均數

$$H=\frac{2ab}{a+b}$$



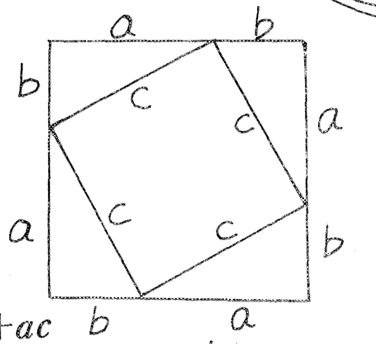
$$(\sqrt{ab})^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$$

$$G^2=A\times H$$



畢氏定理

$$a^2+b^2=C^2$$

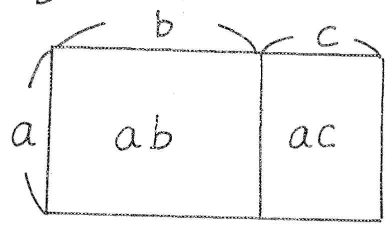


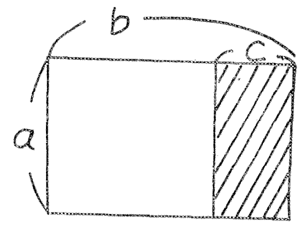
$$(a+b)^2=C^2+4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=C^2$$

$$a(b+c)=ab+ac$$

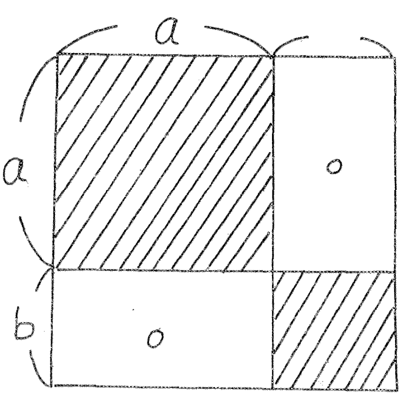
$$a(b-c)=ab-ac$$

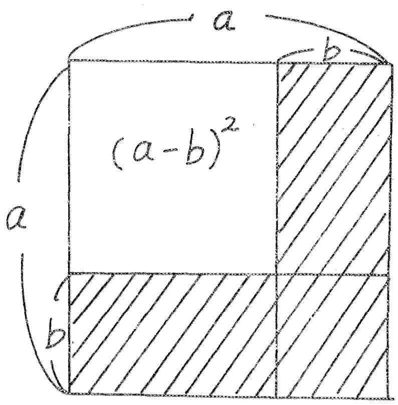




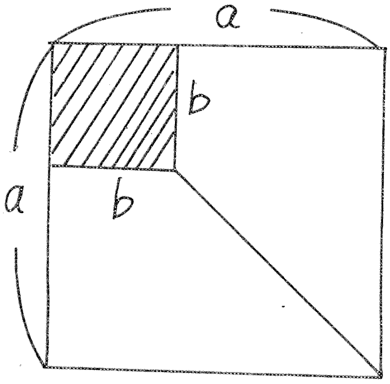
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

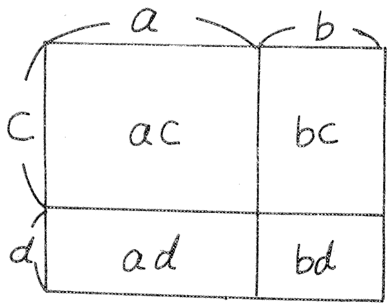




$a^2-b^2=2\,\frac{1}{2}(a+b)(a-b)$

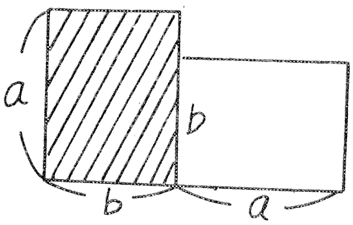


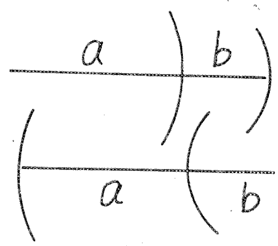
$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad$
$+bd$



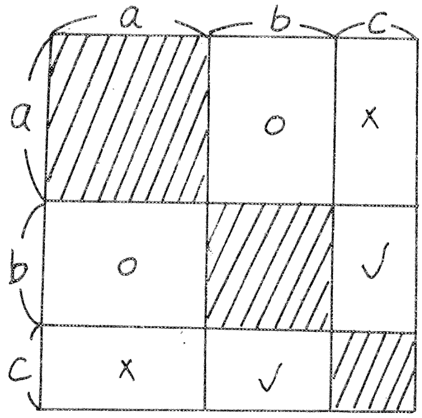
$ab=ba$

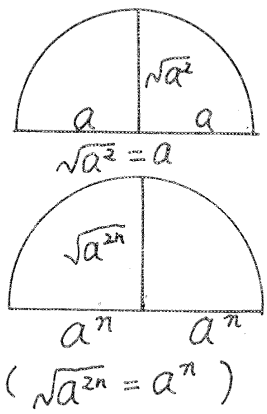
$a+b=b+a$





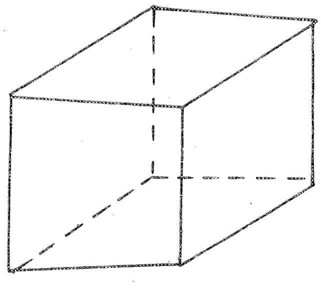
$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2$
$+2ab+2bc$
$+2ac$





$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$（見立體模型）

即 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$



$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$（見立體模型）

$a^3-b^3=(a-b)[(a-b)^2+3ab]$

即 $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

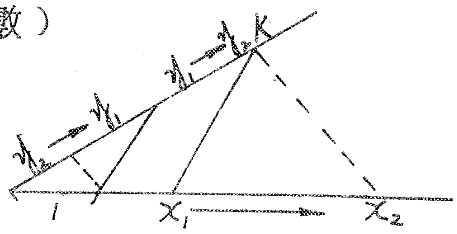
反比

$xy=k$（定數）

當 $x_1 \xrightarrow[\text{減少}]{\text{增加}} x_2$

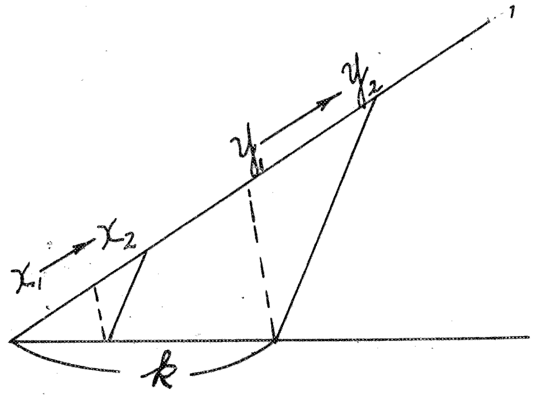
$y_2 \longleftarrow y_1$

故成反比



正比

$\dfrac{y}{x}=k$



當 $x_1 \xrightarrow{\text{增加}} x_2$

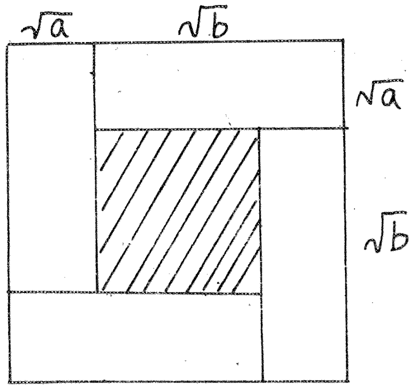
$y_1 \xleftarrow{\text{增加}} y_2$

故成正比

(二)應用：

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \dfrac{2ab}{a+b}$ （在調和平均數已證明）現有另一證法

證明$\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$



$$4\sqrt{ab} \leqslant (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$2\sqrt{ab} \leqslant a+b \quad \therefore \dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

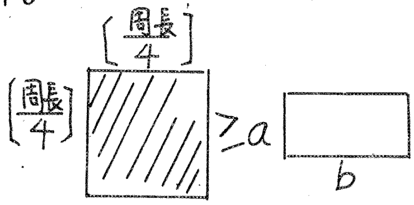
$$\sqrt{ab} - \dfrac{2ab}{a+b}$$

$$= \dfrac{\sqrt{ab}\cdot(a+b)-2ab}{a+b}$$

$$= \dfrac{\sqrt{ab}\cdot(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b} \geqslant 0$$

2. 不等關係所表示性質

(1) $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ 卽 $\left[\dfrac{2(a+b)}{4}\right]^2 \geqslant ab$

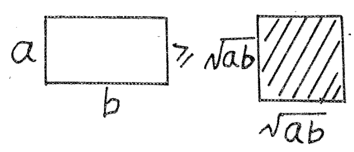


表示：周長 2（ $a+b$ ）一定的一切長方形中最大面積是

長爲$\dfrac{\text{周長}}{4}$的正方形。

卽周長一定時，最大面積的長方形是正方形。

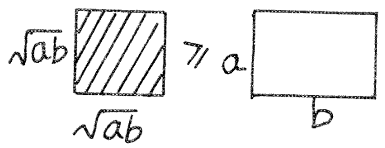
(2) $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ ［卽 $2(a+b) \geqslant 4\sqrt{ab}$ ］



表示：面積一定的一切長方形中最小周長者是邊長爲$\sqrt{ab}$的正方形。

即面積一定，最小周長的長方形是正方形。

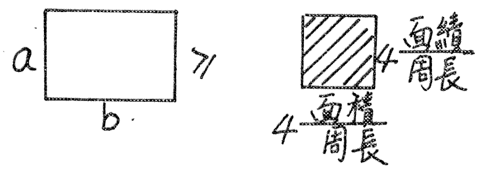
(3) $$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b} \quad \left[\frac{\sqrt{ab}\,\sqrt{ab}}{4\sqrt{ab}} \geqslant \frac{ab}{2(a+b)}\right]$$



表示：面積 ab 一定的一切長方形中，最大面積與周長比者是邊長爲 $\sqrt{ab}$ 的正方形。

即面積一定，最小周長的長方形是正方形。

(4) $$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b} \quad \left\{(ab) \geqslant \frac{4ab}{2(a+b)}{}^{2}\right\}$$

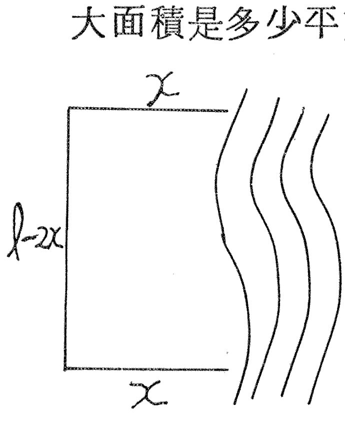


表示：面積與周長比一定的一切長方形中，最小面積是邊長爲 $4\dfrac{\text{面積}}{\text{周長}}$ 的正方形。

即面積與周長比一定時，最小面積的長方形爲正方形。

3. 不等式的誤用：

某人想用 ℓ 公尺長的鐵絲網，在河邊圍一長方形鴨寮，河邊可作一直線而不圍，僅圍三面，則可圍成的長方形，最大面積是多少平方公尺？



［錯誤解法］：$\left[\dfrac{\ell}{4}\right]^2 = \dfrac{\ell^2}{16}$

［正確解法］：設寬爲 x_1 則長爲 $\ell-2x$

面積爲 y

$$y = x(\ell-2x) = -2x^2+\ell x = -2\left(x^2-\frac{\ell}{2}x\right)$$

$$= -2\left(x-\frac{\ell}{4}\right)^2+\frac{\ell^2}{8} \leqq \frac{\ell^2}{8}$$

$x=\dfrac{\ell}{4}$　最大面積邊長比$=(\ell-2x)=x$

$=\dfrac{\ell}{2}:\dfrac{\ell}{4}=2:1$ 非 $1:1$

4. 調和平均數的應用：

一汽車從甲地開往乙地每小時速度為 20 公里，回程每小時速度 30 公里，則全部路程平均速度為若干？

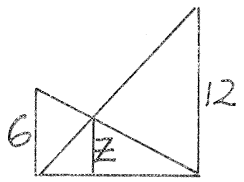
［錯誤解法］：平均速度$=\dfrac{20+30}{2}=25$ 公里／時(×)

［正確解法］：設距離為 x 公里

平均速度$=\dfrac{2x}{\dfrac{x}{20}+\dfrac{x}{30}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}}=4$ 公里／時（調和平均數）

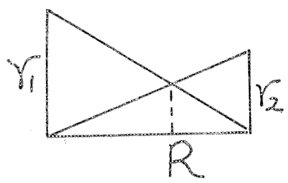
5. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ 的應用：

甲獨作 6 日可完成，乙獨作 12 日完成，兩人合作幾日可完成？



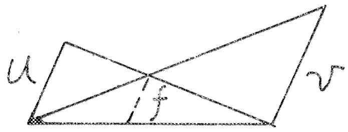
［錯誤解法］：（6＋12）÷2＝9（×）

［正確解法］：設 Z 日可完成 $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{z}\Rightarrow z=4$

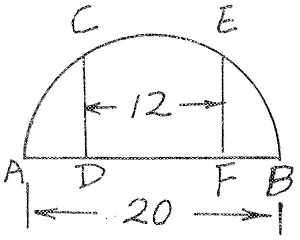


並聯電阻的關係式；$\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}$

凸透鏡之位置與焦點距離之式 $\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}$



6. 幾何平均數的應用：

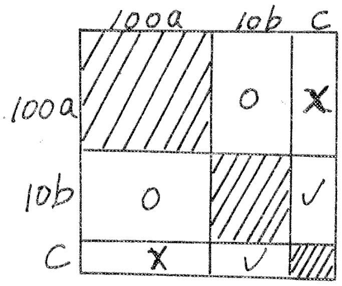


半圓柱形的倉庫，其截面為半圓，設圓的直徑為 20 公尺，今欲在截面上立兩個等高柱子，使柱子距離 12 公尺求柱高：

$CD=\sqrt{\overline{AD}}\times\sqrt{\overline{BD}}=\sqrt{4}\times16=8$（公尺）

7. 平方速算法的研究：

$$(100a+10b+c)^2=10000a^2+100b^2+c^2+20000ab+2000ac+20bc$$




```
   678
×  678
------
364964
 84000
  9600
  1120
------
459684
```

```
  678
× 678
-----
 5424
4746
4068
------
459684
```

速算法計時： 22 秒　　傳統法計時 :31 秒

8. 畢氏定理的應用：

由恒等式：$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2$

令 $x_1=m$，$y_1=n$，$x_2=n$，$y_2=m$

即 $(m^2+n^2)^2=(2mn)^2+(m^2-n^2)^2$

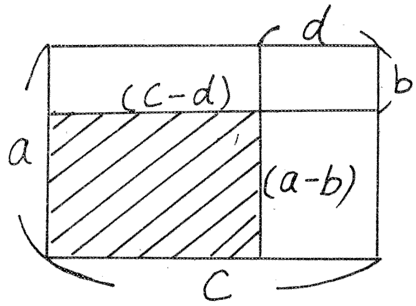
(m, n)	(2,1)	×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9	×10
$2mn$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
m^2-n^2	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
m^2+n^2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

(m, n)	(4,1)	×2	(3,2)	×2	×3	(5,2)	(4,3)	×2	(5,4)	(6,1)
$2mn$	8	16	12	24	36	20	24	48	40	12
m^2-n^2	15	30	5	10	15	21	7	14	9	35
m^2+n^2	17	34	13	26	39	29	25	50	41	37

註：(12 ， 9 ， 15) $\neq$ ($2mn$ ， m^2-n^2 ， m^2+n^2)

但 :(12 ,9 ,15)＝(4，3，5)×3；求出一直角△後三邊同時放大，才不會有漏網之魚！

9. 負負得正：



$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$ （幾何解法）

$(a-b)(c-d)=ac+(-b)c+a(-d)+$
$+(-b)(-d)=ac-bc$
$-ad+(-b)(-b)$（代數解法）

$\therefore ac-bc-ad+(-b)(-d)=ac-bc-ad+$
$+bd$

卽 $(-b)(-d)=bd$

四、結論：

1. 溝通了代數與幾何相輔相成，缺一不可的密切關係，有情同手足，同是一家人的感覺。
2. 能加深了解三大平均數的幾何證法與廣泛用途，以避免錯誤解法！
3. 實際的操作能加深印象，容易了解，更能避免課本枯燥乏味，進一步對數學產生濃厚的深愛與無比的興趣。

評語：1. 利用幾何作圖幫助代數運算的瞭解研究精神可嘉。
2. 有些幾何圖形實際上對於代數運算的瞭解，並無幫助有待進步研究。