齊次對稱不等式的一個定理

高中教師組數學第三名

高雄市前鎭高級中學　　　　作者：吳健生

一、動機

我們先觀察兩個例子

例1：若 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 爲 n 個非負之實數由算術平均，幾何平均、調和平均之關係可得 $\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdots\cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}}$。此乃衆所皆知之 $AP \geq GP \geq HP$ 之不等式，其實它可改寫成

(1) $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^n \geq n^n a_1\cdots\cdots a_n$

(2) $(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)^n \geq n^n A_1\cdots\cdots A_n$ 若 $A_1=\frac{1}{a_1}$

例2：若 $a_1, a_2, a_3 \geq 0$，由算術平均≥幾何平均可知 $\Sigma a_1^2a_2 = a_1^2a_2+a_2^2a_3+a_3^2a_1+a_1a_2^2+a_2a_3^2+a_3a_1^2 \geq 6a_1a_2a_3$ 同時 $2(a_1^3+a_2^3+a_3^3)-\Sigma a_1^2a_2=(a_1+a_2)(a_1-a_2)^2+(a_1+a_3)(a_2-a_3)^2+(a_3+a_1)(a_3-a_1)^2 \geq 0$ 故得到(3) $2(a_1^3+a_2^3+a_3^3) \geq \Sigma a_1^2a_2 \geq 6a_1a_2a_3$

由上面兩個例子中我們產生了兩個問題

問題1：是否可以找出比 $AP \geq GP \geq HP$ 更推廣的不等式？

問題2：在(3)式中證明 $2(a_1^3+a_2^3+a_3^3) \geq \Sigma a_1^2a_2$ 是用配平方之方法，而 $\Sigma a_1^2a_2 \geq 6a_1a_2a_3$，當然亦可（只不過它恰可直接利用 $AP \geq GP$ 之不等式），非負數之絕對

不等式的證明；大多常要用配方之方法，那我們是否可找出一個更快的方法？

經過仔細分析從以上兩個例子，可以約略猜出一種更爲一般的不等式之關係。我們發現了(1)(2)(3)式的特點：

(A)首先(1)(2)與(3)式都是齊次式。例如(1)式左右兩邊爲 n 次齊次多項式，(3)式爲三次齊次式。

(B)另外(1)式兩邊之係數和同爲 n^n（係數和爲所有不定元用 1 代入之值），而(3)式則爲 6。

綜合一下可發現(1)，(2)，(3)式都是係數和相同之齊次的對稱不等式，經過一番研究我們解決了上述的兩個問題，而導出了本定理，稱之爲齊次對稱不等式的定理。

二、定理敍述

在敍述之前，先給一些定義：

定義(1)：$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \cdots\cdots \geqslant \alpha_n$，$\beta_1 \geqslant \beta_2 \cdots\cdots \geqslant \beta_n$，$\{\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n\} \neq \{\beta_1 \cdots\cdots \beta_n\}$ 則 $(\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n) > (\beta_1 \cdots\cdots \beta_n)$ 若 $S_k \geqslant T_k \quad \forall 1 \leqslant K \leqslant n$

但 $S_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \qquad T_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i$

定義(2)：$N(\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n)$ 爲對稱式 $\sum a_1^{\alpha_1} \cdots\cdots a_n^{\alpha_n}$ 之項數

定義(3) 取 $\beta_i^{(1)} = \beta_i \quad i \neq p \quad i \neq q \; (p < q,\ \theta > 0)$

$\beta_p^{(1)} = \beta_p + \theta \qquad \beta_q^{(1)} = \beta_q - \theta$

再依大而小排列成

$(\beta_1^{(1)} \cdots\cdots \beta_n^{(1)})$ 稱爲 $(\beta_1 \cdots\cdots \beta_n)$ 的一次變動

本定理：

$$\frac{\sum a_1^{\alpha_1} \cdots\cdots a_n^{\alpha_n}}{N(\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n)} \geqslant \frac{\sum a_1^{\beta_1} \cdots\cdots a_n^{\beta_n}}{N(\beta_1 \cdots\cdots \beta_n)} \text{ 但 } \begin{cases} a_i > 0 \\ \alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n \quad \beta_1 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n \\ S_n = T_n \end{cases}$$

上列成爲絕對不等式之充要條件爲 $(\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n) > (\beta_1 \cdots\cdots \beta_n)$

且等號成立於 $a_1 = \cdots\cdots = a_n$ 。

三、定理證明：

引理(1)：若 $a>0$ ， $b>0$ ， $\theta>0$ 且 $r>s$ 則 $a^{r+\theta}b^{s-\theta}+a^{s-\theta}b^{r+\theta} \geqslant a^r b^s + a^s b^r$ 且等號成立於 $a=b$

證明：
$$a^{r+\theta}b^{s-\theta}+a^{s-\theta}b^{r+\theta}-a^r b^s-a^s b^r$$
$$=a^{s-\theta}b^{s-\theta}\left(a^{r-s+2\theta}+b^{r-s+2\theta}-a^{r-s+\theta}b^{\theta}-a^{\theta}b^{r-s+\theta}\right)$$
$$=a^{s-\theta}b^{s-\theta}\left(a^{\theta}-b^{\theta}\right)\left(a^{r-s+\theta}-b^{r-s+\theta}\right)$$
$$=a^{s-\theta}b^{s-\theta}(a-b)^2\left(a^{\theta-1}+\cdots\cdots+b^{\theta-1}\right)\left(a^{r-s+\theta-1}+\cdots\cdots+b^{r-s+\theta-1}\right)\geqslant 0$$

引理(2)： $\dfrac{\Sigma a_1^{\beta_1^{[1]}}\cdots\cdots a_n^{\beta_n^{[1]}}}{N(\beta_1^{[1]}\cdots\cdots\beta_n^{[1]})} \geqslant \dfrac{\Sigma a_1^{\beta_1}\cdots\cdots a_n^{\beta_n}}{N(\beta_1\cdots\cdots\beta_n)}$ 爲絕對不等式

證明：

A. 找出兩邊兩個對應項相減

即得 $a_1^{\beta_1}\cdots a_r^{\beta_r}\cdots a_s^{\beta_s}\cdots a_n^{\beta_n}\left(a_r^{\beta_r+\theta}a_s^{\beta_s-\theta}+a_s^{\beta_r+\theta}a_r^{\beta_s-\theta}-a_r^{\beta_r}a_s^{\beta_s}-a_r^{\beta_s}a_s^{\beta_r}\right)\geqslant 0$ 由引理(1)

※ $a_r^{\beta_r}$ 指去掉 $a_r^{\beta_r}$ 項

B. 兩邊保持項數一樣同化爲 $N(\beta_1\cdots\cdots\beta_n)\cdot N(\beta_1^{[1]}\cdots\cdots\beta_n^{[1]})$ 由A、B得證。

(A)必要條件（反證明）

假設 $(\alpha_1\cdots\cdots\alpha_n) \not\succ (\beta_1\cdots\cdots\beta_n) \ni K \ni S_i \geqslant T_i$

當 $r \leqslant i \leqslant k-1$ ，而 $S_k < T_k$

令 $a_1 = \cdots\cdots = a_k = a \quad a_{k+1} = \cdots\cdots = a_n = 1$

則 $\dfrac{\Sigma a_1^{\alpha_1}\cdots\cdots a_n^{\alpha_n}}{N(\alpha_1\cdots\cdots\alpha_n)} = f(a) \qquad \deg f(a) = S_k$

$\dfrac{\Sigma a_1^{\beta_1}\cdots\cdots a_n^{\beta_n}}{N(\beta_1\cdots\cdots\beta_n)} = g(a) \qquad \deg g(a) = T_k$

$\because S_k < T_k$ 取 a 夠大可得 $f(a) < g(a)$ 矛盾

(B)充分條件

今　$(\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n) > (\beta_1 \cdots\cdots \beta_n)$ 由 $S_k > T_k \forall K$

則　$\ni h \ni \alpha_1 \geqslant \beta_1, \ \alpha_2 \geqslant \beta_2 \cdots\cdots \alpha_{h-1} \geqslant \beta_{h-1}$,

$\alpha_h < \beta_h$

由　$S_h > T_h$ 可知對 $(\beta_1 \cdots\cdots \beta_n)$ 變動m次

$(1 \leqslant m \leqslant r-1)$

可使得　$\alpha_1 \geqslant \beta_1^{(m)} \cdots\cdots \alpha_{h-1} \geqslant \beta_{h-1}^{(m)} \quad \alpha_h = \beta_h^{(m)}$

同理作下去卽若 $\alpha_{h+1} \geqslant \beta_{h+1}$ 則再往下找，若 $\alpha_{h+1} < \beta_{h+1}$ 再變動設變動第 λ 次使得 $\alpha_1 \geqslant \beta_1^{(\lambda)} \cdots\cdots \alpha_n \geqslant \beta_n^{(\lambda)}$

但 $S_n = T_n = T_n^{(1)} \cdots\cdots = T_n^{(\lambda)}$

$\therefore \alpha_1 = \beta_1^{(\lambda)} \cdots\cdots \alpha_n = \beta_n^{(\lambda)}$

又由引理(2)得

$$\frac{\Sigma a_1^{\alpha_1} \cdots\cdots a_n^{\alpha_n}}{N(\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n)} = \frac{\Sigma a^{\beta_1^{(\lambda)}} \cdots\cdots a_n^{\beta_n^{(\lambda)}}}{N(\beta_1^{(\lambda)} \cdots\cdots \beta_n^{(\lambda)})} \geqslant \cdots\cdots$$

$$\geqslant \frac{\Sigma a_1^{\beta_1} \cdots\cdots a_n^{\beta_n}}{N(\beta_1 \cdots\cdots \beta_n)} \forall a_i$$

PS 本定理可推廣成

$L \cdot \Sigma a_1^{\alpha_1} \cdots\cdots a_n^{\alpha_n} > \Sigma a_1^{\beta_1} \cdots\cdots a_n^{\beta_n}$ $(\alpha_1 \geqslant \cdots\cdots \geqslant \alpha_n, \ \beta_1 \geqslant \cdots\cdots \geqslant \beta_n)$ 成爲絕對不等式之充要條件爲 $S_n = T_n$

且 $L \geqslant \dfrac{N(\beta_1 \cdots\cdots \beta_n)}{N(\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n)}$

四、定理應用

例 1：$\dfrac{b^5}{a} + \dfrac{c^5}{a} + \dfrac{a^5}{b} + \dfrac{c^5}{b} + \dfrac{a^5}{c} + \dfrac{b^5}{c} \geqslant 2(a^4 + b^4 + c^4) \geqslant a^2b\sqrt{bc} + a^2c\sqrt{bc} + b^2a\sqrt{ac} + b^2c\sqrt{ac} + c^2a\sqrt{ab} + c^2b\sqrt{ab} \geq 2(a^2bc + b^2ac + c^2ab) \geq 6abc\sqrt[3]{abc}$ （a，b，c 正數）

說明：以上全爲 a，b，c　齊次四次對稱式且各式係數和爲 6 其數列依次得（5，0，−1）>（4，0，0）>（2，

$\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$）>（2，1，1）>（$\frac{4}{3}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{4}{3}$）依本定理得證。

※若看部分和則依序得（5，5，4），（4，4，4）

（2，$\frac{7}{2}$，4），（2，3，4），（$\frac{4}{3}$，$\frac{8}{3}$，4）

例2：$a\geq 0$，$b\geq 0$，$a^{1+\pi}b^{1-\pi}+a^{1-\pi}b^{1+\pi}\geq a^{1+\sqrt{2}}b^{1-\sqrt{2}}+b^{1+\sqrt{2}}a^{1-\sqrt{2}}\geq 2ab$

說明：同理（$1+\pi$，$1-\pi$）>（$1+\sqrt{2}$，$1-\sqrt{2}$）>（1，1）。

例3：$3(a^3+b^3+c^3)\geq(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 9abc$（a，b，$c\geq 0$）

說明：三項係數和同爲9左項數列得（3，0，0）最大，右項數列得（1，1，1）最小，中間若乘開則必介於兩者之間。

例4：a，b，$c\geq 0$　$6(a^6+b^6+c^6)\geq 2(a^3+b^3+c^3)^2\geq 3\Sigma a^3b^2c$ 同理。

例5：a_1，α，β 皆正數且 $\gamma=\alpha+\beta$

則 $\frac{a_1^{\gamma}+\cdots\cdots+a_n^{\gamma}}{n}\geq\frac{a_1^{\alpha}+\cdots\cdots+a_n^{\alpha}}{n}\cdot\frac{a_1^{\beta}+\cdots\cdots+a_n^{\beta}}{n}$

說明：係數和同爲1且左邊（γ，0，……0）必大於右邊（展開後）。

例6：$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdots\cdots a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}}$

說明：轉變爲前已述過之

(1)（$a_1+\cdots\cdots+a_n)^n\geq n^n a_1\cdots\cdots a^n$

(2)（$A_1+A_2+\cdots\cdots A_n)^n\geq n^n A_1\cdots\cdots A_n$

（$A_1=\frac{1}{a_1}$）

在(1)式中係數和同爲 n^n 且右邊之（1，1，……1）爲最小，(2)式同理。

例7：$n^{\frac{m-1}{m}}(a_1^m+\cdots\cdots+a_n^m)^{\frac{1}{m}} \geq (a_1+\cdots\cdots+a_n) \geq n(a_1\cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ （$m \in N$，$a_i \geq 0$）

說明：(A)由(1)式 $(a_1+\cdots\cdots+a_n)^n \geq n^n a_1 \cdots\cdots a_n$ 故得

$$(a_1+\cdots+a_n) \geq n(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

(B)易得 $n^{m-1}(a_1^m+\cdots+a_n^m) \geq (a_1+\cdots+a_n)^m$

即可化成 $n^{\frac{m-1}{m}}(a_1^m+\cdots a_n^m)^{\frac{1}{m}} \geq (a_1+\cdots+a_n)$

評語：以有序數組階條件研討一推廣不等式，其綜合分析值得鼓勵。