錐線直徑之求法與應用

高中教師組數學第二名

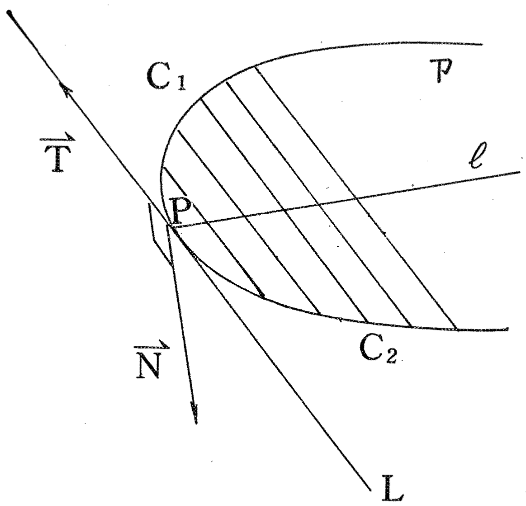
臺北市立建國高級中學　　作者：蔡聰池

一、錐線直徑的求法

開宗明義的說，錐線平行弦的中點所成的集合稱爲這錐線的直徑，而直徑所在直線的方程式在時下的課本中，並沒有一般性的公式可資利用。（如東華本第四册 155 ～ 161 頁）

因此，在這裏我們給出下列的求法：

設定：錐線ㄕ： $f(x, y)=0$ （如圖）



$$f(x, y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$$

一組平行弦的斜率 $m \neq 0$ 於是，這組中任一弦 $\overline{C_1C_2}$ 所在的直線方程式都是

$$y=mx+k, \quad k \in R$$

當然，包括了切點 P 的切線 L 在內。

因此，我們可以認定：

$$\vec{T}(\ell, m), \vec{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

即為L的切線與主法線方向的向量，所以，

$$\vec{T}\cdot\vec{N}=0$$

得：$\ell:\dfrac{\partial f}{\partial x}+m\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ ………………（＊）即為所求。

例㈠：由標準式拋物線ᴘ：$x^2+4y-8=0$ 的一組平行弦以 $m=-2$ 為斜率，求這組弦的中點所在的直線方程式。

解：利用（＊）即可求得：$(2x)+(-2)(4)=0$

也就是說，這組弦的中點都在直線 ℓ：$x=4$ 上。

例㈡：推廣到一般式拋物線ᴘ：$4x^2-4xy+y^2+8x+6y-7=0$ 的一組平行弦以 $m=\dfrac{1}{2}$ 為斜率，求這組弦的中點所在的直線方程式。

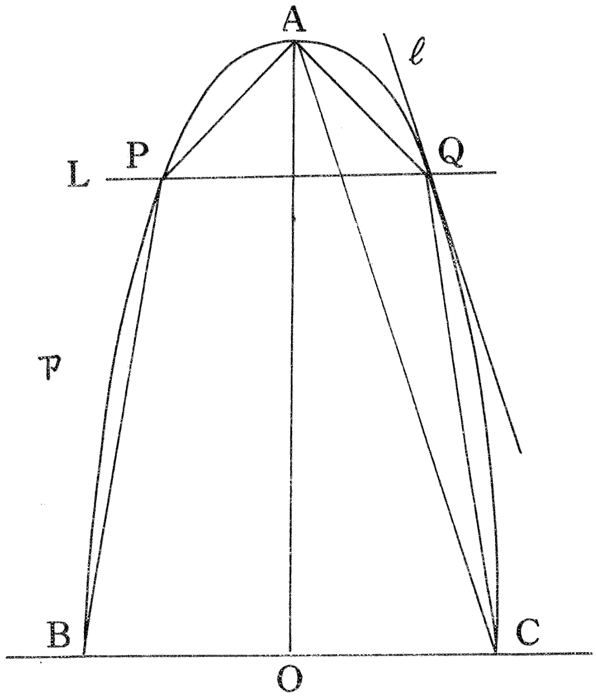
解：利用（＊）即可求得：$(8x-4y+8)+\left(\dfrac{1}{2}\right)(-4x+2y+6)=0$ 也就是說，這組弦的中點都在直線 ℓ：$6x-3y+11=0$ 上。

二、錐線直徑的應用

至於直徑所在的直線方程式的應用，在時下的課本中更付之闕如。因此，在這裏我們提出如下的構想。舉凡有關錐線Min－Max 問題，拿它當主角，總有逢凶化吉之效。

例㈢：設拋物線ᴘ：$y=9-x^2$，其頂點為A，與x軸相交點為B、C。考慮此拋物線 $y\geq 0$ 的部分，試做一直線L與x軸平行，且與此拋物線相交於P、Q兩點，連絡兩點得一凸五邊形APBCQ，使此五邊形的面積得最大值。

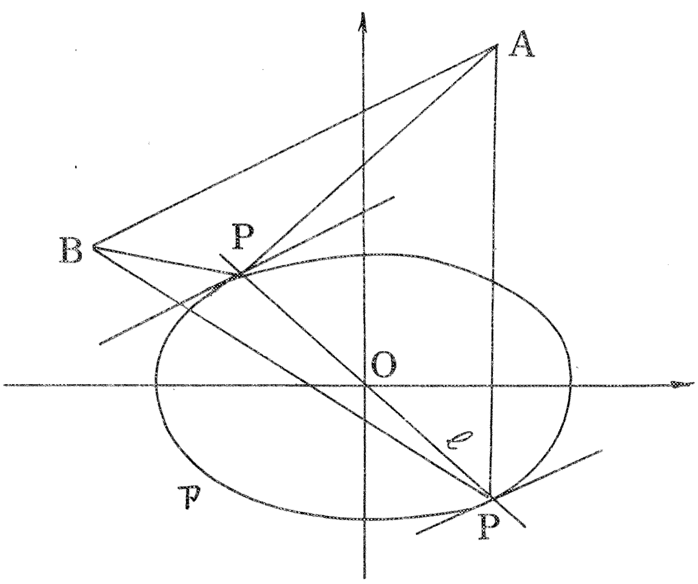
解：五邊形APBCQ的最大面積



＝2（四邊形ＡＯＣＱ的最大面積）

＝2（△ＡＯＣ＋△ＡＣＱ的最大面積）

現在祇要Ｑ決定，△ＡＣＱ 即得，做－３爲斜率，平行於ＡＣ的一組平行弦之直徑，ℓ ：$2x+(-3)(1)=0$而ℓ與ㄕ之交點即爲Ｑ（$\frac{3}{2}$，$\frac{27}{4}$），因此，得Ｌ：$y=\frac{27}{4}$



例㈣：在橢圓ㄗ：$4x^2+9y^2=36$ 上取一點 $P(x,y)$ 與兩點 $A(2,5)$，$B(-4,2)$ 圍成 $\triangle ABP$，試決定 P 使 $\triangle ABP$ 之面積爲最大值或最小值。

解：做以 $\frac{1}{2}$ 爲斜率，平行於 AB 的一組平行弦之直徑

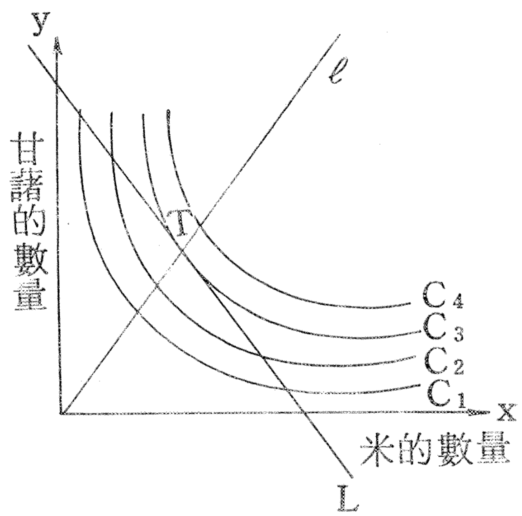
$$\ell: 8x+\left(\frac{1}{2}\right)(18y)=0$$

而 ℓ 與ㄗ之交點

(1) $P\left(\frac{9}{5},\frac{-8}{5}\right)$ 使 $\triangle ABP$ 的面積爲最大。

(2) $P\left(\frac{-9}{5},\frac{8}{5}\right)$ 使 $\triangle ABP$ 的面積爲最小。

例㈤：若某人對 x 數量的米及 y 數量的甘藷，消費後其滿足感設爲 $z=f(x,y)=xy$，但消費必須交付代價，今已知米每斤7.2元，甘藷每斤5.4元，知其消費者將預算432元用來買米和甘藷，問其消費米和甘藷各多少斤，可得到最大滿足感？



解：消費者在購買時受到 $L: 7.2x+5.4y=432$ 的限制，其滿足感 $z=f(x,y)=xy$ 可在X，Y平面上做出若干條無差異曲線 $C_1C_2C_3$ ……，而無差異曲線越向右上延伸表示滿足程度越大。

這一問題相當於要求L與無差異曲線系的切點，T（x，y）

自L解得 $y=-\frac{3}{4}x+80$ 做以 $-\frac{3}{4}$ 爲斜率平行於L的一組平行弦的直徑，

$$\ell：(y)+(-\frac{3}{4})(x)=0$$

L與 ℓ 的交點卽爲T（30，40），卽此人消費30斤米40斤甘藷，可得最大滿足。

三、展望

在高中實驗教材第四册附錄裏提到「關於二次方程式標準化」中，轉軸與平移之先後問題，提到甚多問題。比方說，對於有心錐線，平常已有方法先平移後轉軸。至於對拋物線頂點的尋求，似乎看不到有什麼書提到過……」云云。

這裏我們提出以下的方法：

只要能很快地找到拋物線的對稱軸，則一切問題皆可迎双而解。我們的標準化動作連平移、轉軸都不需要，更不需先求頂點，就是爲了其他原因要找出頂點來，也是輕而易舉的事。現在我們就仿錐線直徑的求法，來求拋物線的對稱軸。

設定：拋物線 $\mathcal{P}$：f（x，y）

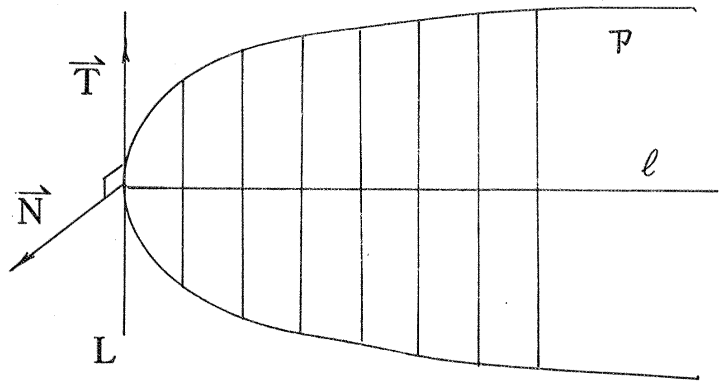
$$f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$$

取平行於對稱軸的直線系，$y=mx+k$，$k\in R$

因此我們可以認定 $\overrightarrow{T}(1,-\frac{1}{m})$，$N(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$

卽爲過頂點P之切線與主法線方向上的向量，所以 $\overrightarrow{T}\cdot\overrightarrow{N}=0$

得：$\ell：\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ……………（**）卽爲所求。



例(六)：將拋物線ㄗ： $4x^2-4xy+y^2+8x+6y-7=0$ 化爲標準式

解：求ㄗ的對稱軸方程式 ℓ $\because 4-4m+m^2=0$ $\therefore m=2$

因此 ℓ ： $(8x-4y+8)-\frac{1}{2}(-4x+2y+6)=0$

即 $2x-y+1=0$

將ㄗ變形為 $5\left(\frac{-2x+y-1}{\sqrt{5}}\right)^2=-4\sqrt{5}\left(\frac{x+2y-2}{\sqrt{5}}\right)^2$

得 $5y'^2=-4\sqrt{5}\,x'$

另外頂點的求法：

我們可以找到對稱軸與過頂點的切線交點即得，

$$\begin{cases} -2x+y-1=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases} \qquad (x,y)=(0,1)。$$

評語：用一個簡單的觀察結果，把數學課本中化很大篇幅來處理的材料予以相當的簡化。教師在教材教法方向的研究，非常值得提倡。