JUMP SEQUENCE——
擴充費氏數列探整數解之奧
高中組數學第三名

北區宜蘭高級中學

作者：馮風雄、林景堉、翁益強

指導老師：莊信明

一、動機：

某次校內數學科考試出現了關於「爬樓梯種類」的問題，幾乎把大家都考倒了。事後大家極有興趣積極研究，經請教老師並參考許多資料，發現越深入研究越覺得有趣。

一個人自出生至今，不知走過多少階梯，但你是否注意到以不同方式走階梯所得的結果？對此結果我們利用求整數解及排列的方法，作一番深入探討，我們發現有一規律性的數列，此數列即爲費氏數列。

二、費氏數列解法之探究：

所謂費氏數列以遞迴定義法來表示就是：

$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ ——(1)

將此數列前幾項寫出即 1、1、2、3、5、8、13………

它的寫法是任何一項（第一、二項除外）都等於前二項的和，比如說上式中接下來的項就是 $8+13=21$。

那麼它的一般項應如何表示呢？

在科學月刊中黃敏晃教授提到一種求法，但是相當艱澀，而賴東昇教授是採用綫性空間求基底之方法予以求出，其所涉及的知識並非每一位高中生所能了解。

因此本文介紹一種高中生比較容易了解接受的方法。在(1)中，初期條件 $a_1=1$，$a_2=1$（引用賴教授文）不妨暫時不予考慮，我們只來探討，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ ——(2)

假設(2)式可以下式$(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$(3)表示，那麼對費氏數列$(a_n)$而言新數列：

$(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})$將是一個等比數列其公比即爲β，展開(3)式：$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\beta\alpha a_n=0$ ——(4)

比較(2)與(4)式，吾人問題變成如何求出α、β而已。假如以另外一種眼光來看，對於一個一元二次方程式而言，若已知其二根爲α，β則其方程式即爲$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ ——(5)

比較(2)式與(4)式可得 $\alpha+\beta=1$

$\alpha\beta=-1$

所以解(4)式：可假設$x^2-x-1=0$

$$得\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

即得 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$， $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

（當然 $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$， $\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 亦可）

此即賴教授文中所提及之二數。爲了計算方便，我們不妨以解(3)式來著手，很明顯(3)式所表示的乃$(a_n-\alpha a_{n-1})$爲等比數列，公比爲β，所以第n－1項爲：

$$(a_n-\alpha a_{n-1})=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-2}$$

則$(a_n-\alpha a_{n-1})=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-2}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow a_n &=\alpha a_{n-1}+(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-2}\\
&=\alpha[\alpha a_{n-2}+(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-3}]+(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-2}\\
&=\alpha^2 a_{n-2}+\alpha(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-2}+(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-2}\\
&=\alpha^2[\alpha a_{n-3}+(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-4}]+\alpha(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-2}\\
&\quad+(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-2}\\
&=\alpha^3 a_{n-3}+\alpha^2(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-4}+\alpha(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-2}\\
&\quad+(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-2}
\end{aligned}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \alpha^{n-1} a_1 + \alpha^{n-2} (a_2 - \alpha a_1) + \alpha^{n-3} (a_2 - \alpha a_1) \beta^1$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots + (a_2 - \alpha a_1) \beta^{n-2}$$

$$= \alpha^{n-1} a_1 + (a_2 - \alpha a_1) [\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3} \beta + \cdots\cdots$$

$$+ \alpha \beta^{n-3} + \beta^{n-2}]$$

$$= \alpha^{n-1} a_1 + (a_2 - \alpha a_1) \frac{\alpha^{n-2} [1 - (\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}]}{1 - \frac{\beta}{\alpha}}$$

$$= \alpha^{n-1} a_1 + (a_2 - \alpha a_1) \frac{\alpha^{n-1} [1 - (\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}}{\alpha - \beta^2}$$

$$= \alpha^{n-1} a_1 + \frac{(a_2 - \alpha a_1) (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{(\alpha - \beta) \alpha^{n-1} a_1 + (a_2 - \alpha a_1) (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^{n-1} (a_2 - \beta a_1) + \beta^{n-1} (\alpha a_1 - a_2)}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^{n-1} (a_2 - \beta a_1) - \beta^{n-1} (a_2 - \alpha a_1)}{\alpha - \beta}$$

即表(3)式中 a_n 項爲 $a_n = \dfrac{\alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) - \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)}{\alpha - \beta}$

若 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，　$\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，故即得：

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(a_2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_1\right) - \left(a_2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a_1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

若 $a_1 = a_2 = 1$ 時　$a_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

此即賴教授文之狹義費氏數列的一般項。

上列的求法，好像是很繁複，但是有一個非常好的優點，就是在(3)中我們可以清楚看到對任何數列

$p a_{n+2} + g a_{n+1} + r a_n = 0$ —— (5)　而言，

只要 $\triangle = g^2 - 4pr \geqslant 0$ 均可以找到 α、$\beta \in R$

使得 $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - a_n)$ 成立，而當 $p = 1$　$g = r = -1$ 時，即所謂之「費氏數列」，於是我們證得下列定理

定理：設數列 (a_n) 定義爲 $a_1 = \varepsilon$，$a_2 = 7$

$p a_{n+2} + g a_{n+1} + r a_n = 0$ ($\forall n \in N$，$q^2 - 4pr \geqslant 0$) 此數列 (a_n) 之一般項

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1}(\tau - \beta\varepsilon) - \beta^{n-1}(\tau - \alpha\varepsilon)}{\alpha - \beta}$$

其中 α、β 爲方程式 $px^2 + qx + r = 0$ 之二根。

三、樓梯問題與費氏數列

在本文一開始即提到的考試題目，今抄錄如下：

問題 1：由山下到山上共有 n 階臺階；一人登山，一步一階

或一步二階，今已知此人走到第 k 階時（ $n>k$ ）總共有 233 種走法，則 (A) 無法判斷 k 爲何數 (B) k 可表爲 n 之二次函數，即 $k=an^2+bn+c$ （ $a\neq 0$ ， $a,b,c\in R$ ）(C) $k>14$ (D) k 爲質數 (E) k 爲偶數，要解這個問題並不簡單，首先應先對一般的爬樓梯問題，先做概略性的介紹，在三上學期的排列組合中有這樣的問題。

例 1 ：一樓到二樓共有樓梯 10 階，頑童一步 1 階或一步 2 階，拾級而上二樓，問可有幾種走法？一般的方法是，設一步 1 階的走 x 步，一步 2 階的走 y 階則

$x+2y=10$ ， x ， $y\in N\cup\{0\}$

解 x ， y 得 $\begin{cases}x=0\\y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=8\\y=1\end{cases}$

$\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ $\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=10\\y=0\end{cases}$

1. 當 $\begin{cases}x=0\\y=5\end{cases}$ 時，此表該頑童一步二階走 5 步走完，只此一種。

2. 當 $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ 時表示，該頑童一步 1 階走 2 步，一步 2 階的走 y 步，換句話說，該頑童在 6 步中有 2 步是一步 1 階的，其餘 4 步是一步 2 階，所以共有 c（ 6 ， 2 ）種走法。

同理 (3) 可得另外四種情形的走法，故共有

$$1+\frac{6!}{4!2!}+\frac{7!}{4!3!}+\frac{8!}{6!2!}+\frac{9!}{8!1!}+1=89 \text{ 種}$$

走法，故得該頑童樓下到樓上共有 89 種走法，再看下一例子：

某報社與記者約好無綫電密碼報告新聞，約定方法是一短聲半秒，一長聲 1 秒，二聲之間相關半秒，以 10 秒爲單位，在此單位時間內，短長聲之不同組合表不同的意思，問在單位時間內

可以表示幾種不同的意思？

這種問題當然也可以上述的方法來處理，爲了說明方便，本文就以上述第一個例子來研究一番。

在爬樓梯一例中，我們知道這問題首先須求出 $x+2y=10$ 之所有非負整數解 k ；u，然後以每一組之 k ；u 代入

$c(k+u,k)=\dfrac{(k+u)!}{k!u!}$ 中計算所得的答案再全部加起來，不妨我們將此總數稱之爲跳躍方法總數（簡稱跳躍總數）。

有了這些知識，我們再回頭來看問題，我們發現這種跳躍總數解法不能用來解問題1.，因此再來探討一下此問題是否有其他方法來解。

考慮一樓梯共有 n 階，用例1考慮跳一次一階或二階，設其跳躍總數爲 $f(n)$，因其第一次跳躍有2種情形，即一階或二階，若其第一步爲一階，剩下的 $n-1$ 階共有 $f(n-1)$ 跳躍總數，若其第一步爲二階，則剩下 $n-2$ 階共有 $f(n-2)$ 跳躍總數，故 $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ $(n\geqslant 3)$ 改寫成數列形式，則有 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$　$a_1=1$，$a_2=2$ $(n\geqslant 3)$ 這式正是費氏數列，因此上述問題即可由費氏數列1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、233．．．．中求得。$k=12$ 與 n 竟然無關——意外的結果。

四、費氏數列之擴充：

(一)從上述的討論中，我們可以淸楚發現爬樓梯問題事實上就是費氏數列。因此以下我們將以爬樓梯問題來擴充費氏數列。

首先，我們將樓梯問題改爲樓下到樓上有樓梯 p 階；某人一步一階，一步二階，一步三階上樓則共有幾種走法？

設一步一階的走 x 步；一步二階的走 y 步；一步三階的走 z 步則 $x+2y+3z=p$，$x,y,z\in N\cup\{0\}$。

1. $p=1$ 時　$x+2y+3z=1$ 解得

x	1	
y	0	
z	0	

故有$\dfrac{1!}{1!}=1$

2. $p=2$ 時　$x+2y+3z=2$ 解得

x	2	0	
y	0	1	
z	0	0	

故有$\dfrac{2!}{2!}+\dfrac{1!}{1!}=2$

3. $p=3$ 時　$x+2y+3z=3$ 解得

x	3	1	0	
y	0	1	0	
z	0	0	1	

故有$\dfrac{3!}{3!}+\dfrac{2!}{1!1!}+\dfrac{1!}{1!}=4$

4. $p=4$ 時　$x+2y+3z=4$ 解得

x	4	2	0	1	
y	0	1	2	0	
z	0	0	0	1	

$$\frac{4!}{4!}+\frac{3!}{2!1!}+\frac{2!}{2!}+\frac{2!}{1!}=7$$

5. $p=5$ 時　$x+2y+3z=5$ 解得

x	5	3	1	2	0	
y	0	1	2	0	1	
z	0	0	0	1	1	

$$\frac{5!}{5!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{3!}{2!1!}+\frac{3!}{2!1!}+\frac{2!}{1!1!}=13$$

6. $p = 6$ 時　$x + 2y + 3z = 6$ 解得

x	6	4	2	0	3	1	0
y	0	1	2	3	0	1	0
z	0	0	0	0	1	1	2

$$\frac{6!}{6!}+\frac{5!}{4!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{3!}{3!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{3!}{1!1!1!}+\frac{2!}{2!}=24$$

7. $p = 7$ 時　$x + 2y + 3z = 7$ 解得

x	7	5	3	1	4	2	0	1
y	0	1	2	3	0	1	2	6
z	0	0	0	0	1	1	1	2

$$\frac{7!}{7!}+\frac{6!}{5!1!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{5!}{4!1!}+\frac{4!}{2!1!1!}+\frac{3!}{2!1!}+\frac{3!}{2!1!}$$
$$=44$$

8. $p = 8$ 時　$x + 2y + 3z = 8$ 解得

x	8	6	4	2	0	5	3	1	2	0
y	0	1	2	3	4	0	1	2	0	1
z	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2

$$\frac{8!}{8!}+\frac{7!}{6!1!}+\frac{6!}{4!2!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{4!}{4!}+\frac{6!}{5!1!}+\frac{5!}{3!1!1!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!2!}$$
$$+\frac{3!}{2!}=81$$

9. $p = 9$ 時　$x + 2y + 3z = 9$ 解得

x	9	7	5	3	1	6	4	2	0	3	1	0
y	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	0
z	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	3

$$\frac{9!}{9!}+\frac{8!}{7!1!}+\frac{7!}{5!2!}+\frac{6!}{3!3!}+\frac{5!}{4!1!}+\frac{7!}{6!}+\frac{6!}{4!1!1!}+\frac{5!}{2!2!1!}$$
$$+\frac{4!}{3!1!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{4!}{2!1!1!}+\frac{3!}{3!}=149$$

10. $p=10$　時　$x+2y+3z=10$ 解得

x	10	8	6	4	2	0	7	5	3	1	4	2	0	1
y	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	0	1	2	0
z	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3

$$\frac{10!}{10!}+\frac{9!}{8!1!}+\frac{8!}{6!2!}+\frac{7!}{4!3!}+\frac{6!}{4!2!}+\frac{5!}{5!}+\frac{8!}{7!1!}+\frac{7!}{5!}+\frac{6!}{3!2!}$$

$$+\frac{5!}{3!}+\frac{6!}{4!2!}+\frac{5!}{2!2!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{3!3!}=274$$

將此結果寫成數列 1、2、4、7、13、24、44、81、149 274．．．．．注意此數列可發現它有一個特性，就是 $n\geqslant 4$，其第 n 項恰好是其前 3 項的和，改寫成遞迴定義得：

廣義費氏數列：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n\ \forall n\in N$，至於此數列之一般項可否像前述 (4) 式予以解出，目前正續研究中。

㈡其次，我們再由另一個方向來探討樓梯問題：

設樓下到樓上有 R 階，某人一步 a 階，一步 b 階 $(a.b)=1$ 跳躍而上（假使可以一躍而上數階）。

仿前，設一步 a 階有 x 步，b 階有 y 步，則 $ax+by=R$，$x,y\in N\cup\{0\}$——爲甲式。

故得數列 0、0、1、1、0、1、2、1、1、3、3、2、4、6、5、6、10、11、11、16 這時仍看不出其規律性。

現在我們從方程式本身來看看。

$ax+by=R\ (a.b)=1$，$x,y\in N\cup\{0\}$，$a.b\in N$

因爲 $a.b\in N$，$x,y\in N\cup\{0\}$，因此，從 $R=0$ 到 $R=a+b$ 之間 x：y 要有解應只有 $R=ka$，$k\in N$，$R=jb$，$j\in N$ 時有解；換句話說在 (3) 中從 $2x+3y=R$ 中，從 $R=0$ 到 $R=5$ 中，只有 $R=2,4$ 與 3 有解，而 $R=1$ 應無解證之 (3) 中無誤，因此要有規律性，應在 $p=5$ 之後再看 (4) $3x+4y=k$ 時 $R=0$ 到 $R=7$ 中，$R=3,4,6$ 時有解，其餘應無解，證之 (4) 式中之表確實無誤。

其次，再來探討數列本身的規律性：

在（3）$2x + 3y = R$中從第六項看起顯然第六項加第七項等於第九項，第七項加第八項等於第十項……寫成遞迴數列即 $\forall n \in N$，$n \geqslant a+b$，$a_n + a_{n+1} = a_{n+3}$ 在（4）$3x + 4y = R$中，從第12項起顯然第十二項加第十三項等於第十六項，第十三項加第十四項等於第十七項……寫成遞迴數列即 $\forall n \in N$，$n \geqslant a+b$，$a_n + a_{n+1} = a_{n+4}$，實際上；（3）（4）中將規律往前幾項雖不難發現，只要從（$a-1$）（$b-1$）項起就有此規律。底下再舉二例來底下再舉二例來看：

（5）$a = 2$，$b = 5$ 時

P	……	4	5	6	7	8	9	10	11	12
跳躍總數		1	1	1	2	1	3	2	4	4

P		13	14	15	16	17	18	19	20	
跳躍總數		5	7	7	11	11	16	18	23	

（6）$a = 3$，$b = 5$ 時

P	……	8	9	10	11	12	13	14	15	16
跳躍總數		2	1	1	3	1	3	4	2	6

P	17	18	19	20						
跳躍總數	5	5	10	7						

顯然（5）中 $\forall n \geqslant 4$，$a_n + a_{n+3} = a_{n+5}$

（6）中 $\forall n \geqslant 8$，$a_n + a_{n+2} = a_{n+5}$

綜合（1）～（4）對 $a.b \in N$，$x, y \in N \cup \{0\}$ 若以 a_R 表 $ax + by = R$時之跳躍方法總數，則 $\forall P \in N$，$P \geqslant (a-1)(b-1)$，$a_R + a_{R+b-a} = a_{P+b}$（$a.b$）$= 1$ 而具有此性質之數列即稱之為 JUMP SEQUENCE。述成定義如下：

定義：數列 $(a_n)_{n+1}$ 若 a_n ，$a_{n+1}\cdots\cdots a_{n+b-1}$ 均已知且 $a_n+a_{n+b-a}=a_{n+b}$ $(a\cdot b)=1$ ，則 (a_n) 稱爲 JUMP SEQUENCE。

上述定義當 $a=1$，$b=2$ 時 (a_n) 即爲費氏數列。論述到此，已將費氏數列做二方向的擴充。

緊接著我們來驗證所有 JUMP SEQUENCE 成爲一線性空間。

設 $T=\{(a_n)\mid a_n+a_{n+b-a}=a_{n+b}\}$

1. $(a_n)\in F\Rightarrow(ka_n)\in F$

令 $b_n=ka_n$ 則

$$b_n+b_{n+b-a}=ka_n+ka_{n+b-a}=k(a_n+a_{n+b-a})=ka_{n+b}=b_{n+b}$$

$\therefore(b_n)\in T$

2. $(a_n)\in T$，$(b_n)\in T\Rightarrow(a_n+b_n)\in T$

令 $(c_n)=(a_n)+(b_n)$ 即 $c_n=a_n+b_n$

則
$$\begin{aligned}c_n+c_{n+b-a}&=(a_n+b_n)+(a_{n+b-a}+b_{n+b-a})\\&=(a_n+a_{n+b-a})+(b_n+b_{n+b-a})\\&=a_{n+b}+b_{n+b}\\&=c_{n+b}\Rightarrow(c_n)\in F\end{aligned}$$

因此我們可得 T 爲一綫性空間。

仿照定理 1 之推法，我們可以得到一個極爲相似的公式，不過這公式太繁複不在此列出。上面所討論的雖然是以「爬樓梯」做爲例子，事實上如例 2 中電報暗碼……等只要具有如「樓梯問題」相類似的性質，均有相同的結果，將上述整理下列三定理。

定理 2：以一步 1 階，一步 2 階，一步 3 階上樓，假設到第 n 階 $(n\in N)$ 的上樓方法總數爲 $f(n)$ 則 $f(n)+f(n+1)+f(n+2)=f(n+3)$，$\forall n\in N$

定理 3：以一步 a 階，b 階〔$(a\cdot b)=1$〕方式上樓

假設到第 n 階的上樓方法總數爲 $f(n)$，則 $(n\in N)$

$f(n)+f(n+b-a)=f(n+b)$

定理4：設 $F=\{(a_n)\mid a_n+a_{n+b-a}=a_{n+b}$，$\forall n\in N$

$(a\cdot b)=1$，a_1，$a_2\cdots\cdots a_{n+b-a}$ 均已知$\}$

則 F 爲一線性空間。

參考資料：

1. 科學月刊，63年7月號，8月號，64年9月號，10月號。
2. 數學傳播，第一卷第二期。
3. 高中，東華書局第一册，第五册數學課本。
4. 日本大學入試數學試題彙編（昭和55年）。

評語：1. 依照費氏數列遞廻定義來求它的一般項，過程常覺煩瑣，本文將費氏數列擴充成一新數列而使費氏數列成其一特例，并提出一般項的方法公式。

2. 費氏數列一般項求法公式，黃敏晃、賴東昇教授先後在科學月刊與數學傳播先後著文發表，本文能作更一步的研究，精益求精，值得鼓勵。