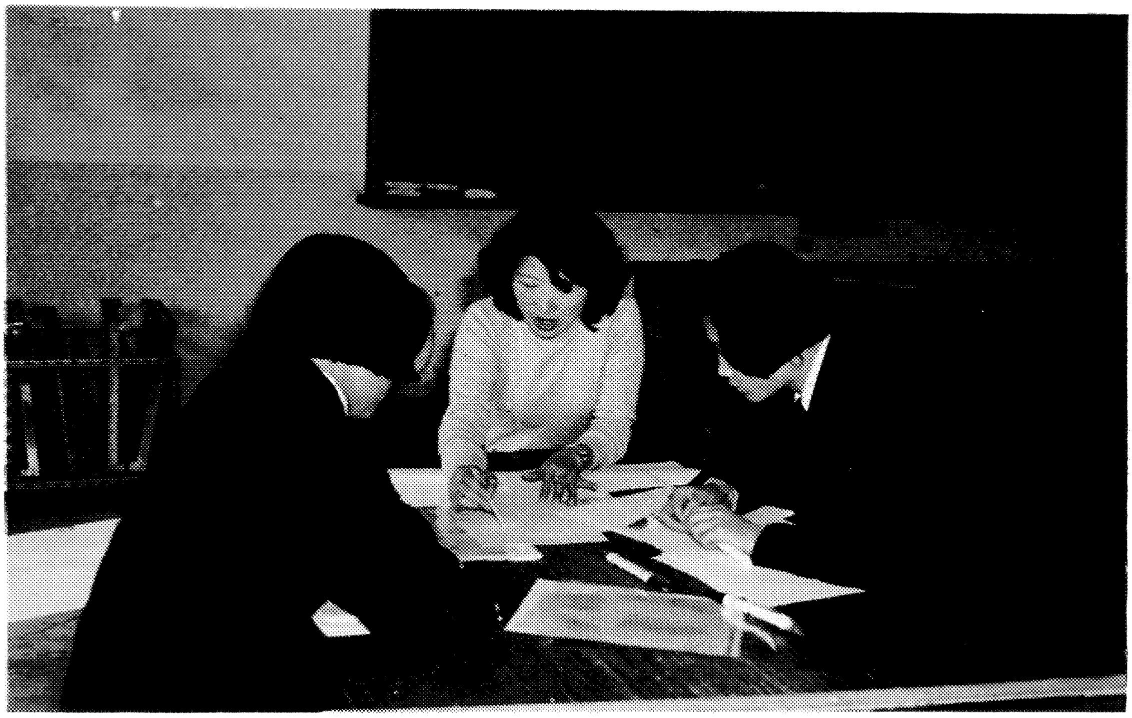
直線疊紋的聯想

高中組數學第三名

省立新竹女子高級中學

作者：溫讓珊等三名
指導老師：范秀禎、黃雲田

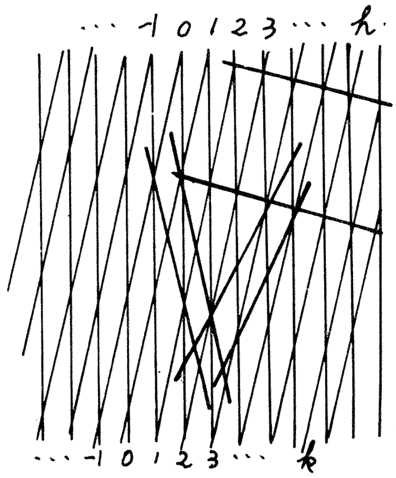


一、動機與目的：

中國時報69.10.13.刊登了一篇有關疊紋的報導。

如左下圖所示係兩張同心輻射線交疊，便產生了新的紋路，謂之疊紋。這美妙的幾何圖案引發了我們研究直線疊紋的動機。（因爲那時我們正學到平面上的直線方程式 。我們用印有等間隔平行條紋的筆記本紙由複印機製成膠片（經過縮小）。兩者以 θ 角交疊，圖從略，結果看到有一群特別明亮的紋路產生，這就是直線的疊紋，我們稱他爲亮帶，當 θ 角改變時，亮帶的位置及間隔距離也跟著改變，仔細觀察，我們發現亮帶經過兩群平行線的所有交點，於是，我們想將座標幾何學以致用，希望能利用法式求出亮帶的間隔距離，這是本文最主要的目的。

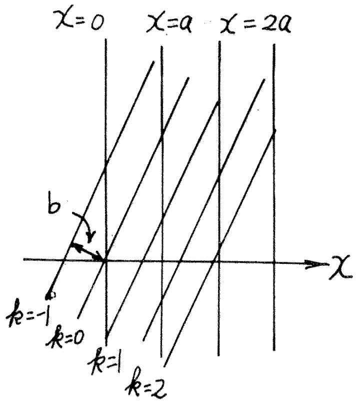
附圖一



附圖二

二、方法與過程

將附圖一（固定 θ 角）所見之圖形畫成附圖二，兩群平行線其中一群可令爲鉛直，間隔距離爲 a ，另一群與之夾 θ 角者爲傾斜，，間隔距離爲 b ，（ a ， b 數值接近 ），因爲它們均爲等間隔，所以，可將鉛直者標爲第 0，1，2，3 …… h 條，傾斜者亦標出第 $-1,0,1,\cdots\cdots k$ 條， h ， $k\in Z$ ，以（ h ， k ） S' 表第 h 條鉛直線與第 k 條斜線之交點座標，（ S' 表斜角座標系 ），則所有交點與（ h ， k ） S' 成一一對應連接任意兩點可得不同之點座標變化率 v ，如圖中紅線之 $v=1$ ，藍線之 $v=2$ ，綠線之 $v=\dfrac{1}{2}$ ，因可任意選擇適當之原點，故 $\forall\ v=Q$ ， $\exists\,!$ 平行線群與之對應，由附圖二可知，亮帶就是 $v=1$ 之交點軌跡，我們要求亮帶之間隔距離，可利用直線的法式，所以，採用直角座標系 S 來探討。



鉛直平行線群之方程式可令之爲 $x=a\cdot h$ ， $h\in z$ ， a 表間隔距離。而傾斜的這群平行線其中第 k 條直線之法距爲 $-bk$ ，法角爲 $\pi-\theta$ ，所以其方程式利用法式可表爲 $x\cdot\cos(\pi-\theta)+y\cdot\sin(\pi-\theta)=-bk$，亦即 $x\cdot\cos\theta-y\cdot\sin\theta=bk$ ，

$k \in Z$，兩群平行線之 S 交點座標卽爲方程組

$$x = ah$$
$$x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta = bk \qquad h, k \in Z$$

之解，亦卽 $\left(ah, \dfrac{ah\cos\theta - bk}{\sin\theta} \right)_s$.

要求亮帶之間隔距離，可以過 $(0, -1)_{s'}$ 之直線的法距來表示，亮帶過 $(0,0)_{s'}$ 和 $(1,1)_{s'}$（換算爲 $(0,0)_s$，$\left(a, \dfrac{a\cos\theta - b}{\sin\theta} \right)_s$）者其斜率爲 $\dfrac{a\cos\theta - b}{a\sin\theta}$，則鄰近的一條過 $(0, -1)_{s'}$（卽 $\left(0, \dfrac{b}{\sin\theta}\right)_s$）者，其方程式（利用點斜式）可表爲 $y - \dfrac{b}{\sin\theta} = \dfrac{a\cos\theta - b}{a\sin\theta} x$ 化成

$(a\cos\theta - b)x - a\sin\theta \cdot y + ab = 0$ 其法距卽亮帶間的距離
$d = ab / \sqrt{(a\cos\theta - b)^2 + (a\sin\theta)^2} =$
$ab / \sqrt{a^2 - 2ab\cos\theta + b^2}$ 式中 θ 愈小時 $\Rightarrow \cos\theta$ 愈大 $\Rightarrow$ 分母愈小 $\Rightarrow d$ 愈大，轉動膠片可印證事實與理論相符合。

三、討論與證明

兩群平行線有無數個交點，任意連接兩點，就得到一群對應之平行線，其間隔距離 $d\left(v \dfrac{n}{m}\right.$ 隨著 $v = \dfrac{n}{m} \in Q$ 而改變，在附圖一、二中，所見亮帶卽爲 $v = 1$ 之軌跡，我們求出亮帶的間隔距離後，聯想到兩個問題：

(一)其他 v 值所對應之平行線群之間隔距爲何？

(二)若 a，b 相差較大時，亮帶是否仍爲 $v = 1$ 之交點軌跡？

可看出：

(1) $d(v_1) > d(v_2) > d(v_3)$ 同時 $OP_1 < OP_2 < OP_3$，
$P_1 = (1, 1)_{s'}$，$P_2 = (1, 2)_{s'}$，$P_3 = (1, 3)_{s'}$

(2)當 $v = \dfrac{n}{m} \in Q$，$(m, n) = 1$ 時，在 $(0, 0)_{s'}$ 與

$(0, -1)s'$之間，有$m-1$條$v=\frac{n}{m}$之平行線。且

$d(v_1) > d(v\frac{n}{m})$，$m \neq n$

我們將證明(1)式之一般性及(2)式由圖形所歸納出來之性質，並由此推出$d(v\frac{n}{m})$與m，n之關係式。

㈠先證明以$(0,0)s'$，$(0,-1)s'$，$(m, n-1)s'$，$(m,n)s'$為頂點之平行四邊形內部（以T表之）有$m-1$個整數點。

T可以不等式方程組

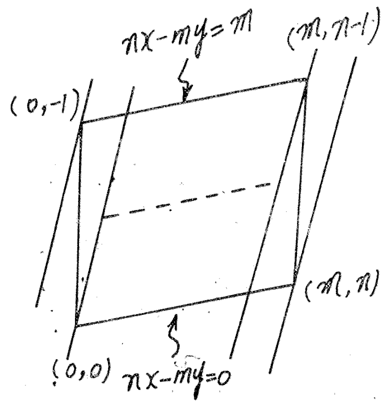
$$\left.\begin{array}{l} 0 < x < m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 0 < nx - my < m \cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$$ 表之

由(1)式令$x=i$代入(2)式解得

$0 < ni - my < m \Rightarrow$

$-ni < -my < m - ni \Rightarrow$

$\frac{ni}{m} - 1 < y < \frac{ni}{m}$.



$\because 0 < i < m$，$\therefore \frac{ni}{m} \notin Z$

（$\because m$，n互質）則

$\exists!\, j = [\frac{ni}{m}] \ni \frac{ni}{m} - 1 < y = j < \frac{ni}{m}$.

[ ]表高斯符號，$\therefore \forall x = i$，$0 < i < m$，$\exists!\, y = j \in Z$

$\ni (x, y) \in$平行四邊形內部，$\therefore \square$內有$m-1$個整數點，

而得知$(0,0)s'$與$(0,-1)s'$間有$m-1$條$v=\frac{n}{m}$之平行線，此時$d(v\frac{n}{m}) = \frac{1}{m} \cdot d(L_0, L_{-1}) = \frac{1}{m}$.

$mab / \sqrt{m^2 a^2 - 2abmn\cos\theta + n^2 b^2}$

$= ab / \sqrt{m^2 a^2 - 2abmn\cos\theta + n^2 b^2}$

其中 L_0 過（0，0）s'，L_{-1} 過（0，−1）s'）

（∵（0，0）s' 與（m，n）s' 連線之斜率為 $\dfrac{ma\cos\theta - bn}{ma\sin\theta}$）

(二)（m，n）=1　$P_{\frac{n}{m}} = (m, n)_{s'} = \left(ma, \dfrac{ma\cos\theta - nb}{\sin\theta}\right)_s$

$$\therefore OP_{\frac{n}{m}} = \sqrt{(ma)^2 + \left(\frac{ma\cos\theta - nb}{\sin\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{m^2a^2 - 2abmn\cos\theta + n^2b^2}}{\sin\theta}$$

而 $d\left(v\dfrac{n}{m}\right) = ab / \sqrt{m^2a^2 - 2abmn\cos\theta + n^2b^2}$

$\therefore d\left(v\dfrac{n}{m}\right) \cdot OP_{\frac{n}{m}} = \dfrac{ab}{\sin\theta}$ 為一定值

故知 $OP_{\frac{n}{m}}$ 愈小，$d\left(v\dfrac{n}{m}\right)$ 愈大。

當 $OP_{\frac{n}{m}}$ 有極小值時，$d\left(v\dfrac{n}{m}\right)$ 就有極大值，此時 $v = \dfrac{n}{m}$ 之軌跡最為明顯，即所見亮帶。

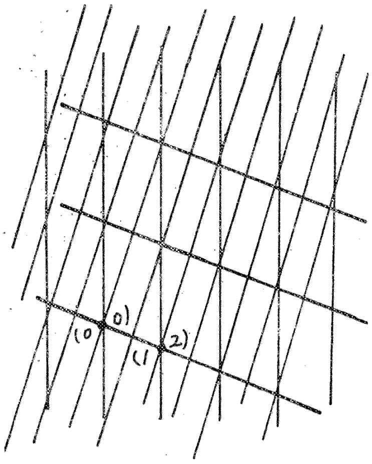
$m^2a^2 - 2abmn\cos\theta + n^2b^2 = (ma\cos\theta - nb)^2 + m^2a^2\sin^2\theta$

∴當 $v = \dfrac{n}{m} = \dfrac{a\cos\theta}{b}$ 時，可產生亮帶。

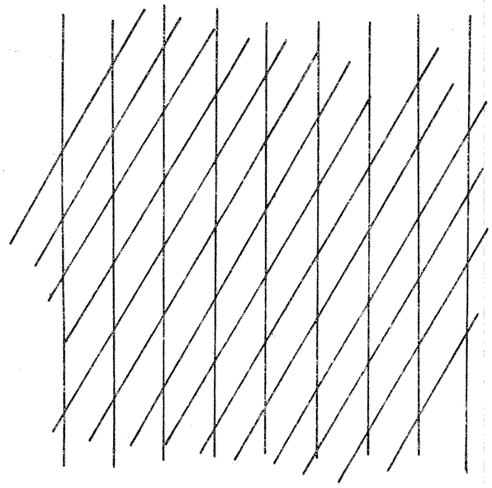
但 $v = \dfrac{n}{m} \in Q$，而 $\cos\theta$ 通常是小於 1，且趨近於 1 之實數，

所以，亮帶之軌跡描述約在 $v = \dfrac{a}{b}$ 時，當 a，b 很接近時，自然亮帶就是 $v = 1$ 之交點軌跡了。

但 a，b 相差較大時，如下圖：



$v=2$



$\frac{a}{b} \doteq 2$ ， $d(v_2)$ 最大

$\frac{a}{b} \doteq \frac{3}{2}$ ， $d(v_1)$， $d(v_{\frac{3}{2}})$ 均很大

當 $\frac{a}{b} \doteq 2$ 時，亮帶爲 $v=2$ 之軌跡，而 $\frac{a}{b} \doteq \frac{3}{2}$ 時，有兩群較明顯之亮帶，分別爲 $v=1$ ， $v=\frac{3}{2}$ 之軌跡，而 $\frac{a}{b} \doteq 1$ 時，$d(v_1)$ 比其他 $d(v\frac{n}{m})$ 大甚多，($\frac{n}{m} \neq 1$)，所以，只看到一群亮帶。（此結果見原始數據）

以上的論證，使我們的兩個問題獲得了答案。

四、結論與感想：

本文係利用所學過的數學知識，來探討直線的疊紋，經座標處理，求得亮帶的間隔距離 $d = ab / \sqrt{a^2 - 2ab\cos\theta + b^2}$ 此結果令我們十分興奮，啓發了我們進一步探討的信心，有此鼓勵，我們繼續做了很多作圖，經過歸納，大膽假設與小心求證，獲得結論：兩群平行線以 θ 角交錯，得到無數個交點 $(h, k)s'$，也就有無限群 $v=\frac{n}{m}$ 之平行線，其間隔距離 $d(v\frac{n}{m})$ 可表爲 m ， n 之函數，即

$d\left(v\dfrac{n}{m}\right)=ab/\sqrt{m^2a^2-2abmn\cos\theta+n^2b^2}$ 亮帶是其中最近交點之連線軌跡，有時不只一群，可稱之爲最亮帶、次次亮帶、……，其間隔距離爲 $\dfrac{ab}{\sin\theta}/\overline{OP_{\frac{n}{m}}}$ 。

本文由產生靈感，構想到整理完成，雖花費很多心血，但也使我們更體會到數學的眞義：(一)數學是解釋自然現象最有力、最眞確的工具。(二)正確的推測能由數學證明獲得支持。也由此了解數學雖抽象而嚴謹，但也有具體生動的一面，本文即以有趣的畫面爲題材，循序漸進的引入座標處理，獲得簡易的結論。本文最大的願望是希望提高同學們對數學的研究興趣，隨時將平日所學應用到日常生活上，長此以往，數學就不再是令人望之生畏的學科了。

五、評語：

數量化的物理現象並據以算出具體的結果，值得鼓勵。