三角形五心坐標的向量解法

高中組數學第二名

省立嘉義女子高級中學

作者：賴亮如等四名
指導老師：洪銡雄

一、動機：

已予△ABC三頂點之坐標爲$A(a_1,a_2)$,$B(b_1,b_2)$,$C(c_1,c_2)$

則其重心的坐標爲$\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3},\dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$，此定理的證明可藉分點坐標的公式證之，也可藉求出二中綫的方程式聯立解交點證出。待我們學到向量後，發現用向量的方法來證明更方便，其證明爲：

設重心爲G則因$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{O}$，故得

$(\overrightarrow{G}-\overrightarrow{A})+(\overrightarrow{G}-\overrightarrow{B})+(\overrightarrow{G}-\overrightarrow{C})=\overrightarrow{O}$

即$3\overrightarrow{G}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}$

$$\therefore \overrightarrow{G}=\frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}}{3}=\frac{1}{3}([a_1,a_2]+[b_1,b_2]+[c_1,c_2])$$

$$=\left[\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right]$$

故G之坐標爲$\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3},\dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

（註：以上$\overrightarrow{A}$表$\overrightarrow{OA}$，O表原點，以下仿此）

這給我們很大的信心與啓示：是否其他諸心也可用向量的方法來處理呢？於是我們展開了下列的研究！

二、研究過程與內容：

首先我們發現假如G爲△ABC的重心，則△GBC，△GCA，△GAB之面積均相等（簡記△GBC=△GCA=△GAB，以下同此法記），也就是△GBC：△GCA：△GAB＝1：1：1 而有

$1\,\overrightarrow{AG}+1\,\overrightarrow{BG}+1\,\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{O}$ 即 $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{O}$ 那麼推廣言之，假如 O 爲 $\triangle ABC$ 內部一點且 $\triangle OBC:\triangle OCA:\triangle OAB=\ell:m:n$ （ $\ell.m.n$ 爲正數）是否就應該有 $\ell\,\overrightarrow{AO}+m\,\overrightarrow{BO}+n\,\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{O}$ 呢？假如此式能夠成立，那我們豈不是就可以利用它仿重心的方法來求出△其他諸心的坐標？經過我們的研討，果然不錯，此式能夠成立，我們將之列爲定理 1 如下：

定理 1：設 O 爲 $\triangle ABC$ 內部一點，若 $\triangle OBC:\triangle OCA:\triangle OAB=\ell:m:n$（ $\ell.m.n$ 爲正數），則

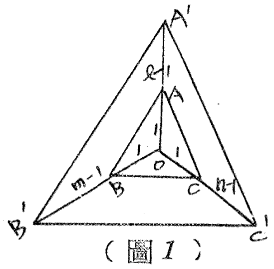
$$\ell\,\overrightarrow{AO}+m\,\overrightarrow{BO}+n\,\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{O}$$

證　明：1. 令 $\overrightarrow{A'O}=\ell\,\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{B'O}=m\,\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{C'O}=n\,\overrightarrow{CO}$（如圖 1 ）

則 $\dfrac{\triangle OA'B'}{\triangle OAB}=\dfrac{\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}$

$=\dfrac{\ell}{1}\cdot\dfrac{m}{1}=\ell m \Rightarrow$

$\triangle OA'B'=\ell m\triangle OAB$



（圖 1 ）

$\dfrac{\triangle OB'C'}{\triangle OBC}=\dfrac{\overline{OB'}\cdot\overline{OC'}}{\overline{OB}\cdot\overline{OC}}$

$=\dfrac{m}{1}\cdot\dfrac{n}{1}=mn\Rightarrow\triangle OB'C'=mn\triangle OBC$

$\dfrac{\triangle OC'A'}{\triangle OCA}=\dfrac{\overline{OC'}\cdot\overline{OA'}}{\overline{OC}\cdot\overline{OA}}=\dfrac{n}{1}\cdot\dfrac{\ell}{1}=n\ell\Rightarrow$

$\triangle OC'A'=n\ell\triangle OCA$

2. 已知 $\triangle OBC:\triangle OCA:\triangle OAB=\ell:m:n$

故 $\exists k>0\ni\triangle OBC=\ell k$, $\triangle OCA=mk$, $\triangle OAB=nk$

3. $\therefore\triangle OB'C'=mn\ell k$, $\triangle OC'A'=m\ell mk$, $\triangle OA'B'=\ell mnk$

即 $\triangle OB'C'=\triangle OC'A'=\triangle OA'B'=mn\ell k$

$\therefore O$ 爲 $\triangle A'B'C'$ 之重心

故 $\overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{B'O}+\overrightarrow{C'O}=\overrightarrow{O}$,

即 $\ell\overrightarrow{AO}+m\overrightarrow{BO}+n\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{O}$ 證畢

以上假如O不在$\triangle ABC$內部，那結果該如何呢？又有底下的結論：

定理 2：設O爲$\triangle ABC$外部一點，$\triangle OBC:\triangle OCA:\triangle OAB=\ell:m:n$（$\ell.m.n$ 爲正數）

若O在$\angle CAB$或其對頂角之內部，則

$$-\ell\overrightarrow{AO}+m\overrightarrow{BO}+n\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{O}$$

若O在$\angle ABC$或其對頂角之內部，則

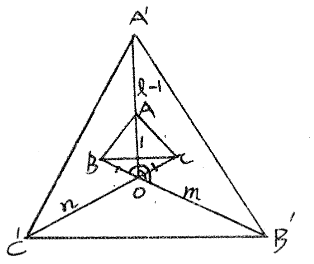
$$\ell\overrightarrow{AO}-m\overrightarrow{BO}+n\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{O}$$

若O在$\angle BCA$或其對頂角之內部，則

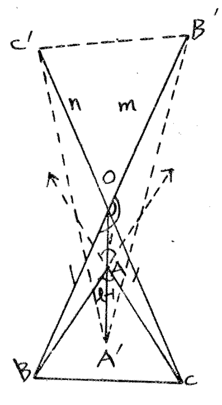
$$\ell\overrightarrow{AO}+m\overrightarrow{BO}-n\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{O}$$

證　明：我們證明O在$\angle CAB$或其對頂角內部的情形卽可，（卽欲證 $\ell\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{BO}+n\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{O}$），其他兩種情形同理可證：

（如圖 2 與圖 2′，圖 2 表O在$\angle BAC$之內部，圖 2′ 表O在$\angle BAC$對頂角之內部）



（圖 2 ）



（圖 2′）

1. 令 $\overrightarrow{OA'}=\ell\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=m\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{OC'}=n\overrightarrow{CO}$

則 $\dfrac{\triangle OA'B'}{\triangle OAB}=\dfrac{\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}=\dfrac{\ell}{1}\cdot\dfrac{m}{1}=\ell m\Rightarrow$

$$\triangle OA'B'=\ell m\triangle OAB$$

同理可得$\triangle OB'C'=mn\triangle OBC$，

$$\triangle OC'A'=n\ell\triangle OCA$$

2. 已知$\triangle OBC:\triangle OCA:\triangle OAB=\ell:m:n$

故$\exists\, k>0$，$\ni \triangle OBC=\ell k, \triangle OCA=mk$，

$\triangle OAB=nk$

3. $\therefore \triangle OB'C'=\triangle OC'A'=\triangle A'B'=\ell m n\, k$

$\therefore O$爲$\triangle A'B'C'$之重心

故$\overrightarrow{OA}'+\overrightarrow{OB}'+\overrightarrow{OC}'=\overrightarrow{O}$即 $\ell\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{BO}+n\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{O}$

亦即$-\ell\overrightarrow{AO}+m\overrightarrow{BO}+n\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{O}$ 證畢

利用以上定理1、2我們可推得內心、外心、垂心、傍心的性質如下：（首先約定幾個符號：$\triangle ABC$中，令A,B,C表三個角，a,b,c分別表其對邊的長）

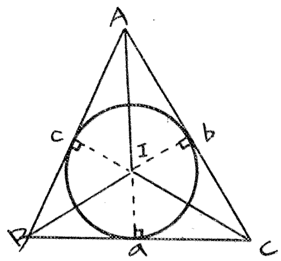
定理3：設I爲$\triangle ABC$的內心，則$a\overrightarrow{AI}+b\overrightarrow{BI}+c\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{0}$

證　明：I爲$\triangle ABC$的內心，即爲內切圓的圓心（如圖3），設半徑爲r，則

$\triangle IBC:\triangle ICA:\triangle IAB$

$=\frac{1}{2}ar:\frac{1}{2}br:\frac{1}{2}cr$

$=a:b:c$



（圖3）

由定理1得$a\overrightarrow{AI}+b\overrightarrow{BI}+c\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{0}$證畢。

定理4：設P爲$\triangle ABC$的外心，則

$\sin 2A\,\overrightarrow{AP}+\sin 2B\overrightarrow{BP}$

$+\sin 2C\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{O}$

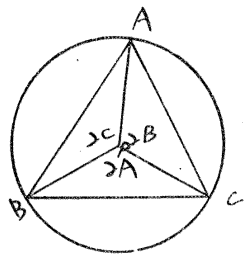
證　明：分二種情形討論：

㈠若P在$\triangle ABC$之內部（如圖4）

則$\angle APB=2C$，

$\angle BPC=2A$，

$\angle CPA=2B$



（圖4）

P爲外心，就是外接圓的圓心，令半徑爲R

則$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=R$

$\therefore \triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$

$= \frac{1}{2}R^2\sin 2A : \frac{1}{2}R^2\sin 2B : \frac{1}{2}R^2\sin 2C$

$= \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

故由定理 1 得 $\sin 2A\overrightarrow{AP} + \sin 2B\overrightarrow{BP} + \sin 2C\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{O}$

㈡若 P 在 $\triangle ABC$ 之外部，但在 $\angle CAB$ 之內部（如圖 5 ）

則 $\angle APB = 2C$，

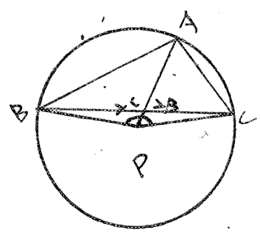
$\angle APC = 2B$

而 $\angle BPC = 2B + 2C$

$= 2(B+C)$

$= 2(\pi - A)$

$= 2\pi - 2A$



（圖 5 ）

仍會 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = R$

則 $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$

$= \frac{1}{2}R^2\sin(2\pi - 2A) : \frac{1}{2}R^2\sin 2B : \frac{1}{2}R^2\sin 2C$

$= -\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

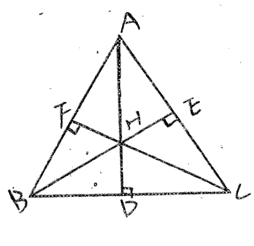
故由定理 2 知：$-(-\sin 2A)\overrightarrow{AP} + \sin 2B\,\overrightarrow{BP} + \sin 2C\,\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{O}$

即 $\sin 2A\overrightarrow{AP} + \sin 2B\overrightarrow{BP} + \sin 2C\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{O}$

同理若 P 在 $\triangle ABC$ 之外部，但在 $\angle ABC$ 或 $\angle BCA$ 之內部亦可證明成立，證畢。

定理 5 ：設 H 爲 $\triangle ABC$ 之垂心且 $\triangle ABC$ 不爲直角△，則

$\tan A\overrightarrow{AH} + \tan B\overrightarrow{BH} + \tan C\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{O}$



證　明：㈠當 H 在 $\triangle ABC$ 內部時，(如圖 6)

視 $\overline{HC}$ 爲 $\triangle HCB$ 與 $\triangle HCA$ 之公共底

（圖 6 ）

則其對應高分別為$\overline{BF}$與 $\overline{AF}$

於是$\triangle HCB:\triangle HCA=\overline{BF}:\overline{AF}=$

$=\overline{CF}\cot B:\overline{CF}\cot A$

$=\cot B:\cot A=\tan A:\tan B$

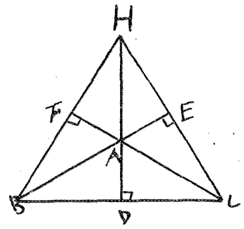
同理$\triangle HAC:\triangle HAB=\tan B:\tan C$

故$\triangle HBC:\triangle HCA:\triangle HAB=\tan A:\tan B:\tan C$

$\therefore \tan A\overrightarrow{AH}+\tan B\overrightarrow{BH}+\tan C\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{O}$

二當H在$\triangle ABC$之外部時

（$\angle BAC$為鈍角）如圖7



（圖7）

則因A、E、H、F四點共圓故

$\angle BHC=\pi-\angle EAF$

$=\pi-\angle BAC$

$=\pi-A$

在Rt$\triangle BCF$中$\angle FBC=\dfrac{\pi}{2}-\angle FCB=\dfrac{\pi}{2}-C$即

$\angle HBC=\dfrac{\pi}{2}-C$

在Rt$\triangle BCE$中$\angle BCE=\dfrac{\pi}{2}-\angle EBC=\dfrac{\pi}{2}-B$即

$\angle BCH=\dfrac{\pi}{2}-B$

因A為$\triangle BCH$之垂心故由一之結論知

$\tan(\pi-A)\overrightarrow{HA}+\tan(\dfrac{\pi}{2}-C)\overrightarrow{BA}+$

$\tan(\dfrac{\pi}{2}-B)\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{O}$

$\therefore -\tan A\overrightarrow{HA}+\cot C(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB})+$

$\cot B(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HC})=O$

即$\tan A\overrightarrow{AH}+(\cot C+\cot B)\overrightarrow{HA}-\cot C\overrightarrow{HB}-$

$\cot B\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{O}$

$(\tan A-\cot C-\cot B)\overrightarrow{AH}+\cot C\,\overrightarrow{BH}+\cot B\,\overrightarrow{CH}$
$=\overrightarrow{O}$

兩端同乘以 $\tan B\tan C$ 得

$(\tan A\tan B\tan C-\tan B-\tan C)\overrightarrow{AH}+$
$\tan B\,\overrightarrow{BH}+\tan C\,\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{O}$

因 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$

$(\because A+B+C=\pi)$

故得 $\tan A\,\overrightarrow{AH}+\tan B\,\overrightarrow{BH}+\tan C\,\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{O}$

同理若 $\angle B$ 或 $\angle C$ 爲鈍角時亦可證得，證畢。

定理 6：設 I_A, I_B, I_C 分別爲 $\triangle ABC$ 在 $\angle CAB$，$\angle ABC$，$\angle BCA$ 內部之傍心

則(1) $(-a)\overrightarrow{AI_A}+b\,\overrightarrow{BI_A}+c\,\overrightarrow{CI_A}=\overrightarrow{O}$

(2) $a\,\overrightarrow{AI_B}+(-b)\overrightarrow{BI_B}+c\,\overrightarrow{CI_B}=\overrightarrow{O}$

(3) $a\,\overrightarrow{AI_C}+b\,\overrightarrow{BI_C}+(-c)\overrightarrow{CI_C}=\overrightarrow{O}$

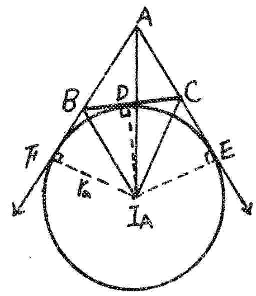
證　明：我們證明(1)式卽可其餘同理

I_A 爲 $\angle CAB$ 內部之傍心，

卽爲 $\angle CAB$ 傍切圓的圓心

如圖 8，令半徑爲 r_a 則

$\overline{I_AD}=\overline{I_AE}=\overline{I_AF}=r_a$



$\therefore\ \triangle I_ABC:\triangle I_ACA:\triangle I_AAB$

（圖 8）

$=\frac{1}{2}\overline{BC}r_a:\frac{1}{2}\overline{CA}r_a:\frac{1}{2}\overline{AB}r_a$

$=\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}=a:b:c$

故由定理 2 知 $(-a)\overrightarrow{AI_A}+b\,\overrightarrow{BI_A}+c\,\overrightarrow{CI_A}=\overrightarrow{O}$ 證畢

爲了求△五心的坐標我們再敍述一個定理及其推論以便應用：

定理 7：設 Q 爲 $\triangle ABC$ 同平面任一點

若 $x\overrightarrow{AQ}+y\overrightarrow{BQ}+z\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{O}$ 則

$$Q=\frac{x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B}+z\overrightarrow{C}}{x+y+z}\quad(x,y,z\text{ 爲實數})$$

證　明：由 $x\overrightarrow{AQ}+y\overrightarrow{BQ}+z\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{O}$ 得 $x(\overrightarrow{Q}-\overrightarrow{A})+$
$y(\overrightarrow{Q}-\overrightarrow{B})+z(\overrightarrow{Q}-\overrightarrow{C})=\overrightarrow{O}$

即 $(x+y+z)\overrightarrow{O}=x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B}+z\overrightarrow{C}$

因 A, B, C 三點不共線，故 $x+y+z\neq 0$

$\therefore \overrightarrow{Q}=\dfrac{x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B}+z\overrightarrow{C}}{x+y+z}$，證畢

推　論：設△ABC三頂點坐標為 $A(a_1, a_2)B(b_1, b_2)$ $C(c_1, c_2)$，Q為同平面上任一點。
若 $x\overrightarrow{AQ}+y\overrightarrow{BQ}+z\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{O}$，則$Q$之坐標為

$$\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1z}{x+y+z}, \frac{a_2x+b_2y+c_2z}{x+y+z}\right)$$

證　明：由定理7立即可得

$$\overrightarrow{Q}=\frac{x[a_1, a_2]+y[b_1, b_2]+z[c_1, c_2]}{x+y+z}$$

$$=\left[\frac{a_1x+b_1y+c_1z}{x+y+z}, \frac{a_2x+b_2y+c_2z}{x+y+z}\right]$$

$\therefore Q$之坐標為 $\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1z}{x+y+z}, \dfrac{a_2x+b_2y+c_2z}{x+y+z}\right)$

由上述定理3、4、5、6及定理7之推論我們立即可求得內心、外心、垂心、傍心之坐標列為定理如下：

定理8：設△ABC三頂點之坐標分別為 $A(a_1, a_2)B(b_1, b_2)$ $C(c_1, c_2)$ A, B, C 表三個角，其對邊的長分別為 a, b, c，則

(1)重心G的坐標為 $\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}, \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

(2)內心 I 的坐標為 $\left(\dfrac{a_1a+b_1b+c_1c}{a+b+c}, \dfrac{a_2a+b_2b+c_2c}{a+b+c}\right)$

(3)外心P的坐標為 $\left(\dfrac{a_1\sin 2A+b_1\sin 2B+c_1\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C},\right.$

$$\frac{a_2\sin 2A+b_2\sin 2B+c_2\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C})$$

其中 $\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$

$$=a^2(b^2+c^2-a^2):b^2(c^2+a^2-b^2):c^2(a^2+b^2-c^2)$$

(4)垂心H的坐標爲 $(\frac{a_1\tan A+b_1\tan B+c_1\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C},$

$$\frac{a_2\tan A+b_2\tan B+c_2\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C})$$

其中 $\tan A:\tan B:\tan C$

$$=\frac{1}{b^2+c^2+a^2}:\frac{1}{c^2+a^2-b^2}:\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

(5)$\angle A$內部之傍心 I_A 的坐標爲

$$(\frac{-a_1a+b_1b+c_1c}{-a+b+c},\frac{-a_2a+b_2b+c_2c}{-a+b+c})$$

$\angle B$內部之傍心 I_B 的坐標爲

$$(\frac{a_1a-b_1b+c_1c}{a-b+c},\frac{a_2a-b_2b+c_2c}{a-b+c})$$

$\angle C$內部之傍心 I_C 的坐標爲

$$(\frac{a_1a+b_1b-c_1c}{a+b-c},\frac{a_2a+b_2b-c_2c}{a+b-c})$$

證　明：我們祇要證明(2)(3)(4)(5)諸式就好了：

(2)由定理 3 知 $a\overrightarrow{AI}+b\overrightarrow{BI}+c\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{O}$

故定定理 7 之推論知 I 之坐標爲

$$(\frac{a_1a+b_1b+c_1c}{a+b+c},\frac{a_2a+b_2b+c_2c}{a+b+c})$$

(3)由定理 4 知 $\sin 2A\,\overrightarrow{AP}+\sin 2B\,\overrightarrow{BP}+\sin 2C\,\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{O}$

故由定理 7 之推論知P坐標爲

$$(\frac{a_1\sin 2A+b_1\sin 2B+c_1\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C},$$

$$\frac{a_2\sin 2A+b_2\sin 2B+c_2\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C})$$

其中 $\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$

$$=\sin A\cos A:\sin B\cos B:\sin C\cos C$$

$$=\frac{a}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}:$$

$$\frac{c}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{a}{bc}(b^2+c^2-a^2):\frac{a}{ac}(a^2+c^2-b^2):$$

$$\frac{c}{ab}(a^2+b^2-c^2)$$

$$=a^2(b^2+c^2-a^2):b^2(a^2+c^2-b^2):$$

$$c^2(a^2+b^2-c^2)$$

(4)由定理 5 知 $\tan A\ \overrightarrow{AH}+\tan B\ \overrightarrow{BH}+\tan C\ \overrightarrow{CH}=\overrightarrow{O}$

故由定理 7 之推論知 H 之坐標為

$$(\frac{a_1\tan A+b_1\tan B+c_1\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C},$$

$$\frac{a_2\tan A+b_2\tan B+c_2\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C})$$

其中 $\tan A:\tan B:\tan C$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}:\frac{\sin B}{\cos B}:\frac{\sin C}{\cos C}$$

$$=\frac{a}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}:\frac{b}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}:\frac{c}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

$$=\frac{1}{b^2+c^2-a^2}:\frac{1}{c^2+a^2-b^2}:\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

(5)我們祇要證明 $\angle A$ 內部之傍心就好了，其餘同理，由定理 6(1)知

$$(-a)\overrightarrow{AI}_A + b\overrightarrow{BI}_B + c\overrightarrow{CI}_C = O$$

故由定理７之推論知 I 坐標為

$$\left(\frac{-a_1a+b_1b+c_1c}{-a+b+c},\ \frac{-a_2a+b_2b+c_2c}{-a+b+c}\right)$$

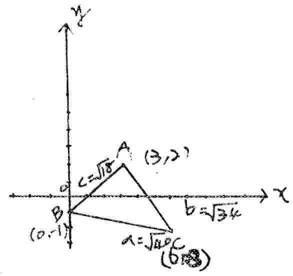
證畢。

例：$\triangle ABC$ 中若 $A(3,2)$ $B(0,-1)$ $C(6,-3)$ 試求重心 G，內心 I，外心 P，垂心 H，$\angle A$ 內部之傍心 I_A 的坐標

解：1. 重心 G 之坐標為 $\left(\frac{3+0+6}{3},\ \frac{2-1-3}{3}\right)=\left(3,\ -\frac{2}{3}\right)$

2. 因 $a=\overline{BC}=\sqrt{40}$，$b=\overline{CA}=\sqrt{34}$

$c=\overline{AB}=\sqrt{18}$



（圖９）

故內心 I 之坐標為

$$\left(\frac{3\sqrt{40}+0\cdot\sqrt{34}+6\sqrt{18}}{\sqrt{49}+\sqrt{3\cdot4}+\sqrt{18}},\ \frac{2\sqrt{40}-\sqrt{34}-3\sqrt{18}}{\sqrt{40}+\sqrt{34}+\sqrt{18}}\right.$$

$$=\left(\frac{6\sqrt{10}+18\sqrt{2}}{2\sqrt{10}+\sqrt{34}+3\sqrt{2}},\ \frac{4\sqrt{10}-\sqrt{34}-9\sqrt{2}}{2\sqrt{10}+\sqrt{34}+3\sqrt{2}}\right.$$

3. 因 $\sin2A:\sin2B:\sin2C$

$=a^2(b^2+c^2-a^2):b^2(c^2+a^2-b^2):$

$c^2(a^2+b^2-c^2)$

$=40(34+18-40):34(18+40-34):18(40+34-18)$

$=40\times12:34\times24:18\times56$

$=10:17:21$

故外心 P 之坐標為

$$\left(\frac{3\times10+0\times17+6\times21}{10+17+21},\ \frac{2\times10-1\times17-3\times21}{10+17+21}\right)$$

$$=\left(\frac{13}{4},\ -\frac{5}{4}\right)$$

4. 因 $\tan A：\tan B：\tan C$

$$=\frac{1}{b^2+c^2+a^2}：\frac{1}{c^2+a^2-b^2}：\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

$$=\frac{1}{34+18-40}：\frac{1}{18+40-34}：\frac{1}{40+34-18}$$

$$=\frac{1}{12}：\frac{1}{24}：\frac{1}{56}=\frac{1}{3}：\frac{1}{6}：\frac{1}{14}=14：7：3$$

故垂心H之坐標為

$$\left(\frac{3\times 14+0\times 7+6\times 3}{14+7+3}, \frac{2\times 14-1\times 7-3\times 3}{14+7+3}\right)$$

$$=\left(\frac{60}{24}, \frac{12}{24}\right)=\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

5. $\angle A$內部之傍心 I_A 為

$$\left(\frac{-3\sqrt{40}+0\times\sqrt{34}+6\times\sqrt{18}}{-\sqrt{40}+\sqrt{34}+\sqrt{18}}, \frac{-2\sqrt{40}-\sqrt{34}-3\sqrt{18}}{-\sqrt{40}+\sqrt{34}+\sqrt{18}}\right)$$

$$=\left(\frac{-6\sqrt{10}+18\sqrt{2}}{-2\sqrt{10}+\sqrt{34}+3\sqrt{2}}, \frac{-4\sqrt{10}-\sqrt{34}-9\sqrt{2}}{-2\sqrt{10}+\sqrt{34}+3\sqrt{2}}\right)$$

三、結論：由以上的定理 8 知：若已知△三頂點的坐標則很容易可求得五心的坐標。更推而廣之，由定理 7 之推論知：祇要曉得△ABC三頂點的坐標以及 $x\overrightarrow{AQ}+y\overrightarrow{BQ}+z\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{O}$中之$x$，$y$，$z$則吾人即能解得$Q$之坐標，而要求出 x，y，z之值祇要曉得△QBC，△QCA，△QAB 面積之比與Q點在形內或形外就好了（參閱定理 1 、 2 ），這個Q點不限定是五心，可以是△ABC同平面上的任一點，（當Q在$\overleftrightarrow{BC}$上時，視△QBC之面積為O，Q在$\overleftrightarrow{CA}$，$\overleftrightarrow{AB}$上時仿此），故定理 7 之推論有其一般性，這是我們研究本文一個很大的收穫。

四、參考資料：范傳坡等高中數學　數理出版公司

五、評語：本文利用三角形的各心與三頂點聯成三角形，面積之比及向量方法求出五心之坐標，并利用同一方法求出與△ABC同一坐標平面上任一點之坐標，頗富創新之意。