單形調和數

高中組數學第一名

省立鳳山高級中學

作者：陳崇岳、陳爾善
指導老師：畢詩存

一、在高一數學裡有一章講到有關整數的性質，包括質數的檢驗、因數倍數、整數的因素分解……等等，現在我們利用這些學過的性質來探討一些俱有特殊性質的自然數叫做「單形調和數」，首先需要下一些定義，以這些定義做基礎，再推演出一些有關單形調和數的性質，利用這些性質嘗試將單形調和數歸類，雖然我們所作的不十分完美，但是我們已能應用在課堂上所學得的「數學方法」　先適度的抽象化再由邏輯推理演譯出結論，對一個問題做分析、歸納綜合，本文共分爲三段，每一段的目標均在正題之前說明。

論證：

設 $d, n \in N$，若 $d \mid n$ 且 $(d, \frac{n}{d}) = 1$

則稱 d 爲 n 之一個單形因子

令　$d^*(n)$ 表 n 之單形因子的個數

$6^*(n)$ 表 n 之所有單形因子的總和

$\forall n \in N, n > 1$，n 的因數分解的結果是唯一的

設 $n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k}$ ‧ P_i 是質數，$\alpha_i \in N$，

$i = 1, 2, 3 \cdots k$

顯然　$d^*(n) = 2^k$

$6^*(n) = (P_1^{\alpha_1} + 1)(P_2^{\alpha_2} + 1) \cdots (P_k^{\alpha_k} + 1)$

定義 n 之單形調和平均數爲

$$H^*(n) = \frac{n\,d^*(n)}{6^*(n)}$$

$$= \frac{n \cdot 2^k}{(P_1^{\alpha_1}+1)(P_2^{\alpha_2}+1)\cdots(P_k^{\alpha_k}+1)}$$

如果$H^*(n) \in N$ 則稱 n 爲單形調和數，所有單形調和數所成之集合以UH表示。

二、首先我們希望能瞭解一些單形調和數的特性，諸如什麼樣的自然數一定是單形調和數，什麼樣的自然數一定不是單形調和數，假如 n 是單形調和數，那麼 n 與$H^*(n)$ 有沒有明顯的相關性，現在我們提出下面六個命題就是有關這方面的，其中命題 3 的證明最複雜，但是這個命題對我們講是一個非常值得花工夫去了解的，因爲我們可以根據這個命題衍生出許多非單形調和數。

命題 1. 單形完備數集爲UH的子集

> 補充說明
>
> 單形完備數之定義：
>
> $n \in N$，若 $6^*(n)=2n$ 則稱 n 爲單形完備數

證明： 設 $n=P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k}$，$P_i$ 爲質數，$\alpha_i \in N$，

$i=1, 2, 3, \cdots k$ 且 n 爲單形完備數，即 $6^*(n)=2n$

$$\therefore H^*(n) = \frac{n\, d^*(n)}{6^*(n)} = \frac{n \cdot 2^k}{2n} = 2^{k-1} \in N$$

故單形完備數集爲UH之子集

命題 2. 若 n 爲奇數且 $n \in UH$ 則 $H^*(n)$ 爲奇數

證明： 設 $n=P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k}$ P_i 爲質數，且 P_i 爲奇數

$i=1, 2, 3, \cdots\cdots k$

$$則\quad H^*(n) = \frac{2^k \cdot P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k}}{(P_1^{\alpha_1}+1)(P_2^{\alpha_2}+1)\cdots(P_k^{\alpha_k}+1)}$$

$\because P_i$ 爲奇數 $\therefore P_i^{\alpha_i}+1=2a_i$，$a_i \in N$，

$i=1, 2, 3 \cdots\cdots k$

$$\therefore H^*(n) = \frac{2^k \cdot P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k}}{2^k a_1 \cdot a_2 \cdots a_k}$$

$$= \frac{n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k} \in N \quad (\because n \in UH)$$

$\because n$ 爲奇數　　$\therefore H^*(n)$ 爲奇數

命題 3.　若 $n = P_1 P_2 \cdots P_k$　$n \neq 6$，P_i 爲質數，且 $P_1 < P_2 < \cdots < P_k$，則 $n \notin UH$

證明：　$$H^*(n) = \frac{2^k P_1 P_2 \cdots P_k}{(P_1+1)(P_2+1)\cdots(P_k+1)}$$

(A)若 n 爲奇數則 P_i 爲奇數，$i = 1, 2, 3, \cdots k$

$\therefore P_i + 1$ 爲偶數　$\therefore P_i + 1 = 2a_i$，$a_i \in N$，

$i = 1, 2, \cdots n$　　$a_i \geqq 2$

故 $$H^*(n) = \frac{2^k P_1 P_2 \cdots P_k}{(2a_1)(2a_2)\cdots(2a_k)} = \frac{P_1 P_2 \cdots P_k}{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

(1)若 a_i，$i = 1, 2, \cdots k$ 中有一爲合成數則 $H^*(n) \notin N$

(2)若 a_i，$i = 1, 2, \cdots k$ 均爲質數　又 $P_1 + 1 = 2a_1$

故 $$a_1 - P_1 = \frac{P_1+1}{2} - P_1 = \frac{1-P_1}{2} < 0$$

$\therefore a_1 < P_1 < P_2 \cdots < P_k$　且 $a_1, P_1, P_2 \cdots P_k$ 均爲質數

$\therefore a_1 \nmid P_i$，$i = 1, 2, 3 \cdots k$　　$\therefore H^*(n) \notin N$

(B)若 n 爲偶數　則 $P_1 = 2$ 且 $P_2, P_3 \cdots P_k$ 爲奇數

$$\therefore H^*(n) = \frac{2^k \cdot 2 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots P_k}{3(P_2+1)(P_3+1)\cdots(P_k+1)}$$

(1)若 $3 \nmid P_2$，卽 $3 \neq P_2$ 則 $H^*(n) \notin N$

$(3 \nmid 2, 3 \nmid P_i, i = 3, 4, 5 \cdots k)$

(2)若 $P_2 = 3$ 且 $k \geqq 3$，則

$$H^*(n) = \frac{2^k \cdot 2 \cdot 3 \cdot P_3 P_4 \cdots P_k}{3 \cdot 4 \cdot (P_3+1)(P_4+1)\cdots(P_k+1)}$$

$$= \frac{2^{k-1} \cdot P_3 \cdot P_4 \cdots P_k}{(P_3+1)\cdots(P_k+1)}$$

$\because P_i$ 爲奇數 $\quad \therefore P_i+1=2a_i \quad i=3,4,5\cdots k$

$$\therefore H^*(n)=\frac{2^{k-1}\cdot P_3P_4\cdots P^k}{2^{k-2}\cdot a_3a_4\cdots a_k}=\frac{2\cdot P_3P_4\cdots P^k}{a_3a_4\cdots a_k}$$

A.若 a_i 爲奇數 $\quad i=3,4,\cdots k \quad$ 則 $a_i\nmid 2$

$\therefore \ a_3\cdot a_4\cdots a_k\nmid 2$

由(A) $\ a_3a_4\cdots a_k\nmid P_3P_4\cdots P_k$ 故 $H^*(n)\notin N$

B.若 a_i 中有一爲偶數 令 $a_j=2b_j$

$3\leqq i\cdot j\leqq k,\ i,j\in N$

則 $H^*(n)=\dfrac{P_3\cdots P_j\cdots P_k}{a_3\cdots b_j\cdots a_k}$ 之情形與(A)相同，

故 $H^*(n)\notin N$

C.若 $k=2$ 且 $P_2\neq 3$ 則 $H^*(n)\notin N$

D.若 $k=2$ 且 $P_2=3$ 則 $H^*(n)=\dfrac{2^2\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 4}$

$=2\in N$ 此時 $n=6$

E.若 $k=1$ 則 $n=2$，$H^*(n)=\dfrac{2\cdot 2}{3}\notin N$

$\therefore n=P_1P_2\cdots P_k$，$P_i$ 爲質數 $i=1,2,3\cdots k$，

且 $n\neq 6$ 時 $\quad n\notin UH$

由命題3.我們知道質數一定不是單形調和數

命題4. 若 $n\in UH$，$(P,n)=1$，P 爲質數，

$P^a+1\mid 2H^*(n)\ a\in N$，則 $P^a n\in UH$

證明： $H^*(n)=\dfrac{n\,d^*(n)}{6^*(n)}$

$\because (P\cdot n)=1 \qquad \therefore (P^a\cdot n)=1$

$\therefore d^*(P^a n)=2d^*(n)$

$6^*(P^a n)=(P^a+1)\,6^*(n)$

$$\therefore H^*(P^a n)=\frac{P^a n\cdot d^*(P^a n)}{6^*(P^a n)}=\frac{P^a\cdot n\cdot 2d^*(n)}{(P^a+1)\,6^*(n)}$$

$$= \frac{P^a \cdot 2H^*(n)}{P^a+1}$$

$\because P^a+1 \mid 2H^*(n) \qquad \therefore H^*(P^a n) \in N$

$\therefore P^a n \in UN$

命題5. 若m，$n = UH$，$(m, n) = 1$ 則$mn \in UH$

證明： $m = p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdot \cdots\cdots p_k^{\alpha k}$

$n = q_1^{\beta 1} \cdot q_2^{\beta 2} \cdot \cdots\cdots q_e^{\beta e}$ $\quad p_i \, q_j$ 爲質數

$i = 1, 2, \cdots\cdots k$

$j = 1, \cdots\cdots e$

$\because (m, n) = 1$ 故$p_i \neq q_j \quad \forall_{ij}$

又$mn = p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdots\cdots q_k^{\alpha k} \cdot q_1^{\beta 1} \cdot q_2^{\beta 2} \cdots\cdots q_e^{\beta e}$

$$H^*(m) = \frac{2^k \cdot m}{(p_1^{\alpha 1}+1)(p_2^{\alpha 2}+1)\cdots\cdots(p_k^{\alpha k}+1)} \in N$$

$$H^*(n) = \frac{2^e \cdot n}{(q_1^{\beta 1}+1)(q_2^{\beta 2}+1)\cdots\cdots(q_e^{\beta e}+1)} \in N$$

$\therefore H^*(m \cdot n) =$

$$\frac{2^{k+l}\, mn}{(p_1^{\alpha 1}+1)(p_2^{\alpha 2}+1)\cdots(p_k^{\alpha k}+1)(p_1^{\beta 1}+1)(q_2^{\beta 2}+1)\cdots(q_e^{\beta e}+1)}$$

$= H^*(m) \cdot H^*(n) \in N$

命題6. 若n爲奇數 $n \in UH$ 則$H^*(n) \mid n$

證明： 設$n = p_1^{\alpha 1} p_2^{\alpha 2} \cdots\cdots p_k^{\alpha k}$ $\quad p_i \neq 2$，p_i 爲質數

$i = 1, 2 \cdots\cdots k$

$\therefore p_i^{\alpha i}+1 = 2a_i$，$a_i \in N$，$i = 1, 2, 3 \cdots\cdots k$

$$\therefore H^*(n) = \frac{2^k \cdot n}{(p_1^{\alpha 1}+1)(p_2^{\alpha 2}+1)\cdots\cdots(p_k^{\alpha k}+1)}$$

$$= \frac{2^k \cdot n}{2^k \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots\cdots a_k} = \frac{n}{a_1 a_2 \cdots\cdots a_k}$$

$$\therefore \frac{n}{H^*(n)} = a_1 a_2 \cdots\cdots a_k \in N$$

$H^*(n) \mid n$

三、其次我們希望能由 n 所俱備的條件，找出一些 n 與$H^*(n)$ 的關係，諸如$H^*(n)$的範圍，n的質因數個數與$H^*(n)$的關係，因此我們提出下列三個性質。

設　$n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k}$　P_i 為質數 $\alpha_i \in N$, $i = 1, 2, \cdots k$

且　$P_1^{\alpha_1} < P_2^{\alpha_2} \cdots < P_i^{\alpha_i} \cdots < P_k^{\alpha_k}$ 則

性質1. $\dfrac{2^{k+1}}{k+2} \leqq H^*(n) < 2^k$

證明：$H^*(n) = \dfrac{nd^*(n)}{6^*(n)}$

$$= \frac{P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k} \cdot 2^k}{(P_1^{\alpha_1}+1)(P_2^{\alpha_2}+1)\cdots(P_k^{\alpha_k}+1)}$$

$$= 2^k \cdot \frac{P_1^{\alpha_1}}{P_1^{\alpha_1}+1} \cdot \frac{P_2^{\alpha_2}}{P_2^{\alpha_2}+1} \cdots \frac{P_k^{\alpha_k}}{P_k^{\alpha_k}+1}$$

又 $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ，$x > 0$ 為嚴格增函數　且$0 < f(x) < 1$

則 $\dfrac{2}{2+1} \leqq \dfrac{P_1^{\alpha_1}}{P_1^{\alpha_1}+1} < \dfrac{P_2^{\alpha_2}}{P_2^{\alpha_2}+1} < \cdots < \dfrac{P_k^{\alpha_k}}{P_k^{\alpha_k}+1} < 1$

$(\because P_i^{\alpha_i} < P_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \quad i = 1 \cdots\cdots k-1)$

$\therefore 2^k > H^*(n) \geqq 2^k \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} \cdots \dfrac{k+1}{k+2} = \dfrac{2^{k+1}}{k+2}$

$(P_k^{\alpha_k} \geqq k+1)$

性質2. $P_i^{\alpha_i} \geqq \dfrac{H^*(n)}{2^k - H^*(n)}$ ，$i = 1, 2, 3 \cdots k$

證明：$H^*(n) = \dfrac{nd^*(n)}{6^*(n)}$

$$=\frac{P_1^{\alpha 1}\cdot P_2^{\alpha 2}\cdots P_k^{\alpha k}\cdot 2^k}{(P_1^{\alpha 1}+1)(P_2^{\alpha 2}+1)\cdots(P_k^{\alpha k}+1)}$$

$$=2^k\cdot\frac{P^{1\alpha 1}}{P_1^{\alpha 1}+1}\cdot\frac{P_2^{\alpha 2}}{P_2^{\alpha 2}+1}\cdots\frac{P_k^{\alpha k}}{P_k^{\alpha k}+1}$$

$$\because\quad 0<\frac{P_1^{\alpha i}}{P_i^{\alpha i}+1}<1$$

$$\therefore\quad H^*(n)\leqq 2^k\cdot\frac{P^{\alpha i}}{P_i^{\alpha i}+1}$$

$$\therefore H^*(n)(P_i^{\alpha i}+1)\leqq 2^k P_i^{\alpha i}$$

$$\therefore\quad 2^k P_i^{\alpha i}-H^*(n)\cdot P_i^{\alpha i}\geqq H^*(n)$$

$$P_i^{\alpha i}[2^k-H^*(n)]\geqq H^*(n)$$

$$(2^k-H^*(n)>0)$$

$$P_i^{\alpha i}\geqq\frac{H^*(n)}{2^k-H^*(n)}$$

性質 3. (A) $P_1^{\alpha 1}\leqq\dfrac{kH^*(n)}{2^k-H^*(n)}$ (B) $P_k^{\alpha k}\geqq\dfrac{(k-1)2^k+H^*(n)}{2^k-H^*(n)}$

證明：$H^*(n)=\dfrac{n\cdot d^*(n)}{6^*(n)}$

$$=2^k\cdot\frac{P_1^{\alpha 1}}{P_1^{\alpha 1}+1}\cdot\frac{P_2^{\alpha 2}}{P_2^{\alpha 2}+1}\cdots\frac{P_k^{\alpha k}}{P_k^{\alpha k}+1}$$

$\because P_1^{\alpha 1}<P_2^{\alpha 2}\cdots<P_i^{\alpha i}\cdots<P_k^{\alpha k}$

故 (A) $0<\dfrac{P_1^{\alpha 1}}{P_1^{\alpha 1}+1}<\dfrac{P_2^{\alpha 2}}{P_2^{\alpha 2}+1}<\cdots<\dfrac{P_k^{\alpha k}}{P_k^{\alpha k}+1}<1$

(B) $P_{i+1}^{\alpha i+1}-P_i^{\alpha i}\geqq 1\qquad i=1,2,3\cdots(k-1)$

$k\geqq 2\quad k\in N$

(一) $\therefore H^*(n)\geqq 2^k\cdot\dfrac{P_1^{\alpha 1}}{P_1^{\alpha 1}+1}\cdot\dfrac{P^{1\alpha 1}+1}{P_1^{\alpha 1}+2}\cdot\dfrac{P_1^{\alpha 1}+2}{P_1^{\alpha 1}+3}\cdots$

$$\frac{P_1^{\alpha 1}+k-1}{P_1^{\alpha 1}+k}=\frac{2^k\cdot P_1^{\alpha 1}}{P_1^{\alpha 1}+k}$$

$$H^*(n)(P_1^{\alpha_1}+k) \geqq 2^k P_1^{\alpha_1}$$

$$P_1^{\alpha_1}[2^k - H^*(n)] \leqq kH^*(n)$$

$$\therefore P_1^{\alpha_1} \leqq \frac{kH^*(n)}{2^k - H^*(n)} \qquad (\because 2^k - H^*(n) > 0$$

$$(二)\ H^*(n) \leqq 2^k \frac{P_k^{\alpha_k}-k+1}{P_k^{\alpha_k}-k+2} \cdot \frac{P_k^{\alpha_k}-k+2}{P_k^{\alpha_k}-k+3} \cdots \frac{P_k^{\alpha_k}}{P_k^{\alpha_k}+1}$$

$$= \frac{2^k(P_k^{\alpha_k}-k+1)}{P_k^{\alpha_k}+1}$$

$$\therefore H^*(n)(P_k^{\alpha_k}+1) \leqq 2^k(P_k^{\alpha_k}-k+1)$$

$$\therefore P_k^{\alpha_k} \geqq \frac{(k-1)2^k + H^*(n)}{2^k - H^*(n)}$$

四、求單形調和數在計算上是非常繁雜，最初我們直接由定義找出一些單形調和數，使用TI Programmable 58 C 程式計算機將 1 至 1000 的自然數因數分解，再由定義去求 $H^*(n)$ ，結果花了相當多的時間才找 1 至 1000 所有的單形調和數，共有 7 個，它們是 1，6，45，90，420，630 ，後來由命題 3. 得知，可先刪去一些非單形調和數。雖然如此漫無止境逐數計算是能找出一些單形調和數，但是這並不是數學陳述的主要目的，數學中的陳述並非涉及單獨的事物，而是涉及整個一類具有某種共同性質的事物，我們不能找出單形調和數的一般形式，但是我們利用上列命題與性質嘗試去找出俱有某些共同性質的單形調和數，目前我們僅找出三組，或許本文能引起讀者的興趣而能找出第四組、第五組……

設 T_k 表示恰含 k 個質因數的單形調和數所成之集合

命題 7. $T_1 = \phi$

證明：設 $n = P^a$ 　P 爲質數， $a \in N$

$$則 H^*(x) = \frac{2P^a}{P^a+1}$$

又 $(P^a, P^a+1)=1$ 　且 $P^a+1>2$

$\therefore P^a+1 \nmid 2P^a$

$\therefore H^*(n) \notin N$　　　　$\therefore T_1 = \phi$

命題 8. $T_2 = \{6, 45\}$

證明：若 $n \in T_2$ 則 $n = p^a q^b$，p, q 爲質數，$a, b \in N$，且設 $p^a < q^b$

由性質 1. $\frac{2^{k+1}}{k+2} \leqq H^*(n) < 2^k$

又 $k = 2$　故 $\frac{2^3}{4} \leqq H^*(n) < 2^2$

卽 $2 \leqq H^*(n) < 4$

$H^*(n) \in N$　　　$\therefore H^*(n) = 2, 3$

(1) $H^*(n) = 2 \Rightarrow n$ 爲偶數

由性質 3. $p^a \leqq \frac{kH^*(n)}{2^k - H^*(n)} = \frac{2 \cdot 2}{2^2 - 2} = 2$

故 $p^a = 2$

$\therefore H^*(n) = \frac{n \cdot d^*(n)}{6^*(n)} = \frac{2 \cdot q^b \cdot 2^2}{(2+1)(q^b+1)} = 2$

$\therefore q^b = 3$

故 $n = 2 \cdot 3 = 6$

(2) $H^*(n) = 3$

由性質 2.，性質 3. $\frac{H^*(n)}{2^k - H^*(n)} \leqq p^a \leqq \frac{kH^*(n)}{2^k - H^*(n)}$

又 $k = 2$　故 $\frac{3}{4-3} \leqq p^a \leqq \frac{2 \cdot 3}{4-3}$

卽　$3 \leqq p^a \leqq 6$

$\therefore p^a = 3, 2^2, 5$

A. $p^a = 3 \Rightarrow n = 3q^b$

$H^*(n) = \frac{3q^b \cdot 2^2}{(3+1)(q^b+1)} = 3$

$q^b = q^b + 1$　不合理

B. $p^a = 2^2 \Rightarrow n = 2^2 q^b$

$$H^*(n) = \frac{2^2 q^b \cdot 2^2}{(2^2+1)(q^b+1)} = 3$$

$q^b = 15$　　不合理

C. $p^a = 5 \Rightarrow n = 5q^b$

$$H^*(n) = \frac{5q^b \cdot 2^2}{(5+1)(q^b+1)} = 3$$

$\therefore q^b = 9 = 3^2$

$\therefore n = \boxed{5 \cdot 3^2 = 45}$

命題9. $T_3 = \{60, 90, 1512, 15925, 55125\}$

證明：若 $n \in T_3$　則 $n = p^a q^b r^c$，p, q, r 爲質數 $a, b, c \in N$

且設 $p^a < q^b < r^c$

由性質1. $\frac{2^{k+1}}{k+2} \leqq H^*(n) < 2^k$

又 $k = 3$　故 $\frac{2^4}{5} \leqq H^*(n) < 2^3$

即 $\frac{16}{5} \leqq H^*(n) < 8$

又 $H^*(n) \in N$　　$\therefore H^*(n) = 4, 5, 6, 7$

(1) $H^*(n) = 4$

由性質2.，性質3. $\frac{H^*(n)}{2^k - H^*(n)} \leqq p^a \leqq \frac{kH^*(n)}{2^k - H^*(n)}$

又 $k = 3$　故 $\frac{4}{2^3 - 4} \leqq p^a \leqq \frac{3 \cdot 4}{2^3 - 4}$

$\therefore 1 \leqq p^a \leqq 3$

$\therefore p^a = 2, 3$

A. $p^a = 2 \Rightarrow n = 2q^b r^c$

$$H^*(n)=\frac{2\,q^b r^c\cdot 2^3}{(2+1)(q^b+1)(r^c+1)}=4$$

$$\therefore q^b r^c-3q^b-3r^c=3$$

$$(q^b-3)(r^c-3)=12 \quad r^c>q^b,\ q\neq 2 \quad r\neq 2$$

$\therefore$(A) $\begin{cases} q^b-3=1 \\ r^c-3=12 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} q^b-3=2 \\ r^b-3=6 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} q^b-1=3 \\ r^c-1=4 \end{cases}$

$\begin{cases} q^b=4 \\ r^c=15 \end{cases}$ 不合 $\begin{cases} q^b=5 \\ r^c=9=3^2 \end{cases}$ $\begin{cases} q^b=4 \\ r^c=5 \end{cases}$ 不合

$$\therefore \boxed{n=2\cdot 5\cdot 3^2=90}$$

B. $p^a=3\Rightarrow n=3\cdot q^b\cdot r^c$

$$H^*(n)=\frac{3\cdot q^b\cdot r^c\cdot 2^3}{(3+1)(q^b+1)(r^c+1)}=4$$

$$q^b r^c-2q^b-2r^c=2$$

$$(q^b-2)(r^c-2)=6 \quad r^c>q^b \quad q\neq 3,$$

$$r\neq 3$$

(A) $\begin{cases} q^b-2=1 \\ r^c-2=6 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} q^b-2=3 \\ r^c-2=3 \end{cases}$

$\begin{cases} q^b=3 \\ r^c=8 \end{cases}$ 不合 $\begin{cases} q^b=4=2^2 \\ r^q=5 \end{cases}$

$$\therefore \boxed{n=3\cdot 2^2\cdot 5=60}$$

※限於篇幅下列諸情形中不合理者計算部分略去

(2)$H^*(n)=5$

由性質2，性質3 $\dfrac{H^*(n)}{2^k-H^*(n)}\leqq p^a\leqq\dfrac{kH^*(n)}{2^k-H^*(n)}$

又 $k=3$ 故 $\dfrac{5}{8-5}\leqq p^a\leqq\dfrac{3\cdot 5}{8-5}$

$$\frac{5}{3}\leqq p^a\leqq 5$$

$$\therefore\ p^a = 2,3,2^2,5$$

A. $p^a = 2$

B. $p^a = 3$

C. $p^a = 2^2$

D. $p^a = 5$

解出之 q^b，r^c 均不合理

(3) $H^*(n) = 6$

由性質 2.，性質 3. $\dfrac{H^*(n)}{2^k - H^*(n)} \leqq p^a \leqq \dfrac{kH^*(n)}{2^k - H^*(n)}$

$$\text{又 } k = 3 \quad \text{故} \frac{6}{8-6} \leqq p^a \leqq \frac{3 \cdot 6}{8-6}$$

$$3 \leqq p^a \leqq 9$$

$$\therefore\ p^a = 3,2^2,5,7,2^3,3^2$$

A. $p^a = 3,2^2,5,2^3,3^2$ 時 q^b，r^c 之解均不合理

B. $p^a = 7 \Rightarrow n = 7 \cdot q^b \cdot r^c$

$$H^*(n) = \frac{7 \cdot q^b \cdot r^c \cdot 2^3}{(7+1)(q^b+1)(r^c+1)} = 6$$

$$(q^b - 6)(r^c - 6) = 42$$

(A) $\begin{cases} q^b - 6 = 1 \\ r^c - 6 = 42 \end{cases}$ $\begin{cases} q^b = 7 \\ r^c = 48 \end{cases}$ 不合

(B) $\begin{cases} q^b - 6 = 2 \\ r^c - 6 = 21 \end{cases}$ $\begin{cases} q^b = 8 = 2^3 \\ r^c = 27 = 3^3 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} q^b - 6 = 3 \\ r^c - 6 = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} q^b = 9 \\ r^c = 20 \end{cases}$ 不合

(D) $\begin{cases} q^b - 6 = 6 \\ r^c - 6 = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} q^b = 12 \\ r^c = 13 \end{cases}$ 不合

$$\therefore\ \boxed{n = 7 \cdot 2^3 \cdot 3^3 = 1512}$$

(4) $H^*(n) = 7$

由性質 2、性質 3. $\frac{H^*(n)}{2^k - H^*(n)} \leqq p^a \leqq \frac{kH^*(n)}{2^k - H^*(n)}$

又 $k=3$　　故 $\frac{7}{8-7} \leqq p^a \leqq \frac{3 \cdot 7}{8-7}$

$\therefore 7 \leqq p^a \leqq 21$

$\therefore p^a = 7, 2^3, 3^2, 11, 13, 2^4, 17, 19$

A. $p^a = 7, 2^3, 11, 2^4, 17, 19$ 時解出 q^b，r^c 均不合理

B. $p^a = 3^2 \Rightarrow p^a = 3^2 \cdot q^b \cdot r^c$

$$H^*(n) = \frac{3^2 q^b r^c \cdot 2^3}{(3^2+1)(q^b+1)(r^c+1)} = 7$$

$r^c > q^b$　　$q \neq 3$，$r \neq 3$

$(q^b - 35)(r^c - 35) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

僅一組合 $\begin{cases} q^b - 35 = 14 \\ r^c - 35 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^b = 49 = 7^2 \\ r^c = 125 = 5^3 \end{cases}$

$\therefore n = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 5^3 = 55125$

C. $p^a = 13 \Rightarrow p^a = 13 \cdot q^b \cdot r^c$

$$H^*(n) = \frac{13 \cdot q^b \cdot r^c \cdot 2^3}{(13+1)(q^b+1)(r^c+1)} = 7$$

$(3q^b - 49)(3r^c - 49) = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 13$

僅一組合 $\begin{cases} 3q^b - 49 = 26 \\ 3r^c - 49 = 98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^b = 25 = 5^2 \\ r^c = 49 = 7^2 \end{cases}$

$\therefore \boxed{n = 13 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 15925}$

五、後記：我們有機會研討單形調和數是由一道考題引起的，有次考試曾有這樣一個問題“將 540 分成兩個互質自然數的乘積，共有　　種分法，又滿足 $x \mid 540$，$(x, 540) = 1$，$x \in N$ 的 x 共有　　個，這些 x 的總和為　　我們請問老師如果上列問題中的 x 有 a 個總和為 b，可否能由 a 求出 b，或由 b 求出 a”老師說：你們何不計算一下

$\frac{a}{b}$，$\frac{b}{a}$，$\frac{a}{540}$，$\frac{b}{540}$，$\frac{540}{a}$，$\frac{540}{b}$，$\frac{540}{a}$，$\frac{540\ a}{b}$ 看看何者爲整數”結果僅 $\frac{b}{a}$ 與 $\frac{540\ b}{a}$ 爲整數，老師又說“如果將 540 換成 420 再計算一次”結果 $\frac{420\ a}{b}$ 爲整數，其他則都不是，老師說“你們的問題答案是否，如果有趣與有一種數是由這三者定義的，不妨看一下”於是就將本文第一段所提之單形調和數的定義解釋給我們聽。

開始我們採用非常笨拙的方法，去找出 1 至 1000 的單形調和數。我們逐數因子分解，由定義求 $H^*(n)$，目前是想由實際的演算，找出單形調和數的一些通性，我們歸納出七點：

(1)質數一定不是單形調和數

(2)大部分的單形調和數爲偶數

(3)UH 沒有加乘法封閉性

(4)若 $H^*(n) \in N$，$n \neq 90$，則 $H^*(n) \mid n$

(5) 2 至 1000 的單形調和數爲 3 之倍數

(6) $1 \leqq H^*(n) < 2^k$

(7)若 $H^*(n)$ 爲偶數，則 n 爲偶數

但是不知道 $\forall\ n \in UH$ 上列性質是否成立？我們把這樣的結論告訴老師，老師說不一於，於是便指導我們研究單形調和數的性質。本文主要是參考老師提供的一篇論文，（ 1975 年 8 月出版的 American mat hematical socity ），老師將其中適合高中程度部分譯成中文，交給我們參考，其中大部份在原論文中，沒有證明或是證得很簡略（原論文中的 Lemma 1 , Lemma 2 , Lemma 3, Proposition 2, Proposition 3, Proposition 5)我們將它證出來，同時加入兩個自己找到的兩個性質（本文中的命題 5. 、6. ），本文中命題 7. 、 8. 、 9. 的證法與原論文不同，我們採用非常特別的假設，$p_1^{\alpha_1} < p_2^{\alpha_2} \cdots\cdots < p_k^{\alpha_k}$，這是原論文 Lemma , 1 , 2 , 3 給我們的靈感，如此一來，只要會解不定方程

式便可求它來。

性質 3. 中之(B)沒有排上用場，性質 1 、2 、3 等號在何時成立，我們只找出幾個特例，而找不出一般性，命題 4. 的例子找出了 5 個（ $7\times 60=420$, $7\times 90=630$, $13\times 420=5460$, $13\times 630=8190$, $5\times 1512=7560$ ）命題 5. 的例子只找到一個 $6,15925\in UH$ ，（ $6,15925$ ）$=1$ 且 $6\times 15925=95550\in UH$）

，本文完成後，我們利用文中所提出的命題，將 1 至 1000 的單形調和數用比較科學的方法找出來，這個方法可用來找任一個區間內的單形調和，不過花時甚鉅。

六、評語：對單形調和數有相當的了解。自證二個引理並找出 1～1000 之單形調和數。研究精神值得鼓勵。