格銳目擴散定律與擴散頻率的探討

高中組化學第二名

臺北市建國高級中學

作者：吳載燈、吳文華
指導老師：鄭武勇

一、動機：

自古好奇心的趨使便是促進研究的原動力，上過第三章氣體動力論後，我們對此微不可觀，藐不易測的氣體分子物系深感興趣。在科學研究的過程中，對適當模型的探究往往可得更深切的了解及發現，且更易對此物系做更進一步的研究和討論，於是我們幾位同學與老師共同設計此乒乓球模型，做有關氣體通孔擴散速率與分子個數、質量、通孔面積及溫度之關係的探討。

二、目的

用此乒乓球模型來驗證格銳目擴散定律的公式：

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}} \qquad \text{（定溫定壓下）}$$

及氣體動力論中的碰撞頻律公式：

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{n_1\sqrt{M_2}}{n_2\sqrt{M_1}} \qquad \text{（定溫定容下）}$$

三、器材及模型

壓克力模型	(80 × 80 × 110cm)			1 個
乒乓球	(2.38g 直徑 3.6 cm)			500 粒
直流馬達	$\frac{1}{8}$ H.P.	115V	1785 轉	1 個
交流馬達	$\frac{1}{4}$ H.P.	115V	1805 轉	1 個

控制板　　（直徑爲① 22cm ② 20cm ③ 18cm ④ 16cm ⑤ 14cm
⑥ 12cm ⑦ 10cm ⑧ 8cm ⑨ 6cm ⑩ 4cm　　10 塊

線

三用電錶

交流電壓器

四、實驗及模型探討之蘊釀過程

㈠模型本身之設計

在我們原始構想中的模型包括密閉容器，碰撞球體及動力三部分，以下分別敘述：

1. 密閉容器：質料宜以透明（便於觀察）且富於彈性爲佳，故只有玻璃及壓克力列爲考慮對象，經比較後，我們發現壓克力較符合實驗的條件，故採用之。至於容器形狀以正方形易於製作及安放控制板，並便利搬運，故採用之；同時我們亦在能力範圍內製造體積較大之容器，以避免因球體間過於擁擠而造成彼此相互碰撞所產生的動能損耗。（此亦使其增加分子間的距離而類似氣體分子）另外，原先我們把容器底面設計爲平底，結果發現由於轉盤不夠大，無法使落於底面之球體全部彈起，使得極多球體沈積於底面。經改進後，我們使底面爲由四方向中間之轉盤傾斜的斜面，以使落下之球體能迅速經由轉盤之帶動面彈起。
2. 碰撞球體：自然以彈性列爲最優先考慮之條件，其次球體本身亦以愈小愈佳，以避免彼此相互碰撞。首先我們想到使用小橡皮球，但以其無法改變質量而放棄。最後在前述各種前提的考慮下，我們決定使用乒乓球。
3. 動力：我們在容器底部裝上轉盤，經由傳動帶而由馬達帶動，起先我們使用一般交流馬達，但是最後發現其無法改變速率，於是我們只得放棄交流馬達，而改用電流穩定而可控制之直流馬達。

㈡探討變因及方法的決定

動手之初，我們只想探討通孔擴散速率對於分子個數（莫耳數）及碰撞頻率對於單位面積（控制孔徑的大小）的關係。接著我們又考慮到質量、溫度。即共有分子個數、通孔面積、質量、溫度四個變因，並用控制變因之方法分別探討。

五、操作過程及討論

* 我們先找出最適合於解釋擴散速率的孔徑和分子數，然後控制此兩項變因，再分別討論質量和溫度。即把此實驗分成三階段進行。

㈠擴散速率(R)對於分子個數(n)與碰撞頻率(f)對於面積(A)之討論。

1. 步驟：(1)我們事先預備好 10 塊孔徑之控制板分別編號爲 ① 22cm ② 20cm ③ 18cm ④ 16cm ⑤ 14cm ⑥ 12cm ⑦ 10 cm ⑧ 8 cm ⑨ 6 cm ⑩ 4cm 。

(2)先在容器中放入 20 顆乒乓球，然後裝上⑩之控制板。

(3)開動馬達以 1 分鐘爲單位記錄跳出球數，重覆操作 5 次以上。

(4)其換其餘 9 塊控制板操作。

(5)改換 40 顆、60 顆、80 顆、100 顆球，依上述步驟操作。

(6)注意：實驗時須隨時遞補跳出之球數，以保持容器內乒乓球個數的恒定。

附記：每次實驗時，須先封住洞口，使馬達轉動 10 秒鐘後，再開始計算時間。其目的爲使馬達速趨於穩定，再測出其出球數。

2. 結果：* 每個孔徑，我們都重覆做 5 次實驗，但爲顧及實驗之精密性，我們取其較接近之三個數據以減少誤差。而在畫函數圖時，我們則將其平均。

(1)所得數據列表如下：

孔徑 分子數	① 22cm		② 20cm		③ 18cm		④ 16cm		⑤ 14cm	
	數據	平均	數據	平均	數據	平均	數據	平均	數據	平均
n_1 40 個	24 23 23	23.3	20 21 18	19.7	16 15 15	15.3	13 14 14	13.7	10 12 10	10.7
n_2 40 個	43 40 45	42.7	35 31 33	33	26 25 23	24.7	23 21 24	22.7	15 17 15	15.7
n_3 60 個	56 52 54	54	45 47 44	45.3	32 35 36	34.3	28 27 27	27.3	22 22 19	21
n_4 80 個	72 75 69	72	57 56 55	56	46 48 44	46	34 35 37	35.3	29 28 26	27.7
n_1 100 個	93 90 95	92.7	74 76 74	74.7	60 58 61	59.7	45 47 42	44.7	36 34 34	34.7

孔 分子數　征	⑥ 12cm		⑦ 10cm		⑧ 8 cm		⑨ 6 cm		⑩ 4 cm	
	數據	平均	數據	平均	數據	平均	數據	平均	據數	平均
n_1 40 個	7 7 8	7.3 7.3	3 4 3	3.3	1 2 1	1.3 1.3	0 2 0	0.7	0 0 0	0
n_2 40 個	11 9 11	10.3	7 7 6	6.7	2 3 3	2.7	1 2 1	1.3	1 0 0	0.3
n_3 60 個	15 17 13	15	10 10 10	10.3	6 5 7	6	2 3 2	2.3	1 1 0	0.7
n_4 80 個	20 21 18	19.7	12 13 14	13	8 7 7	7.3	3 4 3	3.3	0 1 1	0.7
n_5 100 個	26 26 25	25.7	17 16 17	16.7	10 9 11	10	4 4 3	3.7	1 1 2	1.3

	R_1 ($n_1 = 20$)	R_2 ($n_2 = 40$)	R_3 ($n_3 = 60$)	R_4 ($n_4 = 80$)	R_5 ($n_5 = 100$)
① 22cm	23.3	42.7	54	72	92.7
② 20cm	19.7	33	45.3	56	74.7
③ 18cm	15.3	24.7	34.3	46	59.7
④ 16cm	13.7	22.7	27.3	35.3	44.7
⑤ 14cm	10.7	15.7	21	27.7	34.7
⑥ 12cm	7.3	10.3	15	19.7	25.7
⑦ 10cm	3.3	6.7	10.3	13	16.7
⑧ 8cm	1.3	2.7	6	7.3	10
⑨ 6cm	0.7	1.3	2.3	3.3	3.7
⑩ 4cm	0	0.3	0.7	0.7	1.3

* 因爲實驗中時間皆控制爲一分鐘且各孔徑皆控制固定，故可直接以出球數表示擴散頻率。

* 又因爲 R_1 ，R_2 誤差較大（因分子數過少），故演算時以 R_3 爲基準。

$n_1 = 20$, $n_2 = 40$, $n_3 = 60$, $n_4 = 80$, $n_5 = 100$

$$n_1 : n_2 : n_3 : n_4 : n_5$$
$$= 0.333 : 0.667 : 1 : 1.333 : 1.667$$
$$R_1 : R_2 : R_3 : R_4 : R_5$$

①	22cm =	0.432	: 0.790	: 1	: 1.333	: 1.716
	誤差	30 %	18 %		0	3 %
②	20cm =	0.434	: 0.728	: 1	: 1.235	: 1.647
	誤差	30 %	9 %		7 %	1 %
③	18cm =	0.447	: 0.718	: 1	: 1.340	: 1.738
	誤差	34 %	8 %		1 %	4 %
④	16cm =	0.502	: 0.829	: 1	: 1.293	: 1.634
	誤差	51 %	24.4 %		3 %	2 %
⑤	14cm =	0.508	: 0.746	: 1	: 1.317	: 1.651
	誤差	53 %	12 %		1 %	1 %
⑥	12cm =	0.489	: 0.689	: 1	: 1.311	: 1.711
	誤差	47 %	3 %		2 %	3 %
⑦	10cm =	0.323	: 0.645	: 1	: 1.258	: 1.613
	誤差	3 %	3 %		6 %	3 %
⑧	8cm =	0.222	: 0.611	: 1	: 1.222	: 1.667
	誤差	33 %	8 %		8 %	0 %
⑨	6cm =	0.286	: 0.571	: 1	: 1.429	: 1.571
	誤差	14 %	14 %		7 %	6 %
⑩	4cm =	0	: 0.5	: 1	: 1	: 2
	誤差	1	25 %		4 %	2 %

b. 不同分子數時，孔徑（r）與單位時間碰撞次數（R′）之關係※

因爲 r 大小時，R 誤差較大，故演算時以 R_7 爲基準。

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
	22cm	20cm	18cm	16cm	14cm	12cm	10cm	8cm	6cm	4cm
	R_1'	R_2'	R_3'	R_4'	R_5'	R_6'	R_7'	R_8'	R_9'	R_{10}'
$n_1 = 20$	23.3	19.7	16.3	13.7	10.7	7.3	3.3	1.3	0.7	0
$n_2 = 40$	42.7	33	24.7	22.7	15.7	10.3	6.7	2.7	1.3	0.3
$n_3 = 60$	54	45.3	34.3	27.3	21	15	10.3	6	2.3	0.7
$n_4 = 80$	72	56	46	35.3	27.7	19.7	13	7.3	3.3	0.7
$n_5 = 100$	92.7	74.7	59.7	44.7	34.7	25.7	1.67	10	3.7	1.3

$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 : r_5 : r_6 : r_7 :$

$= 2.2 : 2 : 1.8 : 1.6 : 1.4 : 1.2 : 1 :$

$r_1^2 \quad r_2^2 \quad r_3^2 \quad r_4^2 \quad r_5^2 \quad r_6^2 \quad r_7^2$

$r_8 : r_9 : r_{10}$

$0.8 : 0.6 : 0.4$

$r_8^2 \quad r_9^2 \quad r_{10}^2$

$= 4.84 : 4 : 3.24 : 2.56 : 1.96 : 1.44 : 1 :$

$R_1 : R_2 : R_3 : R_4 : R_5 : R_6 : R_7$

$0.64 : 0.36 : 0.16 :$

$R_8 : R_9 : R_{10}$

(a) $n_1 = 20 =$ $7 : 5.9 : 4.6 : 4.1 : 3.2 : 2.2 : 1 :$

誤差 45 % 48 % 42 % 60 % 63 % 53 %

$0.4 : 0.2 : 0$

38 % 56 % 1

(b) $n_2 = 40 =$ 6.4 : 4.95 : 3.7 : 3.4 : 2.35 : 1.5 : 1 :

誤差 32 % 24 % 14 % 33 % 20 % 8 %

0.4 : 0.2 : 0.05

37 % 44 % 69 %

(c) $n_3 = 60 =$ 5.228 : 4.387 : 3.323 : 2.645 : 2.032 : 1.452 : 1 :

誤差 8 % 10 % 3 % 3 % 4 % 1 %

0.581 : 0.226 : 0.065

9 % 37 % 59 %

(d) $n_4 = 80 =$ 5.538 : 4.308 : 3.538 : 2.718 : 2.128 : 1.513 : 1 :

誤差 14 % 8 % 9 % 6 % 9 % 5 %

0.564 : 0.256 : 0.051

12 % 29 % 68 %

(e) $n_5 = 100 =$ 5.56 : 4.48 : 3.58 : 2.68 : 1.54 : 1.54 : 1 :

誤差 15 % 12 % 10 % 5 % 6 % 7 %

0.6 : 0.22 : 0.08

6 % 39 % 50 %

(3)函數圖形：(一)、(二)、(三)

3. 討論

* 尋求規律：

(1)由演算 *a* 及圖(一)可看出，在各個孔徑中，（即單位時間和通孔面積固定）n 與 R 有正比的關係。

即 $$\frac{R_A}{R_B} = \frac{n_A}{n_B}$$

同時，對於同一面積的通孔所得之出球數，亦可視為在單位時間內碰撞於此一面積的分子數，故此結論亦可解釋為

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

(2)由演算 6 及圖(二)、(三)可發現，在各個分子數中（分子數與時間固定），R'（單位時間碰撞次數）與 r^2（面積）有正比關係。

即：$\frac{R'}{A} = K$（常數）　　即 $f = \frac{R'}{A} = K$

故知在供給動能固定時，碰撞頻率亦固定不變。

＊本實驗之理論根據：

依我們所查的參考文獻：

(1)分子間平均距離（r）～ 10 ×分子直徑

(2)mean free path ＞ 300 ×分子直徑

即 mean free path ＞ 30 × r

mean free path：一分子與另一分子碰撞前 所行之平均距離。又氣體平均的分子自由徑約大於 300 個分子直徑。且本實驗所用之乒乓球直徑爲 3.63cm 。而分子間平均距離則依模型內分子數之多寡而定：

$$\text{分子間平均距離} = \sqrt[3]{\frac{V}{n}} \quad \begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\text{模型體積} \\ \cdots\cdots\cdots\text{分子數} \end{array}$$

$n_1 = 20$ ，$\sqrt[3]{\frac{80 \times 80 \times 80}{40}} \doteqdot 29.5$　$\frac{\text{平均自由徑}}{\text{分子平均距離}}$：

$$\frac{300 \times 3.63}{29.5} = 36.9$$

$n_2 = 40$ ，$\sqrt[3]{\frac{80 \times 80 \times 80}{40}} \doteqdot 23.4$　$\frac{\text{平均自由徑}}{\text{分子平均距離}}$：

$$\frac{300 \times 3.63}{23.4} = 46.5$$

$n_2 = 60$ ，$\sqrt[3]{\frac{80 \times 80 \times 80}{60}} \doteqdot 20.4$　$\frac{\text{平均自由徑}}{\text{分子平均距離}}$：

$$\frac{300 \times 3.63}{20.4} = 53.4$$

$n_4 = 80$ ，$\sqrt[3]{\frac{80 \times 80 \times 80}{80}} \doteqdot 18.6$　$\frac{\text{平均自由徑}}{\text{分子平均距離}}$：

$$\frac{300 \times 3.63}{18.6} = 58.6$$

$$n_5 = 100, \sqrt[3]{\frac{80 \times 80 \times 80}{100}} \doteqdot 17.2 \quad \frac{\text{平均自由徑}}{\text{分子平均距離}} :$$

$$\frac{300 \times 3.63}{17.2} = 63.3$$

由以上計算可看出平均自由徑均超過分子間平均距離的 30 倍。故以上諸球數均適合於本模型對擴散定律的探討。但是本模型之動力面僅局限於轉盤，若 n 超過 100 則球數易沈積於底面而無法充分碰撞。故本實驗所控制的球數變因以 100 個爲上限

* 選取理想的孔徑和分子數：

從演算及函數圖形，我們可以下結論：在此模型中，以 $n = 60$，及孔徑 10cm 最適於解釋擴散定律。故以下探討質量的變化關係時，我們便把球數和孔徑控制於此二條件下。

㈡分子質量與擴散速率(R)之探討：

1. 步驟：⑴稱取 100 顆乒乓球的總質量，再將其平均，而求得每個球的平均質量爲 2.38g 。

⑵經多次測量，求得每 0.1 g 的線其平均長度爲 1.2 m，故可從線的長度得知其質量，以便利操作。

⑶在球上鑽孔，分別在 100 顆球中加入 0.5g (6m)，1g(12m)，1.65g (19.8m)，2.3g (27.6m) 的線，卽得 5 種不同質量之乒乓球各 100 個：$M_1 = 2.38g$，$M_2 = 2.88g$，$M_3 = 3.38g$，$M_4 = 4.03g$，$M_5 = 4.68g$ 。

⑷從㈠中，我們選取分子數爲 60 及孔徑爲 10cm 來從事此項實驗。

⑸依㈠之步驟記錄出球數。

2. 結果：⑴數據列表如下：

(2)演算：$M_1 = 2.38$ $M_2 = 2.88$

$M_3 = 3.38$ $M_4 = 4.03$

$M_5 = 4.68$

∴ a. $M_1 : M_2 : M_3 : M_4 : M_5$

$= 1 : 1.210 : 1.420 :$

$1.693 : 1.966$

b. $\sqrt{M_1} : \sqrt{M_2} : \sqrt{M_3} :$

$\sqrt{M_4} : \sqrt{M_5}$

$= 1 : 1.100 : 1.192 :$

$1.301 : 1.402$

c. $\frac{1}{\sqrt{M_1}} : \frac{1}{\sqrt{M_2}} : \frac{1}{\sqrt{M_3}} :$

$\frac{1}{\sqrt{M_4}} : \frac{1}{\sqrt{M_5}} :$

$= 1 : 0.909 : 0.839 : 0$

$0.768 : 0.713$

* $R_1 = 16.3$ $R_2 = 14.7$

$R_3 = 13.7$ $R_4 = 12.3$

$R_5 = 11.7$

$R_1 : R_2 : R_3 : R_4 :$

R_5

$= 1 : 0.898 : 0.837$

誤差： 1.2 % 0.2 %

$0.775 : 0.714$

0.9 % 0.1 %

質量 \ 出球數		平
M_1 2.38g	18 15 16	16.3
M_2 2.88g	15 14 15	14.7
M_3 3.38g	14 13 14	13.7
M_4 4.03g	13 11 13	12.3
M_5 4.68g	12 12 11	11.7

(3)函數圖形：(四)、(五)、(六)

3. 結論：

(1)由演算可完全證明： $\frac{R_A}{R_B} = \frac{\sqrt{M_B}}{\sqrt{M_A}}$ （格銳目定律）

＃誤差在 2 % 以下＃

(2)在此實驗中，由於乒乓球質量增大，故較易沉積於容器底面。為了消除此一缺點，則必須增大馬達轉速，使球充分碰撞。故做此質量探討須以較大的馬達速為之。

六、未來展望

(一) E（電能）＝ I（電流）× V（電壓）× t（時間）

(二) E（動能）＝ $\frac{3}{2}k$（波茲曼常數）× T（絕對溫度）

由以上兩個公式可知：改變 V 的大小（ I、t 固定），則輸入馬達的電能隨之正比變化，然後此電能轉換成馬達之動能，而此動能與絕對溫度成正比關係，故控制輸入電壓亦即間接控制絕對溫度。依此一導論，我們利用交流變壓器控制輸入馬達的電壓；即由此控制絕對溫度，以驗證 $R_1 : R_2 = \sqrt{T_1} : \sqrt{T_2}$ 的公式。但由實驗結果，我竟找出近乎 $R_1 : R_2 = T_1 : T_2$ 的關係。於是我們重新檢查電壓與電流，並翻查參考文獻，找出誤差的原因：①發電廠輸出的電流並不穩定，②電能轉換成動能時，能量消耗極大，是以無法驗證絕度溫度與擴散速率的關係。因此，我們繼續尋找更佳的輸入能量方式，並希望各位專家學者提供寶貴的意見，以幫助我們完成此項探討。

七、參考文獻：

(一) A. L. MCCLELLM "CHEMISTRY EXPERIMENTAL SCIENCE TEACHER'S GUIDE" P 135～138, 1963.

(二) KEENAN WOOD "GENERAL COLLEGE CHEMISTRY" P 219～P 222, 1976.

八、附註說明：

(一)在本實驗中所遭遇的困難有三：

1. 模型中馬達轉盤不夠大，無法使落於底面之球體全部彈起。
2. 乒乓球質量加重後，受重力影響易沈積於底面。
3. 在作絕度溫度的探討時，電壓、電流不穩定；自馬達輸入與

輸出功率相差極大。

克服方法：

1. 在模型底面加上四塊傾斜的壓克力板，使其底面爲由四方向中央之轉盤傾斜的斜面。
2. 加大馬達轉速（即增加輸入的能）以抗拒重力因素。
3. 購買馬達測速器，直接測量馬達輸出的能量。

㈡本作品爲以創新的意念設計出氣體分子運動模型，用以闡釋有關的原理和定律。並由此實驗進行過程中利用的系統方法整理資料（實驗數據），完成科學活動中最有意義的尋求規律的工作。且由本模型的實驗結果符合格銳目擴散定律的公式；並可有效地說明氣體動力論中的擴散頻率公式。以使學生可以充分了解到氣體分子的運動及定律的內涵；在教與學的過程當中，可說是最完美的教學工具，化抽象爲具體。

㈢本作品的設計與實驗過程完全由製作學生負責。而指導老師協助蒐集參考資料及提供改進意見。

評語：1. 模型用意佳，製作相當費時。

2. 大體上相當成功，惜在改變溫度方面不成功。

3. 能夠找出毛病，並預測可能改進之處值得鼓勵。