

鹽水奇異振盪現象之探討

高中組物理第三名

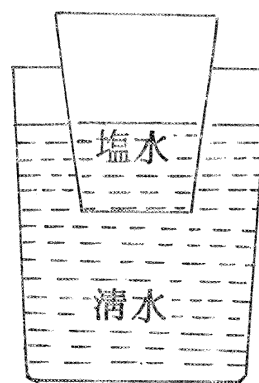
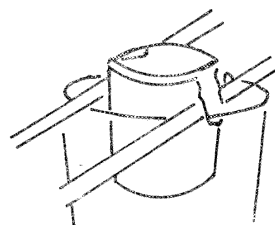
臺中市省立臺中女子中學

作者：黃麗娟、簡若文等七名

指導老師：盧錦玲

一、前言：

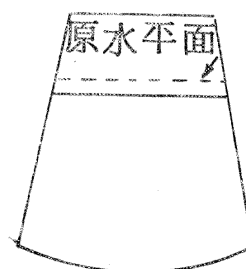
將一紙杯底部穿一小孔，裝了鹽水，置於一預裝清水之透明杯中，如圖一所示，當然最後這兩種液體將混合在一起，但如果你將其中之一染色，在他們混合前你會看到一奇怪的現象。就是塩水下去一股後却停了下來。接著清水亦冒上來一股，如此下去形成振盪現象，且這種現象可以持續幾小時，為什麼會如此？這振動週期又與何因素有關。這都是我們要研究的。



(圖一)

二、由附屬小實驗探討原理：

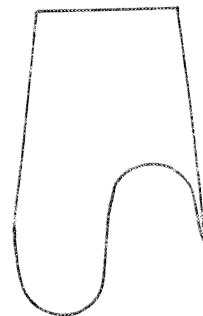
第一個小實驗是：當你將一杯子裝上部份的水蓋上厚紙，將杯子倒轉後，移去扶紙張之手，此時見水留在杯中。當然大家都知道由於水之附着力與水之表面張力及大氣壓力所致，如圖二所示。但如你將紙張突然移去，當然水會流下，而且我們都知道是重力將水拉下，但本來很穩的水面是如何開始流下的？因為它不可能維持不受干擾，一當厚紙移去之一瞬間，因水被擾動了，一小小的波動在水的



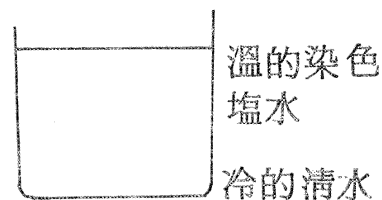
大氣壓力
(圖二)

下表面產生，很快的波振幅增大，一個氣泡從這邊昇上，水從另一邊流下，如圖三所示。第二個小實驗

是將一熱的染色鹽水很小心的倒入冷的糖水中，這時你可以看到染色的鹽水像伸出指頭似的侵入清水中，如圖四所示，為何會有這種情形呢？當然是由於兩液面間的不穩定所致，最初是來自一些擾動產生一些波，如圖五所示，波稍一往下，由於溫度下降密度變得比同水平面之液體密度大，故繼續下降，往上升之部份由於溫度上升，變得比同層之液體輕故繼續上升，波之振幅於是漸漸擴大，如圖六所示，指狀物於是形成。今將混合前後之密度關係繪出如圖七，以便參考



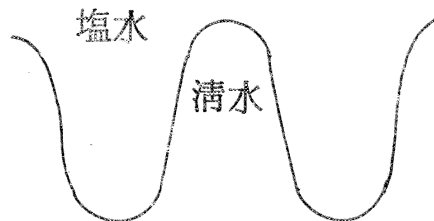
空氣迫水下流
(圖三)



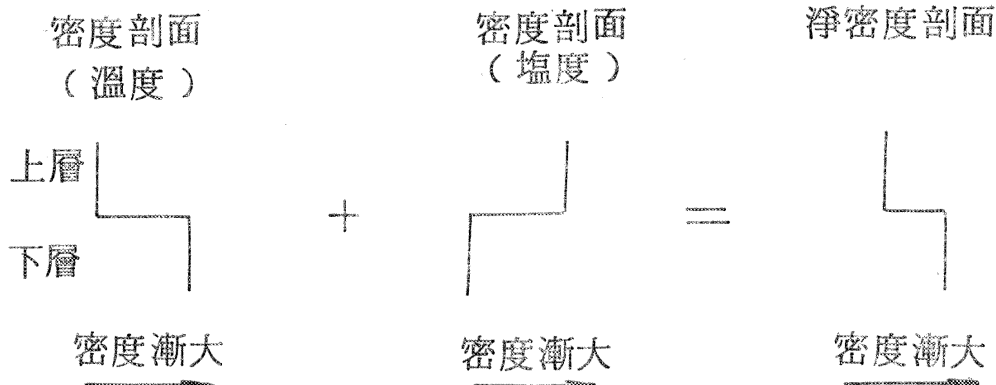
(圖四)



(圖五) 交接面初受擾動



(圖六) 擾動擴大之情形

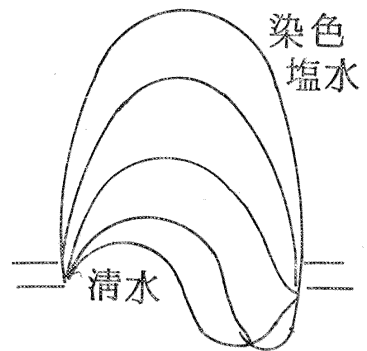


(圖七)
—21—

由以上二實驗，我們知：(一)兩液面間是不穩定，(二)水流之上升下降，密度佔很大之因素。再加上洞口之壓力問題，現推演塩水振盪之原理如下：一開始是塩水比清水重，位置高，故壓力大。於是塩水從洞口流下，但爲何這往下之小水流會停止，這最後再談，先想兩液體交接面處，當然是不穩定的，任何小小的擾動都會影響整個系統，這些小小的擾動產生一小的波動在交接面處，隨著時間增加愈來愈大，若是清水由於擾動往上伸出時如圖八所示，它馬上發現它比周圍的塩水輕，而一直往上升，如圖九所示，此股向上之小水流使塩水杯水位升高，洞口壓力也隨著增加，塩水部分之壓力既然夠大，上升之水流就停止了，但這種交接面本不能平衡，就像倒轉的杯子的下表面一樣，因塩水杯中現有太多之塩水，於是塩水湧下，當洞口壓力上下差不多時，塩水流漸弱最後終於停止，此不穩交接面之任一小小擾動，又產生一波送上一股清水，振動即如此進行下去，那麼何種因素決定它的振盪週期呢？我們想洞口的大小，塩水的濃度應該是最主要的，以下是我們的實驗。



振盪開始時
(圖八)



(圖九)

三、實驗步驟：

(一)孔徑大小與週期之關係：

1. 在紙杯底部分別鑽以不同大小之孔徑。
2. 泡取一定濃度之食塩溶液，並加以染色。
3. 將染色的食塩溶液，倒滿半杯紙杯，迅速地放入澄清水之大燒杯中，如圖(一)所示。
4. 量取週期。
5. 重覆實驗。

(二)同種溶液不同密度之大小與週期之關係。

- 1 泡取不同濃度之 NaCl 溶液。
 - 2 以同一孔徑之紙杯，重覆上述實驗。
- (三) 不同塩類之溶液其密度與週期之關係。
- 1 取數種不同的塩類，配出不同密度之溶液。
 - 2 重覆上述實驗。

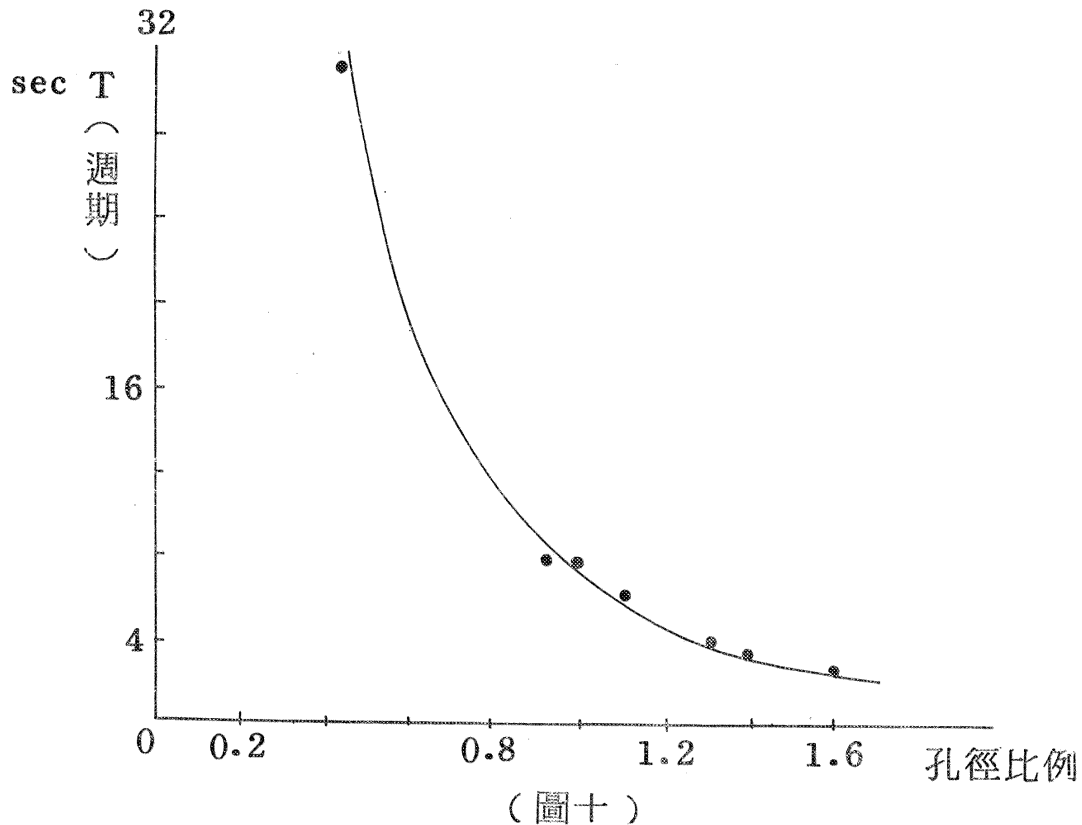
四、實驗數據

(一) 0.5 M 的 NaCl 溶液孔徑大小與週期之關係

編號	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T	T	r
1	171.4	150.7	166	150	150	157	31.44	0.44
	171.4	150.8	166.2	149.8	150			
3	47	47.2	46	47.6	47	46.96	9.39	0.8
	47	47	46.2	47.4	47.2			
4	39.6	40	40.2	40.8	39.4	40.04	8	0.9
	39.5	40.2	40.	40.6	39.4			
5	37.4	37.4	37.4	37.8	38.4	37.68	7.53	1
	37.4	37.4	37.3	37.6	38.6			
6	26.2	26.2	26.6	26.2	26	26.32	5.26	1.1
	26	26.4	26.6	26	26.2			
7	21	21	21	21	21	21	4.2	1.3
	20.08	21	21.2	21	21			
8	19.4	19.2	19.2	19.2	19.8	19.36	3.87	1.4
	19.4	19.4	19.2	19.4	19.4			
9	15	15	15	15.4	15	15.1	3.02	1.6
	14.8	14.8	15.4	15.2	14.8			

註： T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 都是測鹽水上下振動 5 次的時間，
 T 是 T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 之平均

$$T = \frac{T}{5} \quad T \text{ 即為週期，各表之 } r \text{ 乃孔徑比例}$$



由圖十推測 T 可能與 r^n 成反比，故設 $T = k \left(\frac{1}{r} \right)^n$ 兩邊取

\log 得 $\log T = \log k + n \log \frac{1}{r}$ 今利用最小平方方法 n

$$\text{故令 } \log T = y \quad \log \frac{1}{r} = x \quad \log k = a_0$$

$$n = a_1 \quad \text{得} \quad y = a_1 x + a_0$$

利用 $[y - (a_1 x + a_0)]^2$ 求最小值，以獲得最接近之直線。

其展開式為 $y^2 + a_0^2 + a_1^2 x^2 - 2a_0 y + 2a_0 a_1 x - 2a_1 xy$

對 a_0 微分 並令其為零 得 $2a_0 - 2y + 2a_1 x = 0$

對 a_1 微分 並令其為零 得 $2a_1 x^2 + 2a_0 x - 2xy = 0$

$$\text{即 } \begin{cases} xy = a_1 x^2 + a_0 x \\ y = a_1 x + a_0 \end{cases}$$

由 m 次實驗數據得

$$\begin{cases} \sum_i x_i y_i = a_1 \sum_i x_i^2 + a_0 \sum x_i \\ \sum_i y_i = a_1 \sum_i x_i + m a_0 \end{cases}$$

由表一得

編號	T	y	r	$\frac{1}{r}$	x	x^2	xy
1	31	1.491	0.44	2.273	0.357	0.127	0.54
3	9.392	0.973	0.8	1.25	0.097	0.009	0.091
4	8.01	0.904	0.9	1.11	0.045	0.002	0.041
5	7.53	0.877	1	1	0	0	0
6	5.264	0.721	1.1	0.91	-0.041	0.0017	-0.028
7	4.2	0.623	1.3	0.77	-0.114	0.013	-0.068
8	3.872	0.588	1.4	0.714	-0.150	0.021	-0.081
9	3.03	0.481	1.6	0.625	-0.204	0.042	-0.096
Σ		6.658			-0.01	0.2157	-0.415

表二

由上表知 $\sum_i x_i = -0.01$

$$\sum_i x_i^2 = 0.2157$$

$$\sum_i x_i y_i = 0.415$$

$$\sum_i y_i = 6.658$$

$$m = 8$$

$$\begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6.658 \\ 0.415 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -0.01 \\ -0.01 & 0.215 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -0.01 \\ -0.01 & 0.215 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6.658 \\ 0.415 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1.7} \begin{bmatrix} 0.215 & 0.01 \\ 0.01 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.658 \\ 0.415 \end{bmatrix}$$

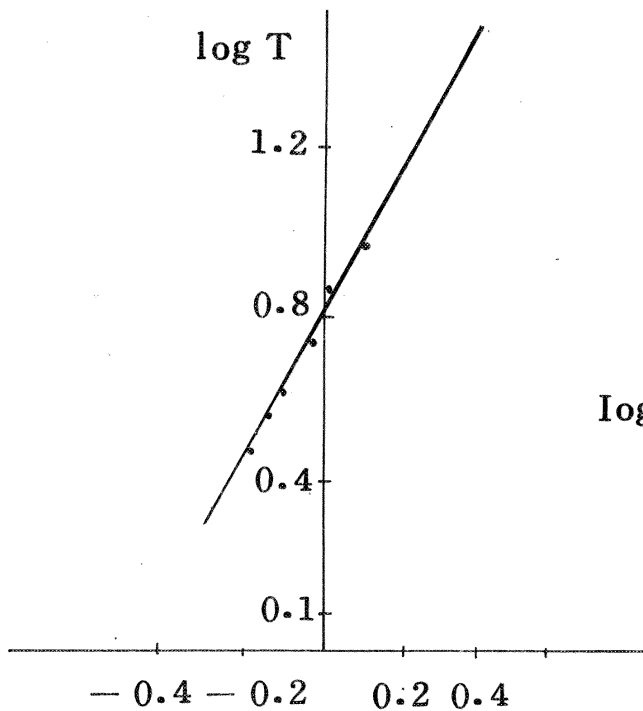
得 $a_0 = 0.84$

$a_1 = 1.96$

即 $y = 1.96 x + 0.84$

故 $T = k \left(\frac{1}{r} \right)^{1.96} \quad 1.96 \sim 2$

今作 $\log T$ 對 $\log \frac{1}{r}$ 如下：



$$\log T = 1.96 \log \frac{1}{r} + 0.84$$

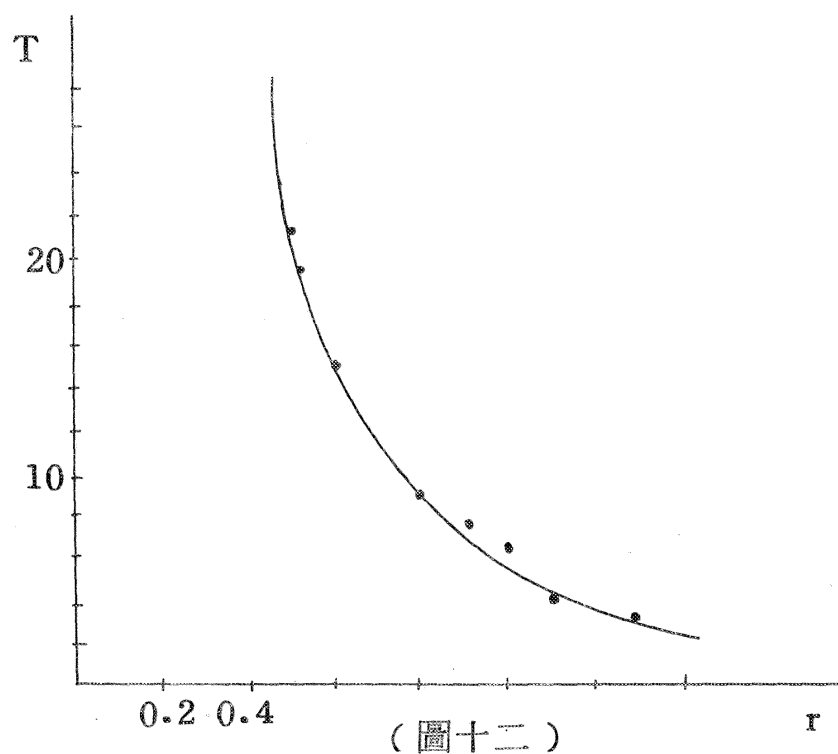
$$\log \frac{1}{r}$$

(圖十一)

(二) IMNaCl 溶液孔徑大小與週期之關係

編號	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T	T	r
1	143	141.2	139.2	147.7	132	141.6	28.32	0.44
	143	141	139.4	147.6	132.2			
1.5	104.7	104.6	108.6	109.4	111.8	108.4	21.68	0.5
	104.6	104.6	108.8	109.2	111.8			
2	98	100	98	101	101	99.4	19.88	0.53
	98.2	100.4	97.6	100.8	101			
2.5	77.8	78	79	75	77	77.58	15.56	0.6
	78	78.2	79.2	75.2	76.8			
3	44	45.6	45	43.5	44	44.5	8.90	0.8
	44.2	45.6	44.8	43.5	44			
4	42.6	40	42	42	43	41.9	8.38	0.9
	42.2	40.4	42	42.2	42.8			
5	33.8	33.8	34	33	33.2	33.76	6.75	1.0
	33.6	33.8	34.2	33.2	33			
6	23.5	22.2	22.2	23.1	23.5	22.9	4.58	1.1
	23.4	22.4	22.0	23.2	23.3			
7	19.9	20.6	20.2	20.5	20.8	20.4	4.08	1.3
	20	20.2	20	20.4	20.6			

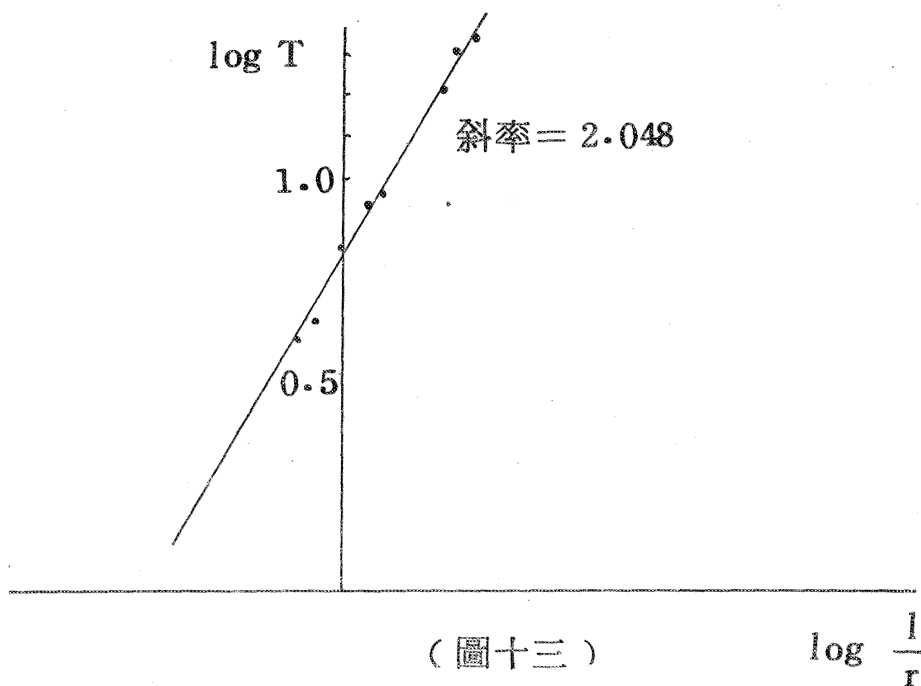
[表三]



此圖與圖十類似仿圖十用最小平方法處理

得 $T = k \left(\frac{1}{r} \right)^{2.048}$

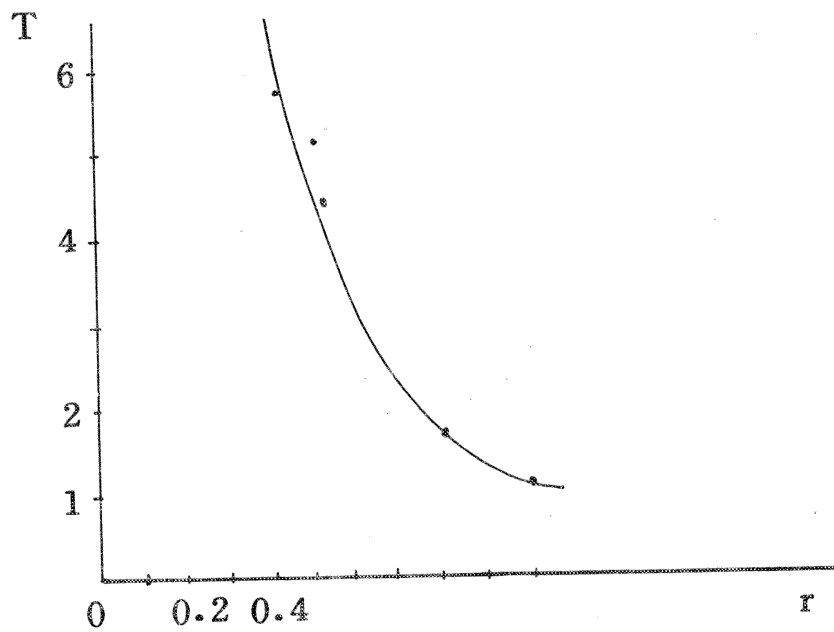
作 $\log T$ 對 $\log \frac{1}{r}$ 之圖如下：



(三)以 CuSO_4 溶液代替鹽水後裝 0.6 M 硫酸銅溶液時孔徑大小與週期之關係

編號	1	1.5	2	3	5
T_1	28.9	25.4	21.5	8.6	5.6
T	5.78	5.08	4.3	1.72	1.12
r	0.44	0.5	0.53	0.8	1.0

[表四]

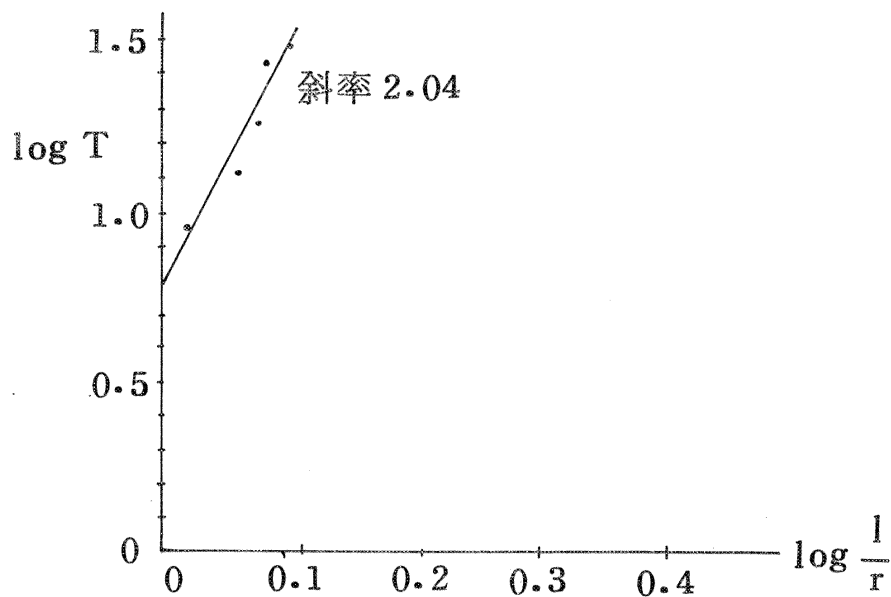


(圖十四)

此圖亦與圖十類似仿上用最小平方法處理

$$T = k \left(\frac{1}{r} \right)^{2.04}$$

作 $\log T$ 對 $\log \frac{1}{r}$ 之圖如下：

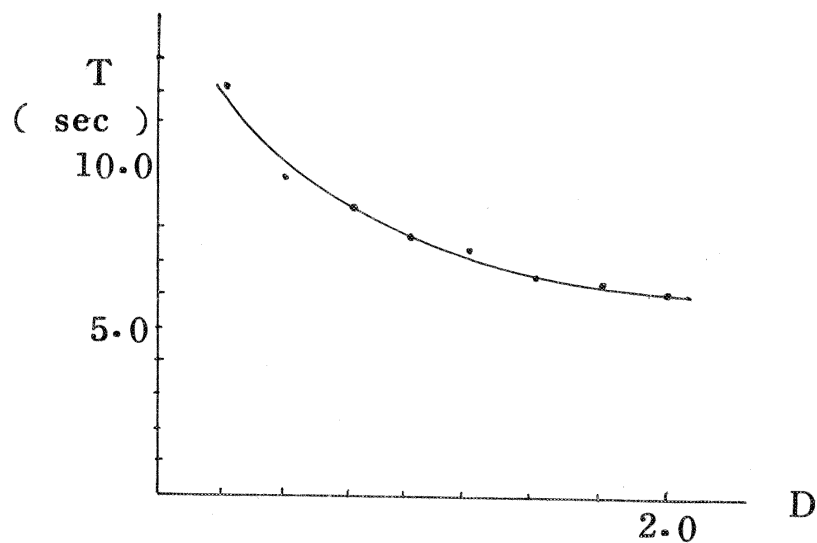


(圖十五)

綜合(一)(二)(三)可知同一溶液同一濃度週期和孔徑平方成反比

(四) NaCl 溶液不同密度之大小(D)與週期的關係

T \ D	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
T ₁	61.4	45.8	43.6	39	36.7	33.2	31.6	30.2
T ₂	12.24	9.12	8.7	7.8	7.34	6.64	6.32	6.04



(圖十六)

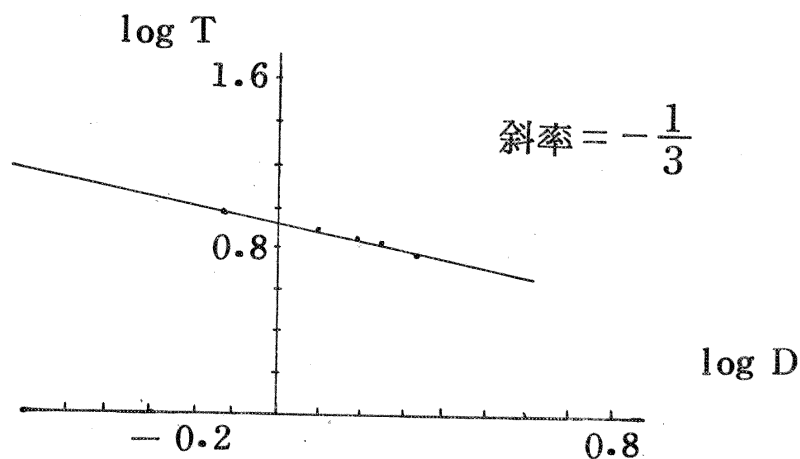
仿 可求得 T 和 M 的關係為

$$T = k (M)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow T^3 = k \times \frac{1}{M} \quad (k \text{ 為常數})$$

也就是密度週期的立方和密度成反比

即密度越大，週期越小

作 $\log T$ 與 $\log D$ 的圖如下：

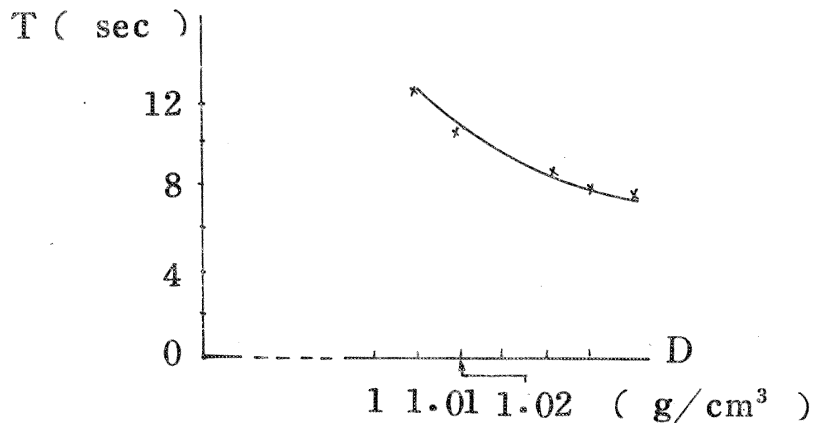


(圖十七)

(五) 不同鹽類之溶液其密度(D)與週期的關係

D	CuSO ₄	NH ₄ Cl	NaNO ₃	Na ₂ SO ₃	(NH ₄) ₂ SO ₄
T	1.01g/cm ³	1.02g/cm ³	1.04g/cm ³	1.05g/cm ³	1.06g/cm ³
T	64.5	53.5	46.3	42	39
T	12.5	10.7	9.26	8.4	7.8

註：D 乃是利用比重計所測得



(圖十八)

圖十八又與圖十六變化類似同樣有密度越大，週期越小之關係。

五、結論：

- (一)對此次實驗結果，我們頗覺合理，因洞口面積愈大下流水柱就多，很快的使洞口壓力平衡，所以「同一溶液同一濃度振盪週期和孔徑平方成反比」，是應成平方反比，因面積比乃孔徑平方比。
- (二)同一溶液週期立方與密度成反比。
- (三)任何溶液只要密度大其振動週期就小。
- (四)孔徑影響週期較密度影響為大。

六、附註：

- (一)本實驗所列杯子之孔徑大小乃是利用投影機放大後量出之直徑比其實際大小約介於 1 mm 與 2mm 間實驗發現孔徑太小時，振盪週期非常之長不易測量，太大時上下水流同時進行變成無振動現象。
- (二)鹽水濃度太大時與孔徑太大時現象相同。
- (三)最初在杯子穿洞時，只將杯子穿破做出之數據誤差太大，最後是先將鑽子尖端燒熱後刺入塑膠杯子（其俗稱紙杯，前面之說明均採用紙杯二字）再由投影機放大後在 60 個杯子中找出最

圖之 9 個來做實驗，才求出週期與孔徑之函數關係。

(四)本實驗所用染料乃食用染料「紅花米」，只要一點點就有明顯之顏色對溶液之濃度應無影響。

(五)要做指狀物之實驗時，溫的食鹽水倒入冷糖水中時要注意兩溶液之密度關係（如圖七所示）及倒法才能成功，倒時要讓糖水上浮一薄紙，鹽水倒於紙上倒完後再移去薄紙。

七、參考資料：

Jearl Walker "The Flying Circus of Physics with Answer"

評語：對題目所處理的現象，能有較深入的分析。部份內容雖稍難，但學生現場表現，顯示對其亦有正確之了解。