多邊形之心

國小教師組數學第三名

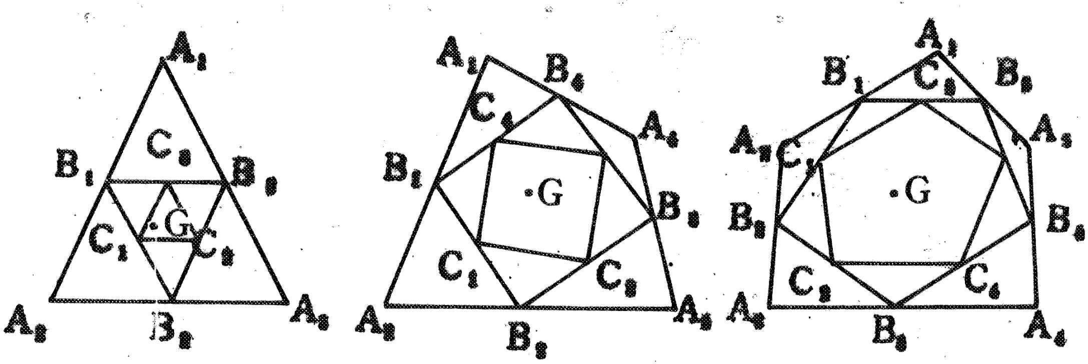
高雄市九如國民小學　　　　　　　作　者：林正吉

一、研究動機：

兩點間的線段有一中點，三角形有一重心，那麼，多邊形是否也有一個類似三角形重心的心呢？這個觀念存在我心裏很久了，直到這個寒假，我才眞正的找到了它，了解了它。

二、研究過程：

1. 多邊形之心在那裏？我做了下圖的遊戲發現了它。



(1)首先我在三角形 $A_1A_2A_3$ 中取各邊中點連線形成三角形 $B_1B_2B_3$，再取 $\triangle B_1B_2B_3$ 各邊中點連線形成三角形 $C_1C_2C_3$。於是 $\triangle A_1A_2A_3 > \triangle B_1B_2B_3 > \triangle C_1C_2C_3$，即每次所做的新三角形都逐漸縮小，我想若經過無限次的縮小必歸趨於一點 G。我繼續做四邊形、五邊形都有同樣的情形，基於推想，若有 n 邊形依照上述作圖，必可歸趨於一點 G。

上述的 G 點，我想，它就是多邊形的心，可是，它要經過無限次的作圖才能得到，實際上毫無意義。若能算出它的位置或者找到它的性質，使它能在簡單的、有限次的作圖中得到，那才有意義。

(2)爲了計算 G 點的位置，我利用向量的方法。玆以大寫英文字母表示點的位置，小寫英文字母表示該點的向量，例如 a_1 爲 A_1 之向量，b_1 爲 B_1 之向量等。

因 B_1 爲A_1A_2 之中點，故 B_1 之向量 $b_1=\dfrac{a_1+a_2}{2}$ 同理

B_2 之向量 $b_2=\dfrac{a_2+a_3}{2}$，…… B_n 之向量 $b_n=\dfrac{a_n+a_1}{2}$ 則

$$b_1+b_2+\cdots b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

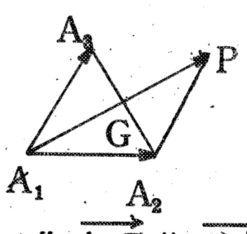
(1)式顯示 n 邊形，各邊中點連線所成的較小的 n 邊形其各頂點之向量和與原 n 邊形各頂點之向量和相等。

因此，前述無限次作圖所產生的無限多的 n 邊形的頂點向量和皆相等。當它們逐漸縮小歸趨於G點時，各頂點的向量卽爲G之向量，故G之向量 $g=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ ………(2)

(2)式顯示多邊形的「心」的位置，卽爲各頂點向量的平均向量所定的位置。若 n 爲有限的，則G的位置可在有限次作圖中求得。

2. 多邊形之心的作圖法

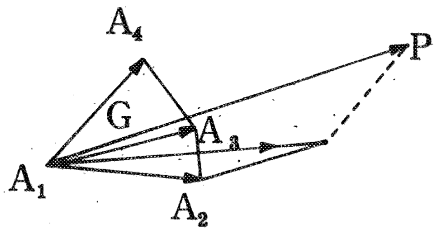
(1) 向量作圖法：根據(2)式，多邊形的心，我們可以向量作圖法求得，卽先做各頂點的向量和再 n 等份卽可得到G點。玆以三角形及四邊形爲例圖示如下：



a. 作 $\overrightarrow{A_2P} \underline{\parallel} \overrightarrow{A_1A_3}$

b. 作 $\overrightarrow{A_1G}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{A_1P}$

G卽爲所求



a. 作 $\overrightarrow{A_2P_1} \underline{\parallel} \overrightarrow{A_1A_3}$

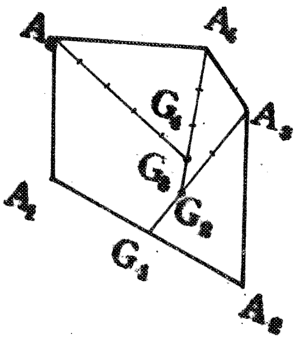
b. 作 $\overrightarrow{P_1P_2} \underline{\parallel} \overrightarrow{A_1A_4}$

c. 作 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{A_1P_2}$

G卽爲所求

(2)調合分點作圖法：設 $A_1A_2\cdots A_n$ 爲 n 邊形作 $G_1G_2G_3\cdots G_n$

G_1 爲 A_1A_2 之$\dfrac{1}{2}$分點，G_2 爲 G_1A_3 之$\dfrac{1}{3}$分點，G_3 爲



G_2A_4 之$\frac{1}{4}$分點……G_{n-1} 爲 G_{n-2} A_n $\frac{1}{n}$分點（如圖中 G_4 爲 G_3A_5 之$\frac{1}{5}$分點）

則 G_{n-1} 即爲所求

因 $g_1=\dfrac{a_1+a_2}{2}$ ，$g_2=\dfrac{2g+a_3}{3}=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$

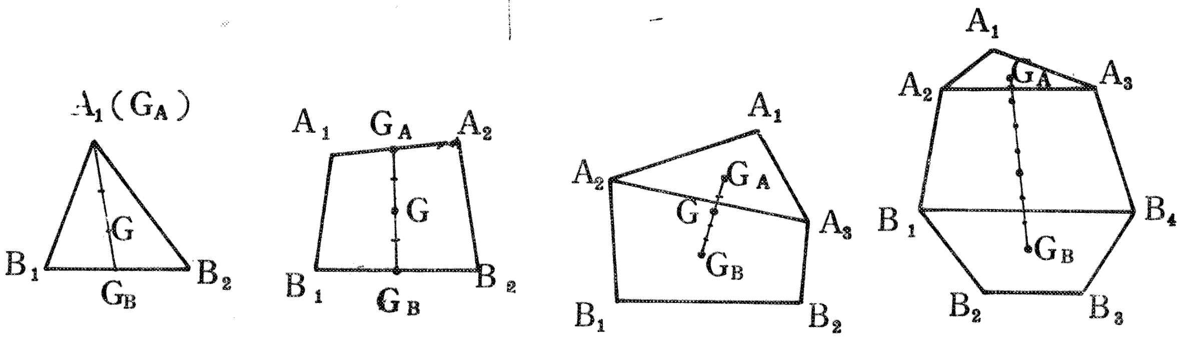
$$g_3=\frac{3g_2+a_4}{4}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$$

$$g_{n-1}=\frac{(n-1)g_{n-2}+a_n}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

故 g_{n-1} 即爲所求。

又因 $G_1\,G_2\,G_3\cdots\cdots G_{n-1}$分別爲各線段的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$……，$\frac{1}{n}$分點，即調合級數分點，故稱爲調和分點。

(3)分組連心作圖法：



將多邊形之頂點分爲A、B兩組，A組含有m點，B組含有k點，作 G_A 爲A組之心，G_B 爲B組之心，在 G_AG_B 上取G點使 $\dfrac{G_A\,G}{G\,G_B}=\dfrac{k}{m}$ ，則G點即爲所求。

因 $g_A=\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_m}{m}$ ，$g_B=\dfrac{b_1+b_2+\cdots\cdots+b_k}{k}$

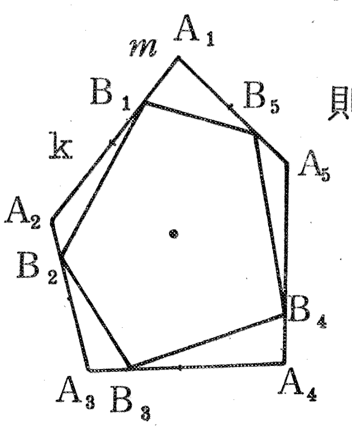
故 $g=\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_m+b_1b_2+\cdots\cdots+b_k}{m+k}$

故G點卽爲所求。

3. 多邊形之心的性質：

(1)同比同心性：$A_1A_2\cdots\cdots A_n$為一n邊形，在其各邊取同比分點

$B_1B_2\cdots\cdots B_n$，使 $\dfrac{A_1B_1}{B_1A_2}=\dfrac{A_2B_2}{B_2A_3}=\cdots\cdots=\dfrac{A_nB_n}{B_nA_1}=\dfrac{m}{k}$



則 B_1 之向量 $b_1=\dfrac{ka_1+ma_2}{m+k}$

B_2 之向量 $b_2=\dfrac{ka_2+ma_3}{m+k}$

B_n 之向量 $b_n=\dfrac{ka_n+ma_1}{m+k}$

故 $b_1+b_2+\cdots b_n=\dfrac{ka_1+(m+k)a_2+\cdots+(m+k)a_n+ma_1}{m+k}$

卽 $b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$

故 $g_B=\dfrac{b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n}{n}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}=g_A$

卽 G_B 與 G_A 同心，且其頂點向量和相等。

(2)平行同心性：多邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 各頂之連心線上取 B_1，$B_2\cdots\cdots B_n$ 且 $B_1B_2 /\!/ A_1A_2$，$B_2B_3 /\!/ A_2A_3$

$\cdots\cdots B_nB_1 /\!/ A_nA_1$，則 $\dfrac{GB_1}{B_1A_1}=\dfrac{GB_2}{B_2A_2}=\cdots\cdots$

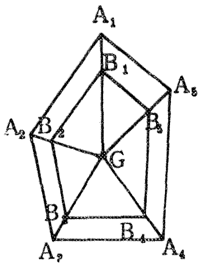
$=\dfrac{GB_n}{B_nA_n}=\dfrac{m}{k}$

B_1 之向量 $b_1=\dfrac{ma_1+kg}{m+k}$，

B_2 之向量 $b_2=\dfrac{ma_2+kg}{m+k}$

B_n 之向量 $b_n = \dfrac{ma_n + kg}{m+k}$

故 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \dfrac{m(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\,kny}{m+k}$



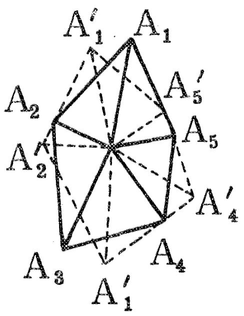
$$= \frac{m \cdot n \cdot g + k \cdot n \cdot g}{m+k}$$

$$= \frac{ng(m+k)}{m+k}$$

$$= ng = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

故同心平行多邊形之頂點向量和相等。

(3)同心旋轉性：多邊形 $A_1A_2 \cdots\cdots A_n$ 以其心固定，旋轉任一角後其頂點之向量和不變。



因 $g = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \dfrac{a_1' + a_2' + \cdots\cdots a_n'}{n}$

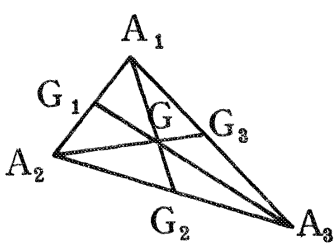
故 $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n = a_1' + a_2' + \cdots + a_n'$

(4)向量和不變性：上述同比同心多邊形及平行同心多邊形之頂點向量和不變，多邊形同心旋轉後之向量和不變，除此之外，多邊形之心至各頂點之向量和爲零，也是向量和不變性。

因 $g = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ 若以G爲原點，則 $g = 0$，故

$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n = 0$

(5)分組連心線共心性：根據分組連心作圖法知分組連心線皆過多邊形之心。



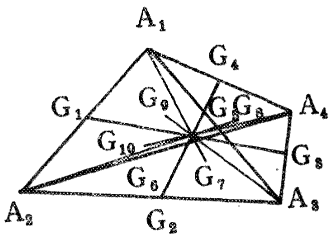
茲求 n 邊形之分組連心線之數目（ t ）

當 $n = 3$ 則 $t = C_1^3 = 3 = 2^2 - 1$

當 $n = 4$ 則 $t = C_1^4 + \dfrac{1}{2}C_2^4 = 7 = 2^3 - 1$

當 $n = 5$ 則 $t = C_1^5 + C_2^5 = 15 = 2^4 - 1$

（ G_1, G_2, G_3 爲各邊之中點）



當 $n=2m+1$，$t=C_1^{2m+1}+C_2^{2m+1}+\cdots\cdots+C_m^{2m-1}=2^{n-1}\cdot-1$

當 $n=2m$，$t=C_1^{2m}+C_2^{2m}+\cdots\cdots+\frac{1}{2}C_m^{2m}=2^{n-1}\cdot-1$

故n邊形之分組連心線有 $2^{n-1}-1$ 條共心。

（G_1,G_2,G_3,G_4 爲各邊之中點，G_5,G_6 爲對角線之中點，G_7,G_8 G_9,G_{10}爲$\triangle A_2A_3A_4$,$\triangle A_1A_3A_4$,$\triangle A_1A_2A_4$,$\triangle A_1A_2A_3$之重心）

4. 多邊形之心的名稱：n邊形之心，至此尚未予以命名。玆根據它與三角形重心具有相同的性質命名。當 $n=3$ 時，它是三條分組連心線的交點，也是三中線的交點，故它是三角形重心。

它的位置以向量表示 $g=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$ 。

當 $n>3$ 時，它是 $2^{n-1}\cdot-1$ 條分組連心線的交點，它的位置以向量表示是 $g=\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$ 。故它與三角形重心具有相同的型態，同樣具有前述的性質，同樣可以前述的作圖法求得，故稱它爲n邊形的重心是合理的。

三、結論：

多邊形之心的介紹，至此作結論如下：

1. 多邊形重心的位置以向量表示 $g=\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$
2. 多邊形重心可以向量作圖法、調和分點作圖法、分組連心線作圖法求得。
3. 多邊形重心具有同比同心性、平行同心性、同心旋轉性、向量和不變性、分組連心線共心性。
4. 多邊形重心與三角形重心具有相同的型態、相同的性質、相同的作圖法，故稱之爲多邊形的重心是合理的。

評語：研究用心可嘉。