

茶杯的表面積、容積的研究

高小組數學第二名

屏東縣仁愛國民小學

作 者：楊德威等七名

指導老師：楊雪燕 羅德義

一、研究動機：

上勞作課時，我的口好渴。忽然靈機一動，就用圖畫紙做個紙杯。根據平常的印象“茶杯的杯口大，杯底小，在平面上的圖形類似梯形。”於是，在紙上畫一個梯形，然後沿線剪下來，再把它接合起來。結果，做出來的紙杯，左瞧右瞧，都不順眼，再用剪刀慢慢修剪，使它像個杯子。可是心中又有個疑問：到底要做一個杯子，應該畫成怎樣的圖形才好呢？最後，只好把剛做好的杯子展開。啊！並不是一個梯形……。

二、研究問題：

- 1 所有杯形器皿的側面展開圖都如扇形嗎？
- 2 杯形物體的表面積，要怎樣計算呢？
- 3 在側邊長相等的情況下，杯口半徑和杯底半徑成怎樣的比例時，容積最大？

三、研究過程：

過程 1 (1)搜集日常生活中，類似杯形的器物，如玻璃杯、冰淇淋盒、紙杯、量杯、垃圾桶、水桶……等。

(2)把紙杯、冰淇淋盒等紙製品的底去掉，並把它的側邊切開，觀察它的展開圖形。

(3)玻璃杯等非紙製品，就先用白紙沿著它的側面，糊成一個和它的側面相同的紙模，再將紙模切開，觀察它的展開圖形。

發現：紙杯、冰淇淋盒、玻璃杯、水桶等物品的側面展開圖，都如扇形。

過程 2 把大小、形狀相同的紙杯或冰淇淋盒去底，再展開，一個接一個的拼接起來，結果如照片。

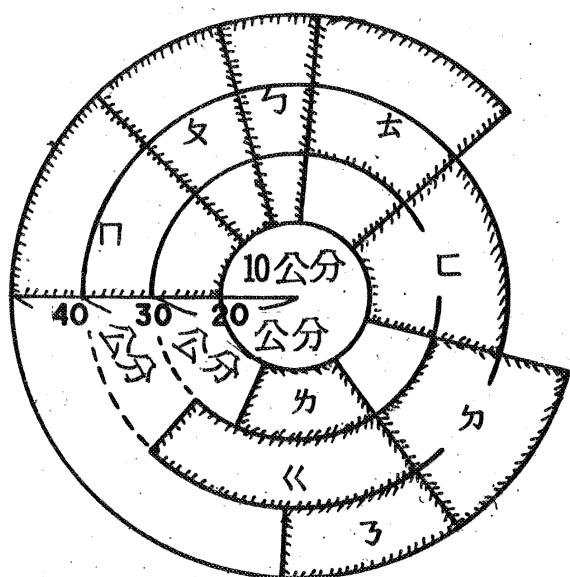
發現：八個冰淇淋盒和九個紙杯，去底展開後，分別拼接起來，就成為一個環形。

過程 3. 製作紙杯

材料—卡紙

工具—圓規、量角器、尺、膠帶、萬年糊、剪刀、刀片等。

方法：(1) 在卡紙上，以10公分、20公分、30公分、40公分為半徑，畫四個同心圓，把它分割成任意等分（如圖），做成紙杯。



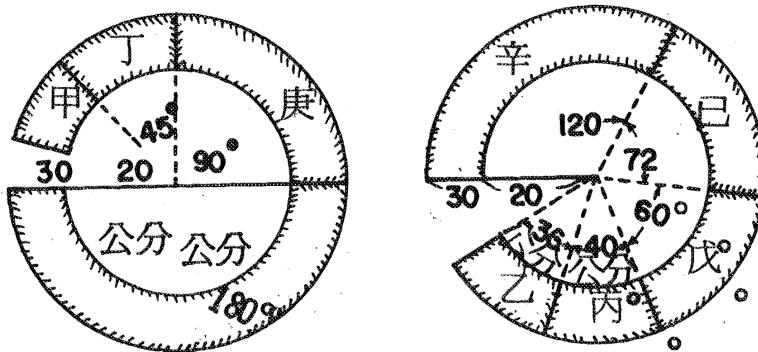
側邊長 (公分)	由高而低依次排列		
	1	2	3
30	𠂇	𠂇	𠂇
20	𠂇	𠂇	𠂇
10	𠂇	𠂇	𠂇

表(一)

結果：所做成的紙杯，大小不一樣，高低也不相同

方法：(2)a. 在卡紙上，以20公分、30公分為半徑，畫兩個同心圓，再把圓環分成 $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12$ 等分（以量角器等分，如圖）做成紙杯。

b. 在上面杯口平放一支塑膠尺(𠂇)，再把塑膠尺(𠂇)，垂直豎立在塑膠尺(𠂇)的一側，量出紙杯的高度。



註：此組紙杯以“藍色”筆編號

表二

紙杯高度比較							
編號	角度	等分	實測高度 (公分)	編號	角度	等分	實測高度 (公分)
甲	30	12	10	己	72	5	9.8
乙	36	10	10	庚	90	4	9.7
丙	40	9	9.9	辛	120	3	9.4
丁	45	8	9.9	壬	180	2	8.6
戊	60	6	9.9				

註：此組紙杯以“藍色”筆編號

發現：(1)每個紙杯的側邊長相等(10公分)而做成的紙杯，高度並不一樣。

(2)取的角度越大，做出來的紙杯越低，取的角度越小，做出來的紙杯越高。

過程4 探討紙杯的側面積的計算方法

方法(1)：在自製紙杯的第二過程中，已經發現一公式甲。

紙杯的側面積 = 外圓面積 - 內圓面積 = (外圓半徑 × 外圓半徑 × 3.14 - 內圓半徑 × 內圓半徑 × 3.14) ÷ 等分

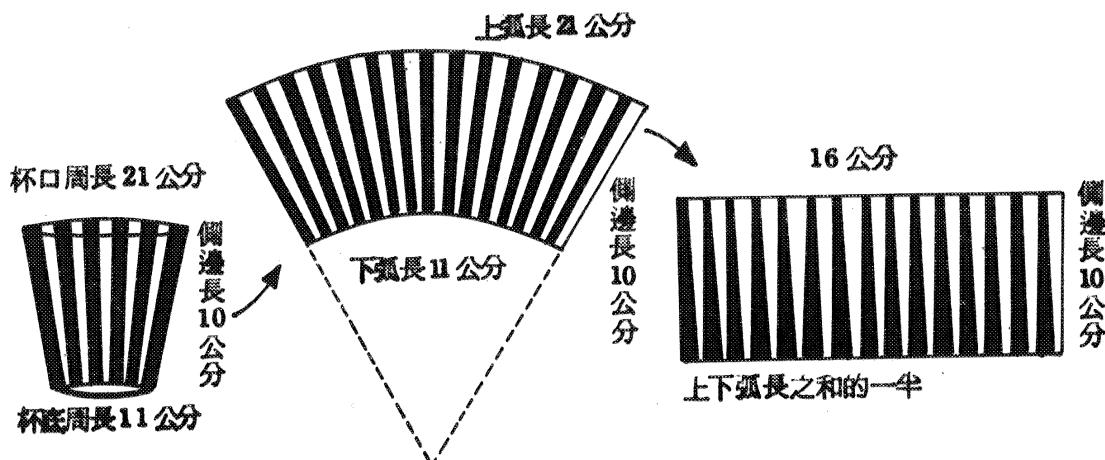
由上面公式，計算自製紙杯的側面積的結果如下表：

表(三)

編號	外圓半徑	內圓半徑	等分	側面積 (平方公分)	編號	外圓半徑	內圓半徑	等分	側面積 (平方公分)
甲			12	130.8	己			5	314
乙	30	20	10	157	庚	30	20	4	392.5
丙	公分	公分	9	174.44	辛	公分	公分	3	523.5
丁			8	196.25	壬			2	785
戊			6	261.5					

註：這組紙杯以“藍色”筆編號。

方法(2)：模仿圓形面積公式的求法（國小數學課本第11冊“圓的面積怎麼算？P.79”）把扇形分成30等分，剪開後，一正一反相錯重新拼接起來，如下圖：



發現：(1)紙杯的側面積，類似平行四邊形面積。

(2)平行四邊形的底 = (紙杯的上弧長 + 紙杯的下弧長)
÷ 2

(3)平行四邊形的高 = 紙杯的側邊長

公式乙

$$\begin{aligned} \text{紙杯的側面積} &= (\text{上弧長} + \text{下弧長}) \div 2 \times \text{側邊長} \\ &= (\text{杯口周長} + \text{杯底周長}) \div 2 \times \text{側邊長} \end{aligned}$$

依照上面發現的方法，計算紙杯的側面積如下表：

編號	等分	上弧長 (公分)	下弧長 (公分)	側邊長 (公分)	側面積 (平方公分)	說明
甲	12	15.7	10.46	10	130.8	(1)表四的紙杯，是取外圓半徑為30公分，內圓半徑為20公分的圓環做成的。
乙	10	18.84	12.56		157	
丙	9	20.9	14		174.44	
丁	8	23.55	15.7		196.25	
戊	6	31.4	20.9		261.5	(2)上弧長=紙杯杯口周長=外圓周長÷等分
己	5	37.68	25.12		314	
庚	4	47.1	31.4		392.5	(3)下弧長=紙杯杯底周長=內圓周長÷等分
辛	3	62.8	41.9		523.5	
壬	2	94.2	62.8		785	(4)此組紙杯以“藍色”筆編號。

發現：用方法(一)、(二)計算紙杯的側面積，所得的結果完全相同。

驗證：以自製紙杯的側面積的計算來驗證，公式(甲)和公式(乙)是彼此相關的。

$$\text{外圓半徑} = 30 \text{ 公分} \quad \text{內圓半徑} = 20 \text{ 公分}$$

$$\text{上弧長} = \text{外圓半徑} \times 2 \times 3.14 \div \text{等分}$$

$$\text{下弧長} = \text{內圓半徑} \times 2 \times 3.14 \div \text{等分}$$

$$\text{側邊長} = 10 \text{ 公分}$$

$$\begin{aligned}
 \text{紙杯的側面積} &= (\text{外圓半徑} \times \text{外圓半徑} \times 3.14 - \text{內圓半徑} \times \text{內圓半徑} \times 3.14) \div \text{等分} \\
 &= (30 \times 30 \times 3.14 - 20 \times 20 \times 3.14) \div \text{等分} \\
 &= [(20 + 10) \times 30 \times 3.14 - 20 \times 20 \times 3.14] \div \text{等分} \\
 &= [20 \times 30 \times 3.14 + 10 \times 30 \times 3.14 - 20 \times 20 \times 3.14] \div \text{等分} \\
 &= [10 \times 30 \times 3.14 + 30 \times 20 \times 3.14 - 20 \times 20 \times 3.14] \div \text{等分}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [10 \times 30 \times 3.14 + (30 - 20) \times 20 \times 3.14] \div \text{等分} \\
&= [10 \times 30 \times 3.14 + 10 \times 20 \times 3.14] \div \text{等分} \\
&= [30 \times 3.14 + 20 \times 3.14] \times 10 \div \text{等分} \\
&= [30 \times 2 \times 3.14 + 20 \times 2 \times 3.14] \div 2 \times 10 \div \text{等分} \\
&= [60 \times 3.14 \div \text{等分} + 40 \times 3.14 \div \text{等分}] \div 2 \times 10 \\
&= [\text{上弧長} + \text{下弧長}] \div 2 \times \text{側邊長} \\
&= (\text{杯口周長} + \text{杯底周長}) \div 2 \times \text{側邊長}
\end{aligned}$$

公式歸納：

- (1) 杯子的側面積 = (杯口周長 + 杯底周長) $\div 2 \times$ 側邊長
- (2) 杯子的表面積 = 側面積 + 下底面積

過程 5 探討紙杯側面積與容積之間的關係

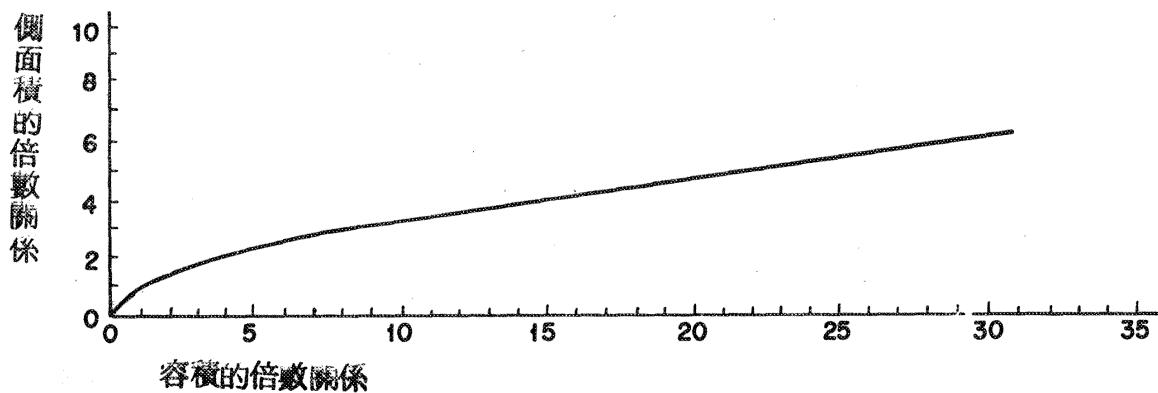
(側面積成倍數比的時候，容積會有什麼變化？)

- (1) 容積的測量方法 一把紙杯裝滿水，用尺從杯口的一邊平推至杯口的另一邊，再用湯匙將杯裏的水舀入量筒中，以測量紙杯的容積。
- (2) 將表(五)的側面積資料和容積的實測結果（每個紙杯測量三次，求它的平均值）列入下表。

表(五)

編號	等分	側面積 (平方公分)	側面積的 倍數關係	容積 (立方公分)				容積的 倍數關係	說明
				第一次	第二次	第三次	平均		
甲	12	130.8	1	143	138	139	140	1	(1)側面積的倍數關係和容積的倍數關係都以(甲)為標準數。 (2)這組紙杯以“藍色”筆編號。
乙	10	157	1.2	202	203	196	200	1.43	
丙	9	174.44	1.33	244	243	245	244	1.74	
丁	8	196.25	1.5	309	296	320	308	2.20	
戊	6	261.5	2	545	546	545	545	3.90	
己	5	314	2.4	805	798	774	792	5.66	
庚	4	392.5	3	1238	1208	1232	1226	8.76	
辛	3	523.5	4	2083	2148	2124	2118	15.13	
壬	2	785	6	4402	4390	4342	4378	31.27	

(3)側面積的倍數關係與容積的倍數關係的比較：



發現：(1)側面積成倍數關係時，容積的比值，相當於側面積的倍數比值的平方。

(2)側面積的倍數比值愈小，容積的比值愈接近平方。

過程 6 在側邊長相等的情況下，紙杯杯口半徑和杯底半徑成怎樣的比例時，容積最大？

- 方法(1) a. 在卡紙上，畫出半徑長為10公分、20公分、30公分、40公分的同心圓。再用量角器把它分成3, 4, 6, 8, 10, 12等分。
 b. 計算每一紙杯的側面積和實測每一紙杯的容積（每一個紙杯測量三次，取平均值）。
 c. 計算杯口半徑和杯底半徑的比例：

$$\text{杯口半徑} = \frac{\text{上弧長}}{3.14} \div 2$$

$$\text{杯底半徑} = \frac{\text{下弧長}}{3.14} \div 2$$

$$= \frac{(\text{外圓半徑} \times 2 \div 3.14 \div \text{等分})}{3.14 \div 2}$$

$$= \frac{(\text{內圓半徑} \times 2 \div 3.14 \div \text{等分})}{3.14 \div 2}$$

$$= \frac{\text{外圓半徑} \div \text{等分}}{\text{內圓半徑} \div \text{等分}} = \frac{\text{外圓半徑}}{\text{內圓半徑}}$$

表(六) 取外圓半徑為20公分，內圓半徑為10公分的圓環，等分後做成的紙杯：

$$\text{杯口半徑} = \frac{\text{外圓半徑}}{\text{內圓半徑}} = \frac{20}{10} = \frac{2}{1}$$

此表都以(甲)杯爲標準數

編號	等分	側面積 (平方公分)	側面積的容積 倍數關係(立方公分)	容積的 倍數關係	說明
甲	12	78.5	1	51	1
乙	10	94.2	1.2	71	1.39
丁	8	117.75	1.5	110	2.16
戊	6	157	2	198	3.88
庚	4	235.5	3	445	8.73
辛	3	314	4	771	15.12

表(七) 取外圓半徑爲30公分，內圓半徑爲20公分的圓環做成的紙杯：

$$\frac{\text{杯口半徑}}{\text{杯底半徑}} = \frac{\text{外圓半徑}}{\text{內圓半徑}} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

此表都以(甲)杯爲標準數

編號	等分	側面積 (平方公分)	側面積 倍數關係	容積 (立方公分)	容積的 倍數關係	說明
甲	12	130.8	1	140	1	(1)這組紙杯以“藍色”筆編號。 (2)容積取於表(五)的資料。
乙	10	157	1.2	200	1.43	
丁	8	196.25	1.5	308	2.20	
戊	6	261.5	2	545	3.90	
庚	4	392.5	3	1226	8.76	
辛	3	523.5	4	2118	15.13	

表(八) 取外圓半徑爲40公分，內圓半徑爲30公分的圓環做成的紙杯：

$$\frac{\text{杯口半徑}}{\text{杯底半徑}} = \frac{\text{外圓半徑}}{\text{內圓半徑}} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$$

此表都以(甲)杯爲標準數

編號	等分	側面積 (平方公分)	側面積 倍數關係	容 積 (立方公分)	容 積 的 倍數關係	說 明
甲	12	183.2	1	268	1	(1)這組紙杯以 “紫色”筆 編號。
乙	10	219.8	1.2	385	1.44	(2)容積測量三 次，取它的 平均值。
丁	8	274.8	1.5	600	2.24	
戊	6	366.3	2	1060	3.96	
庚	4	549.5	3	2351	8.77	
辛	3	732.7	4	4062	15.16	

發現：杯口半徑和杯底半徑的比值，愈接近 1 的時候（和圓柱形的形狀愈接近）容積愈大。

過程 6. 杯形紙杯（杯口大，杯底小）和圓柱形紙杯（杯口和杯底大小相同）的容積的比較：

(1)製作側面積相等的杯形紙杯和圓柱形紙杯。

杯形紙杯一規格如表(八)

圓柱形紙杯一規格如下：

表 (九)	寬 (公分)	長 (公分)					
		甲	乙	丁	戊	庚	辛
	10	18.3	22	27.5	36.6	55	73.3

(2)測量每個紙杯的容積，並做比較，結果如下表：

此表都以(甲)杯爲標準數

側面積 平方公分	側 積 倍數關係	杯 形 紙 杯				圓柱形紙杯			
		編號	等分	容 積 立方公分	容 積 的 倍數關係	編號	容 積 立方公分	容 積 的 倍數關係	
183	1	甲	12	268	1	甲	269	1	
220	1.2	乙	10	385	1.44	乙	390	1.45	
275	1.5	丁	8	600	2.24	丁	606	2.25	
366	2	戊	6	1060	3.96	戊	1083	4.02	
550	3	庚	4	2351	8.77	庚	2431	9.04	
733	4	辛	3	4062	15.16	辛	4266	15.86	

註：(1)杯形紙杯以“紫色”筆編號，圓柱形紙杯以“褐色”筆編號。

(2)杯形紙杯的容積取於表(八)的資料。

(3)圓柱形紙杯的容積，測量三次，求取它的平均值。

發現：(1)側面積相等時，圓柱形紙杯的容積比杯形紙杯的容積大。

(2)圓柱形紙杯的容積的比值，更接近側面積的倍數比值的平方。

四、結論：

在這一段研究的過程中，我們不但研究出製作紙杯的方法，同時我們也明白了如何計算杯形物體的表面積，並設計多種不同比例的紙杯，進而發現紙杯的側面積及容積之間的關係。

1 茶杯形狀的物體，它的側面展開圖都如扇形。幾個大小、形狀相同的紙杯的側面展開圖拼接起來，都可拼成一個圓環。

2 側邊長相等，而扇形的角度不同，做出來的紙杯高度也不一樣。角度越大，做出來的紙杯越低；角度越小，做出來的紙杯越高。

3 茶杯的側面積等於杯口周長和杯底周長之和的一半，乘以它的側邊長。

4. 茶杯的表面積等於它的側面積加杯底面積的和。
5. 茶杯的側面積成倍數關係時，容積的比值，相當於側面積的倍數比值的平方。
6. 茶杯的杯口半徑和杯底半徑的比值，愈接近 1 的時候（和圓柱形的形狀愈相似），它的容積愈大。
7. 在側面積相等的情況下，圓柱形紙杯的容積，比杯形紙杯的容積大。

評語：雖然結果是已知的也可以理論計算（超過高小程度）得到，但透過實驗操作過程，取得數據為納出正確的結論，這種研究過程頗合小學生的研究型態值得提倡。