

# 簡易數學教具之製作研究

## 國中組教師數學第二名

台北市雙園國民中學

作者：林石得

### 一、研究動機：

精巧且優良的數學科教具，對於數學科的教學將有莫大的裨益，這是無可爭論的事實。有鑑於此，本校數學科教學研究會計劃從本學年度（六十八學年度）起，擬滙聚各位老師之智慧及平日教學心得，發揮教學研究會之最高功能，嚐試從事數學科教具之製作研究，俾能將來在教學上收到良好的效果。我們如此做，但願能為我九年國教竭盡棉薄之力。現在祇是開始，我們願持之以恆，努力之製作研究，以達成我們預期的目標。

### 二、研究經過與內容：

#### 1 教師用作圖教具之製作研究：

首先我們檢視學校現有之數學科教學作圖工具。學校目前存有使用中之數學科作圖教具有圓規、丁字尺、分角器、三角板等。

讓我們先行討論圓規，目前在數學科教學上所使用的圓規所示，乃採木質雙腳式的，此種圓規，依作者及其他教師的管見，當然有其使用上的優點，但是也有不盡理想之處，茲將不盡理想部分討論如下：

- (1)現行使用過的圓規，使用過的教師都有一種感覺，就是其支點（圓心部分）不易固定，以致在畫圓時，不易準確而迅速的達成目的。
- (2)現行使用的圓規畫出之圓，其直徑大小無法很快的知悉，亦即無法勾畫出預期直徑大小的圓。
- (3)現行使用的圓規，其最大缺點是容易損壞，無法達到堅固耐用之目標，尤其是固定用之支點，容易脫落，一旦脫落，雖曰可以立刻維護之。但是已不牢固矣！根據本校設備組統計

本校在本學年度開學時，爲教學上需要採購了十五支的圓規，等到學期末收回時，竟然祇有四支是完整的，由此概略可知現行圓規之牢固性矣！

- (4)現行使用的圓規，對於身材較矮的老師使用上頗爲不便，因爲當老師在黑板上作圓時，必須兩手提高，一手用以固定支點，一手用以旋轉夾有紛筆之另一腳，依物理力學的觀點而言，費力且不便，同時兩手臂必須抬得很高，假如一天中連續上完三節課時，手臂將會微微感到酸痛。

現行使用的圓規有如上述的缺點，筆者及其他同仁深深覺得有研究改進之必要。其次，讓我們討論丁字尺：學校現行使用之丁字尺，此種丁字尺大致上並無多大的缺點，只是體積稍嫌龐大，攜帶不便，因此教師在教學上不願將它隨身攜帶（指在教學上需用到它時），因此，此種丁字尺經年累月被冰存於教具室裡的櫥櫃，難得與黑板碰面。筆者認爲任何一種教具，假如教師經年不去使用它，即是它最大的缺點，也有改進的必要。

接下去讓我們討論分度器，現行學校在數學科教學上所使用的分度器，此種分度器其情形依筆者及同仁之淺見，亦如上所說，雖曰能量出預期之角度，但其體積過於龐大，不爲一般教師於教學需要時所攜帶，因此其命運與丁字尺相同，常被列爲教具室裡之陳列品，殊爲可惜。

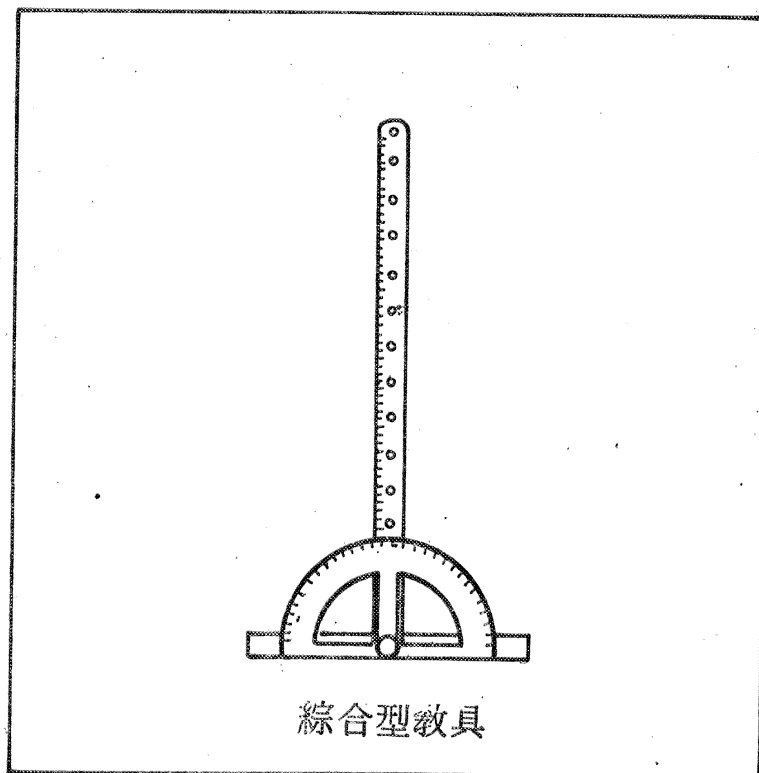
最後讓我們來討論三角板，學校現行使用的三角板有兩種，一爲 $45^\circ \sim 45^\circ \sim 90^\circ$ ；一爲 $30^\circ \sim 60^\circ \sim 90^\circ$ 。此二種三角板，在數學科教學上使用情形較爲良好，但是筆者及其他同仁，總覺得在黑板上作個三角形或其他圖形而利用著兩個龐然大物稍嫌累贅，此種說法，雖曰不當，但顯示該項教具亦有其不可言喻之缺點。

綜上所論爲四種數學科作圖教具個別上之缺失，如果以總體而言之，亦可討論如下：

- a.如果學校班級數衆多，擔任數學科之教師，必然也多，此

時學校必須大量購買上列四種教具，以為教學上所需，則所需經費將頗為可觀，以本校為例，上述四種教具每種教具大約需購買十五支到二十支，而且必須隨時補充之。

- b. 此外，在保管上因為數量頗多，亦需備有多數之櫥櫃與空間，用以陳列保管之，有時為了教學上之方便，設備組將成套之教具，在開學時分別借給每位數學老師使用並負責保管之，待學期結束時，再行收回，此種情形將使得教師在保管上，發生很大的困擾，甚至造成遺失或損壞情形。
- c. 有時教師於上數學課時，必須同時利用上列四種教具時，則攜帶上將頗感不便。因此，幾位同仁與作者就想到如何針對上列教具之缺失，進行研究，改進製作。首先我們進行紙上設計工作，幾經磋商研究決定製作如下圖所示之綜合型作圖教具。



此種作圖教具共由三層所組成，底層由一支壓克力質料或木質料所製成的直尺構成，為使將來作圖時，其支點能牢固支持著，在直尺的底面加上兩片正方形橡皮。中層

爲一根邊緣有刻度而中間各有適合紛筆插入之小洞的長方形直尺，在每個小洞中的邊緣固定有富彈性之橡皮，以爲將來紛筆插入時能牢固地固定之，同時在底層和中層間爲防止摩擦過大，加上一片中空之圓形小鐵片。上層爲附有刻度的半圓形的分角器以爲將來量度角的大小。在中層和上層之間亦夾有中空圓形之小鐵片，以防止中層和上層間之摩擦過大。至於上層、中層、下層間，用一連有把手的螺絲鐵釘加以銜接，使中層和上層可以自由旋轉，這三層的質料可選用木料，亦可選用壓克力製品，前者製作價格低廉，後者則精巧美觀耐用。

紙上設計完成後，進行模型之製作，我們乃採用木質材料，利用本校之工藝工場很容易地製作完成，製作完成後，交給數學科同仁使用，進行檢討改進，大致上同仁們都覺得此種綜合型的作圖教具有如下方便之處：

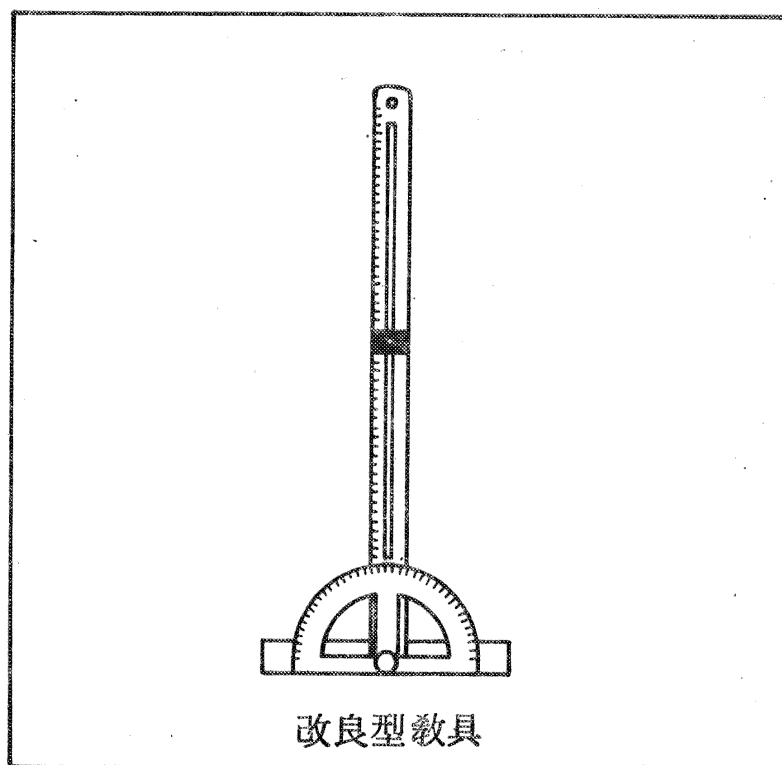
- (a)利用此教具作圖正確迅速且方便。
- (b)此種教具可以代替圓規、丁字尺、分度器、三角板，此曰此種教具爲綜合型。
- (c)此種教具不但具有多種用途，且其體積精巧細小，攜帶頗爲便利。
- (d)如果此種教具採用壓克力質料時，將能達到美觀實用的目標。
- (e)利用此項教具可以勾畫出預期大小的圓。
- (f)中層之圓洞固定有橡皮，以爲牢固紛筆之用，根據筆者及同仁使用之後，深感方便而堅實，有改進前述圓規缺點的創意。

經使用模型後部分同仁雖覺得較爲理想，但亦覺得此種綜合型有兩項缺點必須加以克服：

- i.利用此種綜合型教具時，祇能勾畫出「定圓」而已，雖在教學上使用已足夠矣，但却未能理想地勾畫出各種大小不同的圓。

ii. 因爲底層的直尺過長，作很小的圓時，受到嚴格地限制。

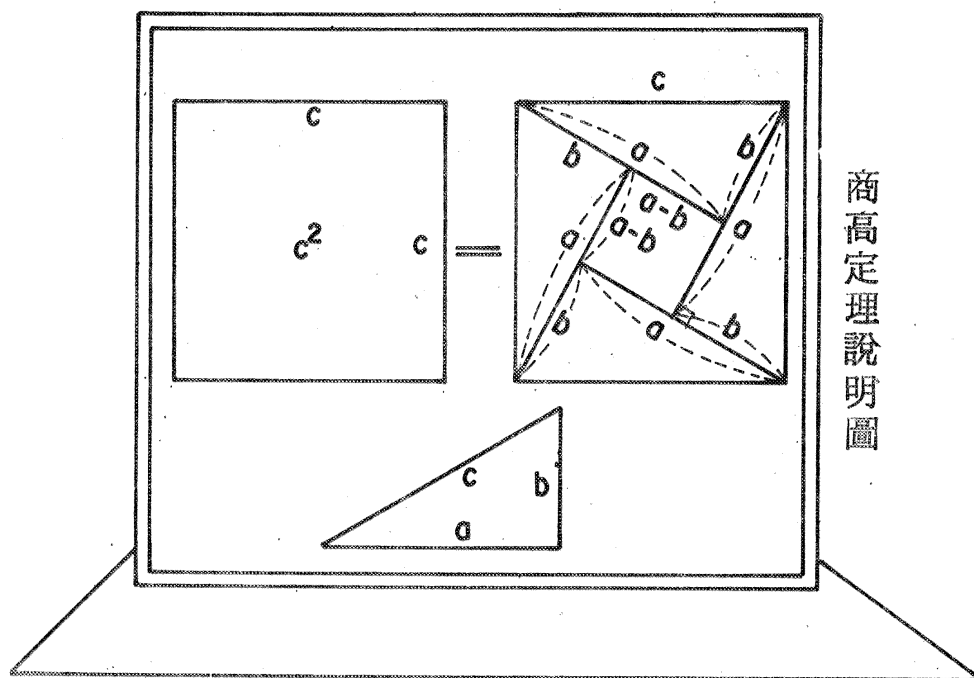
以上兩種缺失必須加以克服方能謂之良好之教具，於是經過大家再度研商結果改良成下列形式的綜合型：




原來中層上的小圓洞改以如上圖所示，可以自由地上下任意調整，以勾畫出大小不同的圓。如此改進亦使製作上不必花太多的時間在打圓洞與牢固橡皮。如此改進事實上克服了上列第一項缺失。第二項缺失則依然存在。如果我們將底層的直尺儘量縮短則失去丁字尺的用途，如果不要縮短，則小圓無法正確且迅速的刻畫出，在魚與熊掌無法得兼的情況下，我們覺得寧可捨長取短。（註：有些同仁認爲將底層改成伸縮式，我們會再仔細研究），研究至此，我們想告一段落，於是進行申購材料及零件開始製作，以爲教師教學時方便使用之。還請專家、學者惠予指教。

## 2. 商高定理（勾股弦定理）證明之教具製作：

關於商高定理在國中數學上是常被利用的一種定理，爲使此項定理能徹底爲同學所瞭解，我們設計了兩種證明用之教具，期許同學不但能瞭解它，並且能於日常生活中靈活應用之，其構造如下圖所示：

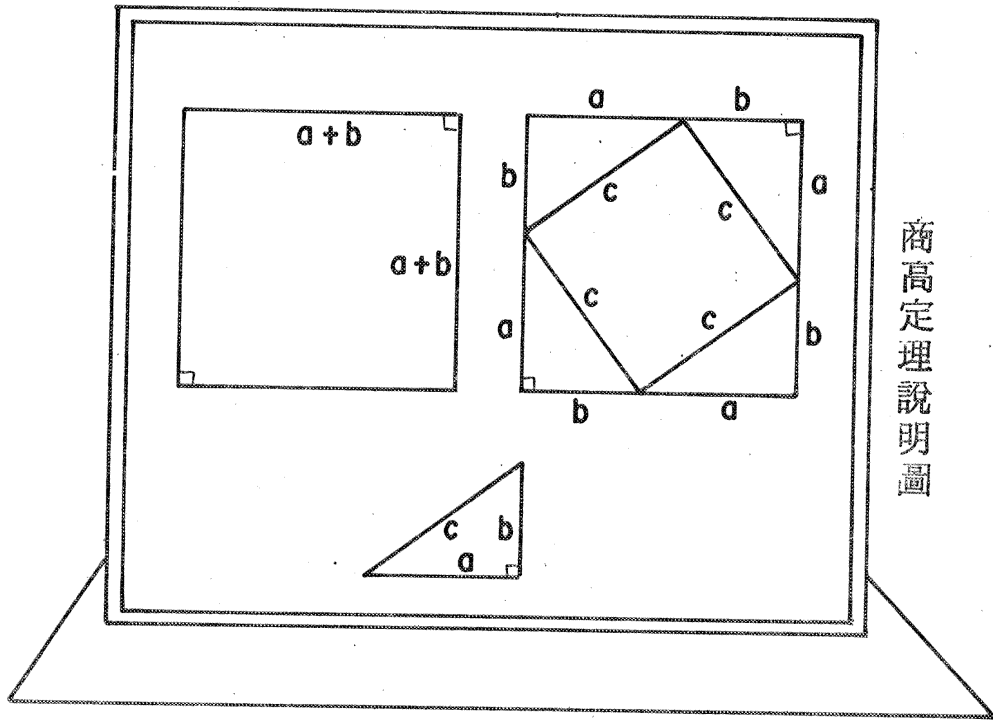


將長約五十公分，寬五十公分的鐵板豎立固定於下方的鐵板上，以爲教師上課時揭示說明用。另用書面紙畫好圖形及標示如上所示。再用透明塑膠紙將之包裝之使能保持清潔。而後用普麗隆剪成四個邊長分別爲  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的直角三角形及一個邊長爲  $(a - b)$  的正方形。在上列五塊普麗隆的內面黏貼有一個小圓形磁鐵，以爲教學時附著在磁鐵板上用之（如 ）說明時，左右兩邊的正方形的邊長均爲  $c$ ，故其面積相等。而後把四個邊長分別爲  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的直角三角形及一個邊長  $(a - b)$  的正方形（此正方形教師應先行證明之）利用小磁鐵附著於右邊的正方形使其完全蓋滿而後進行討論如下：

$$c^2 = (a - b)^2 + \left(\frac{1}{2} ab\right) \times 4$$

$$c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$



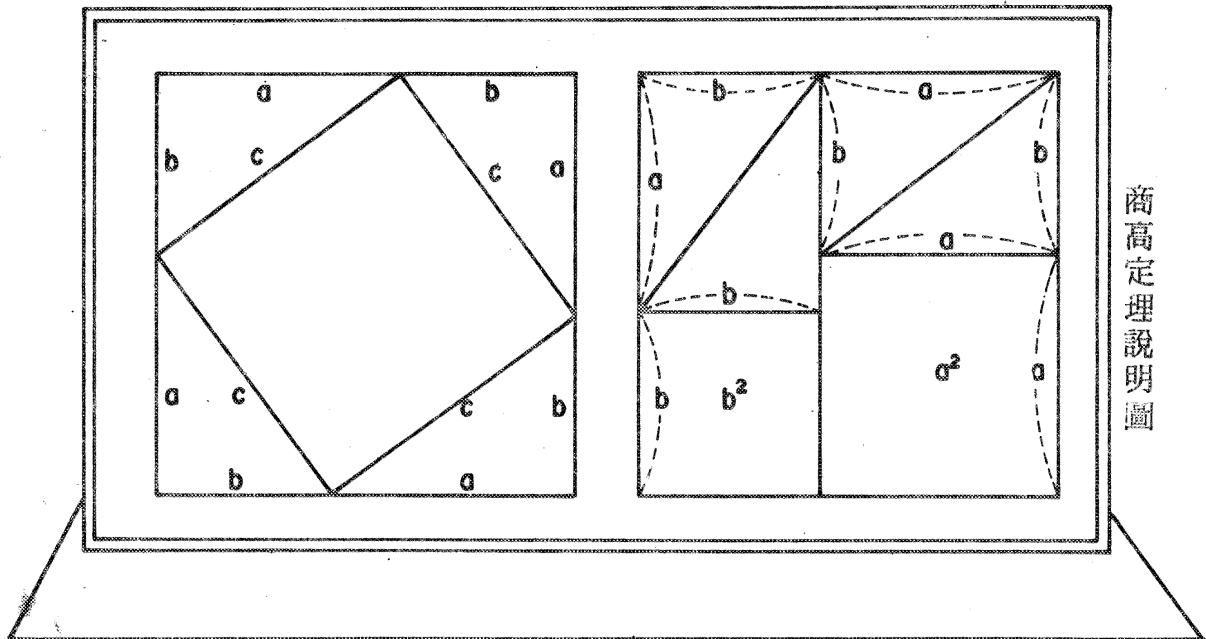
第二種證法與上述類似，將書面紙畫好如上圖所示，並把標示清楚地記出，用透明塑膠紙包裝之以保持清潔，然後用普麗隆剪成四個邊長分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的直角三角形及一個邊長為  $c$  的正方形（此正方形在說明時必須事先證明之）。在五塊普麗隆的內面亦黏貼小圓形磁鐵。說明時，左右兩個正方形的邊長皆為  $(a + b)$  故其面積應相等，然後把五塊普麗隆細心地黏貼於右邊的正方形內，使其完全蓋滿，則此時立刻進行討論如下：

$$(a + b)^2 = \left(\frac{1}{2} ab \times 4\right) + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

利用上述兩種教具說明商高定理，起初可由教師先行示範，而後可請同學反復的操作練習，則不但可加深同學深刻的印象，使學習數學更爲生動有趣，而且可使此定理更爲具體化，相信此種教具對於同學的學習與瞭解將有或多或少的幫助。



上列證法事實上是第二種證法的進一步說法：將書面紙畫好，如上圖所示，並把標示清楚地記出，再用透明塑膠紙包裝之，以保持乾淨完整，然後用普麗隆剪成八個邊長分別爲  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之直角三角形及三個邊長分別爲  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之正方形（此三個正方形事先應予以證明之。）在這些普麗隆的內面黏貼小圓形磁鐵。說明時，將四個邊長  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之直角三角形及邊長  $c$  的正方形排在左邊圖形中，另四個邊長  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之直角三角形及邊長  $b$ 、 $c$  之正方形排在右邊圖形中，則左右兩邊圖形皆爲  $(a + b)$  之正方形，因此其面積相等，此時進行討論如下：

$$\frac{1}{2} ab \times 4 + c^2 = \frac{1}{2} ab \times 4 + a^2 + b^2$$

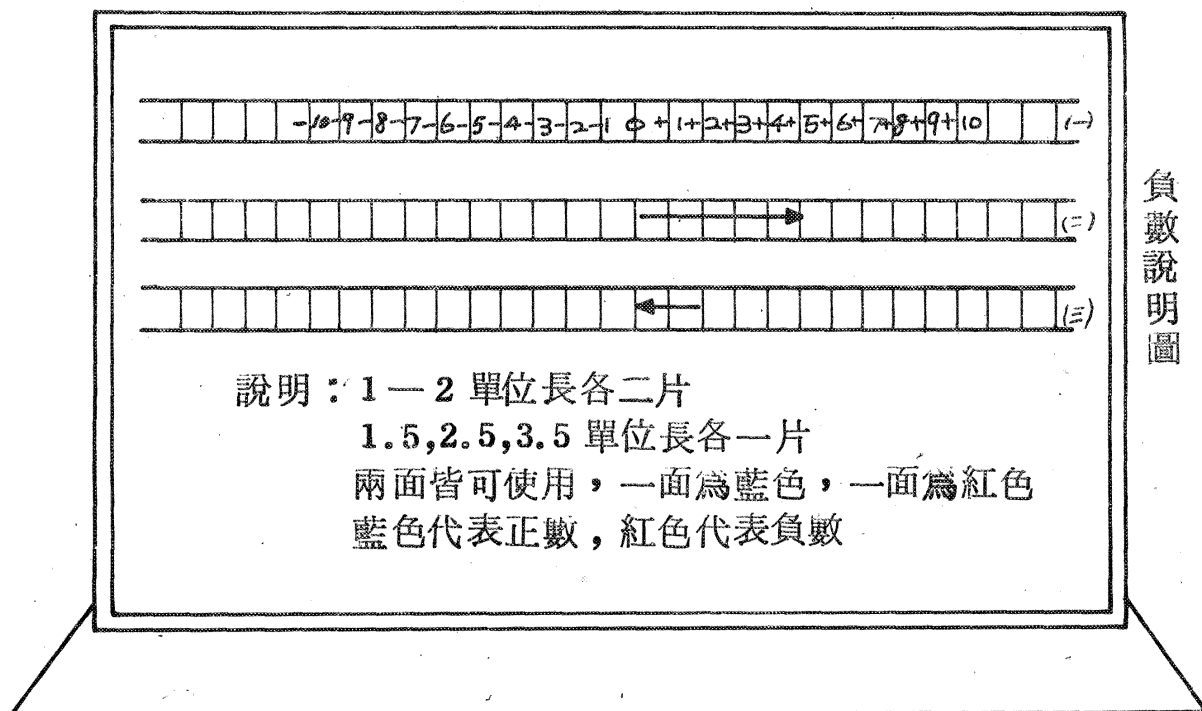
$$2ab + c^2 = 2ab + a^2 + b^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$



### 3. 負數說明器之製作：

在國中數學第一冊的教材中，有關負數的加減法，對於學生而言，往往有些許學習上的困擾，這是同仁們共同的感覺，經大家研商的結果製作了「負數說明器」，期許對於同學的學習有所幫助，其構造如下圖所示：

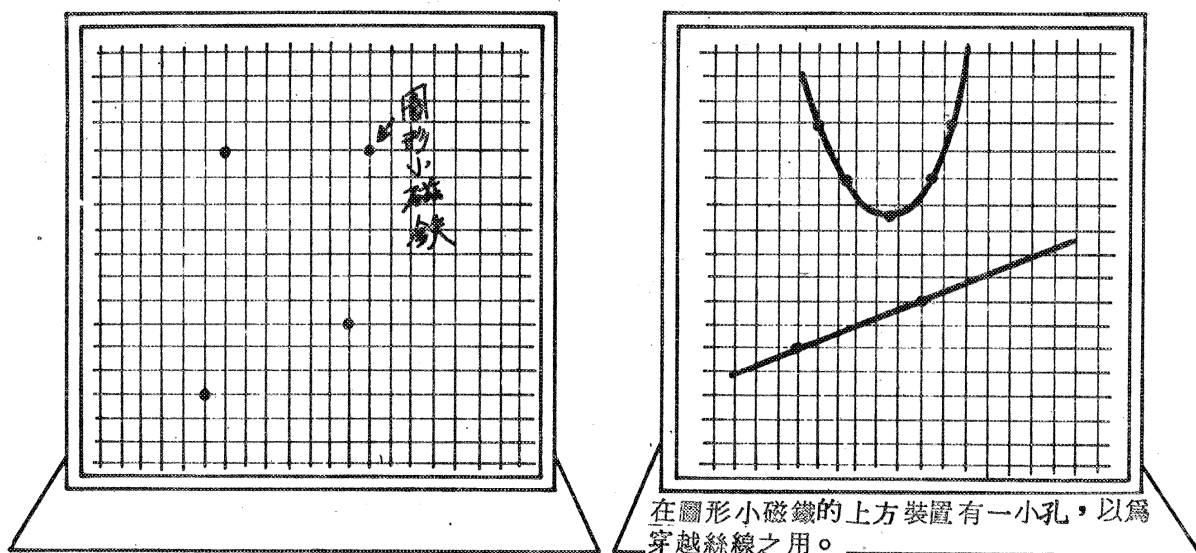


利用前述的磁鐵板裝置，然後用書面紙畫好如上圖所示之方略，從 $-10 \sim +10$ ，再用透明塑膠布包裝之，使保持乾淨與整潔，同時利用普麗隆按照上列方格的大小分別剪下 $1 \sim 5$ 單位長各二片， $1.5$ ， $2.5$ ， $3.5$ 單位長各一片，此普麗隆一面塗以藍色，一面塗以紅色，前者代表正數，後者代表負數，教師說明時可利用各種不同單位的方格處理之。例如 $(+5) + (-2) = (+3)$ 則將藍色五個單位的小方格放在第二列上，再將紅色二個單位的小方格放在第三列上，則表示尚有藍色三個小方格，餘此類推。教師示範完畢後可請同學自己操作，希望從操作中去瞭解認識負數的概念。此種教具之製作非常簡易，使用上利用小圓形磁鐵的裝置，亦甚為簡便，同學由操

作有趣的情境中，化抽象為具體當能收到良好的效果。

#### 4. 直角坐標說明器之製作研究：

在國中數學第四冊前面四章中幾乎都在闡明與利用直角坐標，每當在說明上列四章時，總看到同仁們辛苦地在黑板上畫了老半天，有些同仁則簡單畫上橫坐標和縱坐標草率地畫上各種函數圖形，以前者而言則浪費時間，以後者來說則給予同學一種紊亂的感覺，為此同仁們紛紛感到何不設計「直角坐標說明器」來解決上列問題。一方面免除紛筆灰的侵襲，一方面增加同學學習上的興趣，此直角坐標說明器如下圖所示。



直角坐標說明器之構造，可採用上述的磁鐵板裝置，然後用書面紙畫好小方格如上圖所示，再用透明塑膠布包裝之，以保乾淨與整潔，而後另行準備圓形小磁鐵作為教師介紹坐標平面某點的坐標，亦可由教師說出某點的坐標，再請同學將圓形小磁鐵放置在該坐標上，上列情形僅是一例而已。教師當可利用它，使它發揮最大的功能。如欲作函數圖形時，則此時應在小磁鐵上方設置有空隙以為穿越絲線所必需。例如欲做線性函數圖形，則將二點找出，再將兩片圓形小磁鐵置於兩點上，再用色彩鮮艷的絲線將之連結，即得美觀有趣的圖形。如欲做二

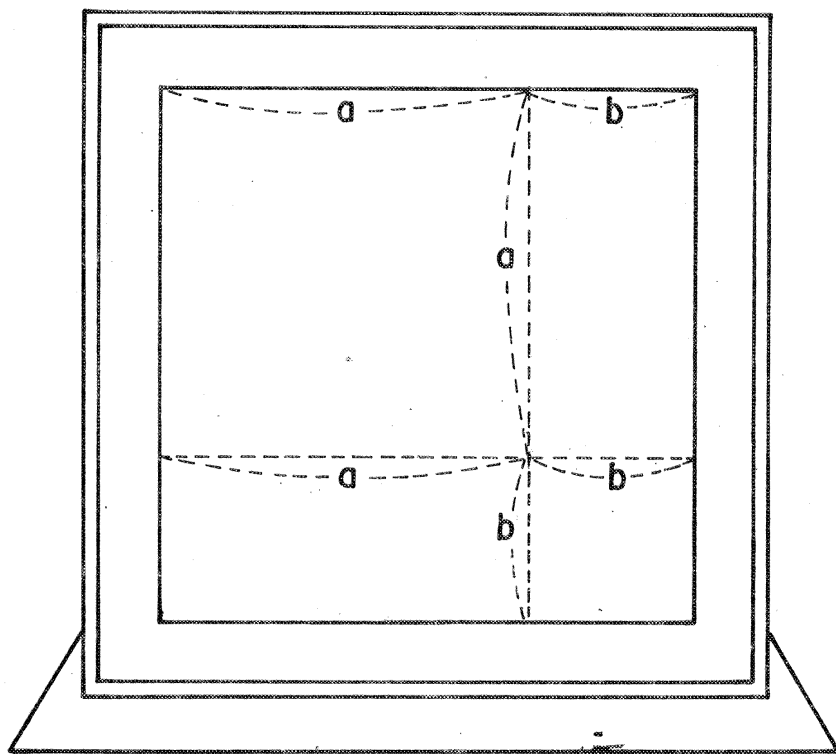
次函數圖形，可先行找出五點，再將圓形小磁鐵置於其上，將色彩鮮艷的絲線穿越其間而得其應得的圓形。如覺得穿越困難，亦可先行穿越完成後，再將圓形小磁鐵置於各點上則可節省很多的時間。此種教具在製作上頗為簡便，却是頗為實用，利用鮮艷的絲線更能增加學習之情境與氣氛，使用後保管上亦甚為簡便。

### 5. 乘法公式說明器：

在國中數學第二冊中有關乘法公式是廣泛地被使用者，但部分同學不容易深入瞭解其原由，導致學習與應用上的困擾，因此我們製作了下列說明器用以說明乘法公式：

#### (1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 部分：

在磁鐵板黏貼如下圖所示之書面紙，此書面紙為保持乾淨與整潔用透明塑膠布包裝之。再用普麗隆裁剪二個正方形其邊長分別是  $a^2$ 、 $b^2$  及二個長方形邊長分別是  $a$ 、 $b$ ，在每塊普麗隆的中央部



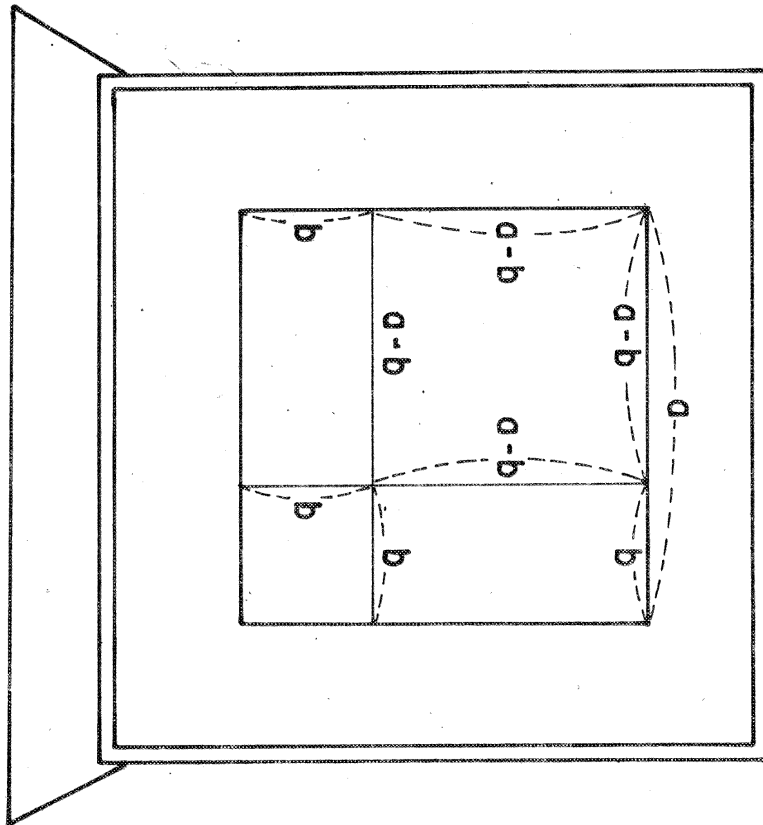
分黏貼圓形小磁鐵，說明時將兩塊正方形  $a^2$ 、 $b^2$  及二塊長方形  $a \times b$ 、 $a \times b$ ，分別置於磁鐵板上而得知：

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

#### (2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 部分：

在磁鐵板黏貼如右圖所示之書面紙，此書面紙為保持乾淨，

用塑膠布加以包裝之，再用普麗隆剪下壹個正方形，邊長分別是  $(a - b)$ ， $(a - b)$ 。及兩個長方形邊長分別是  $a \times b$  等說明操作時將  $(a - b)^2$  一塊及  $(a \times b)$  二塊分別置於其上而得知：

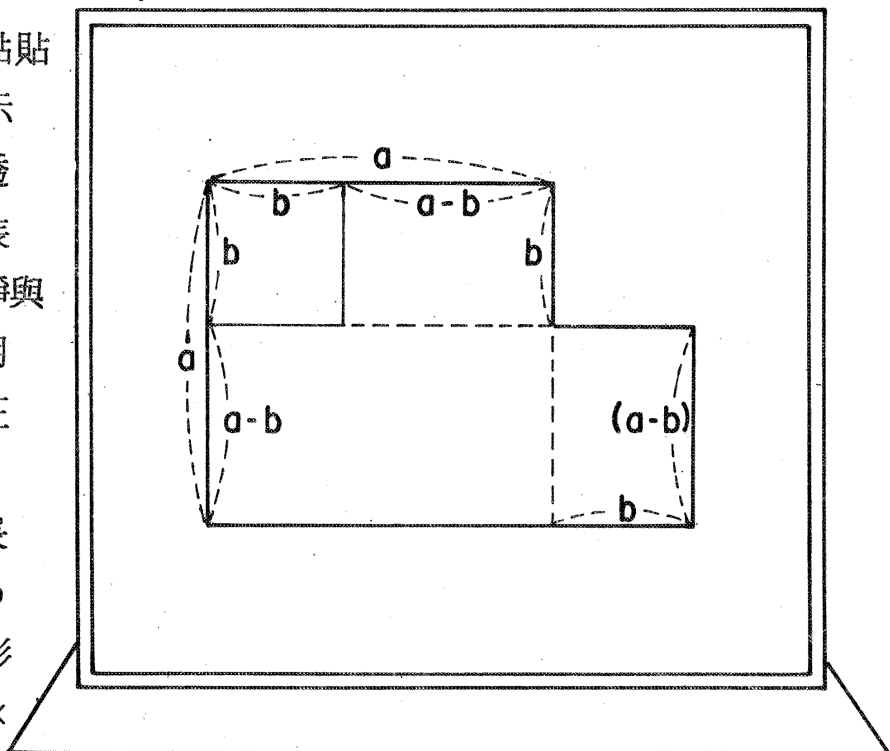


$$(a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$$

$$\text{即 } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(3)  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  部分：

在磁鐵板上黏貼貼如右圖所示的書面紙用透明塑膠布包裝之以保持乾淨與與整潔，再用普麗隆剪下正方形一個  $(b \times b)$ ，長方形  $(a - b) \times b$  長方形  $(a - b) \times$



a 各一個，並用圖形小磁鐵黏置於中央部分，操作時將上列三片置於其上，然後從  $a^2$  中取去  $b^2$  的正方形則剩下  $(a-b) \times b$ ， $(a-b) \times a$  二片長方形，將  $(a-b) \times b$  的那一塊移到右下方，則成  $(a+b)(a-b)$  的長方形。

$$a^2 - b^2 = (a-b) \times a + (a-b) \times b$$

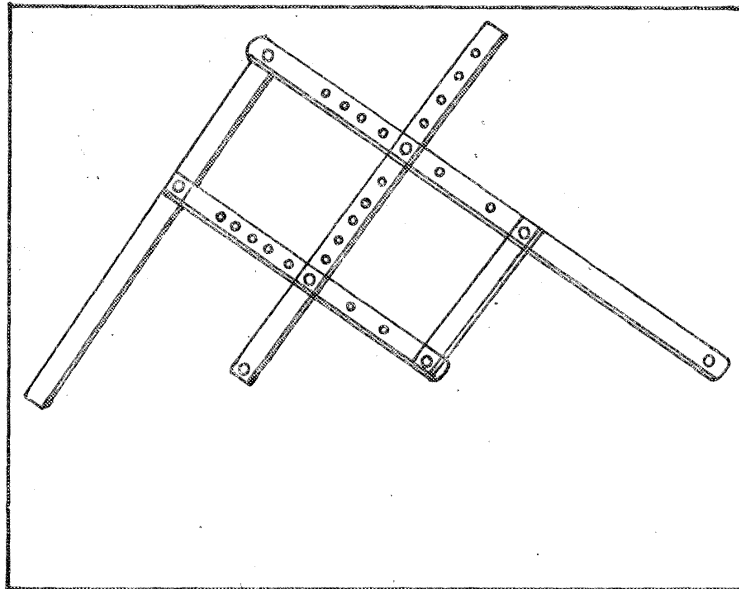
$$= (a-b)(a+b)$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\text{即 } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

#### 6. 教師用相似形放大器：

在國中數學科的教學課程裡，常常需要作出各種相似的圖形，假如利用普通的作圖工具，往往不易盡善盡美的達到預期的目標，於是我們試著用木料做出如下圖所示之放大器供教師教學時使用，期能於教學時發揮最高功能，節省作圖時間。



評語：熱心教具的研究，頗有成果尤其是改良的圓規，甚有實用價值。

。