以連分數驗證農曆萬年曆

國中教師組數學第二名

高雄市旗津國民中學　　　　作　　者：蔡富雄　謝春源　陳宏福

一、前言：

上學期，學校召開了數學科教學研究會時，當時有位老師提出在第一册課本，第 24 頁中，討論到農曆沒有決定大小月的規則，以及每三年就多加一個閏月，但每十九年加七個閏月，其推算的方法很複雜，既然是沒有規則，那天文台所定出的農曆又是憑藉些什麼來制定的呢？基於此種好奇心的驅使，我們就憑著地球公轉一次及月球繞地球一週所需的時間，加上連分數的運用，所推出來的數字，竟與課本所提的數字（三年一閏，十九年七閏）不謀而合，所以就想利用連分數來驗證農曆萬年曆，以下即是我們的研究過程及數據，供大家參考。

二、研究過程及內容：

1 連分數的用法：

若連分數

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots\, a_{K-1}+\cfrac{1}{a_K}}}}$$

以符號〔$a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_K$〕表示，且令

$$[a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_K]=\frac{p_K}{q_K}$$

則 $[a_0]=\frac{a_0}{1}=\frac{p_0}{q_0}\Rightarrow p_0=a_0, q_0=1$

$$[a_0,a_1]=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1}=\frac{p_1}{q_1}$$

$$\Rightarrow p_1=a_0a_1+1,\ q_1=a_1$$

$$[a_0,a_1,a_2]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=\frac{a_2(a_0a_1+1)+a_0}{a_1a_2+1}$$

$$=\frac{p_2}{q_2}$$

$$\Rightarrow p_2=a_2p_1+p_0,\ q_2=a_2q_1+q_0$$

………………………………………………………………………………

利用數學歸納法可得　$p_K=a_Kp_{K-1}+p_{K-2}, k\geq 2$

$q_K=a_Kp_{K-1}+p_{K-2}, k\geq 2$

由上式運算可導出下列公式：

$p_0=a_0$ ， $p_1=a_0a_1+1$

$q_0=1$ ， $q_1=a_1$

$p_K=a_Kp_{K-1}+p_{K-2}$ ， $k\geq 2$

$q_K=a^Kq_{K-1}+q_{K-2}$ ， $k\geq 2$

故得其漸近分數爲 $\frac{p_1}{q_1}$ ， $\frac{p_2}{q_2}$ ， $\frac{p_3}{q_3}$ ，……， $\frac{p_K}{q_K}$

（表 q_K 次內出現 p_K 次.）

2. 根據曆法，太陽經過春分點，循黃道東行一週，再經過春分點，歷 365日 5時 48 分 46 秒，約爲 365．2422 日，即歲實，謂之回歸年（Tropical year ）亦稱太陽年，而以 365 日爲平年，閏年則爲 366 日，若每年以 365 日計算，則一年少算 0.2422 日，四年後少算 0.9688 日，約爲 1 日，故每四年後

增加 1 日，即 366日，是稱閏年，按照四年一次閏年，100 年間務必有 25 次閏年，而實際上，100 年間只有 24 次閏年即 $0.2422 \times 100 = 24.22$ 日 ≈ 24 日，若每百年有 24 次閏年，則 400年有 96 次閏年，比實際少一次，即 $0.2422 \times 400 = 96.88$ 日約 97 日，故需再作調整，今以連分數來驗證如下：

太陽年爲 365 日 5 時 48 分 46 秒

$$= 365 + \frac{5}{24} + \frac{48}{24 \times 60} + \frac{46}{24 \times 60 \times 60}$$

$$\fallingdotseq 365\frac{10463}{43200}\ (\text{日})$$

將分數部份以連分數表示，則　　　　（利用輾轉相除法）

$$\frac{10463}{43200} = \cfrac{1}{4_1 + \cfrac{1}{7_2 + \cfrac{1}{1_3 + \cfrac{1}{3_4 + \cfrac{1}{5_5 + \cfrac{1}{64_6}}}}}}$$

7_2	10463	43200	4_1
	9436	41852	
3_4	1027	1348	1_3
	963	1027	
64_6	64	321	5_5
	64	320	
	0	1	

〔註：足數表得商之次序〕

其中 $a_0 = 0$，$a_1 = 4$，$a_2 = 7$，$a_3 = 1$，$a_4 = 3$，$a_5 = 5$，$a_6 = 64$

利用公式得 $p_0 = 0$，$p_1 = 1$，$p_2 = 7$，$p_3 = 8$，$p_4 = 31$，$p_5 = 163$，$p_6 = 10463$

$q_0 = 1$，$q_1 = 4$，$q_2 = 29$，$q_3 = 33$，$q_4 = 128$，$q_5 = 673$，$q_6 = 43200$

其漸近分數依次爲 $\frac{1}{4}$，$\frac{7}{29}$，$\frac{8}{33}$，$\frac{31}{128}$，$\frac{163}{673}$，$\frac{10463}{43200}$，

按連分數所推得的漸近分數，吾人知正確閏年的位置表，應如下數列，以圈表示閏年。

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，
13，14，15，16，17，18，19，20，21，22，
23，24，25，26，27，28，29，30，31，32，
33，34，35，36，37，38，39，40，41，42，
43，44，45，46，47，48，49，50，51，52，
53，54，55，56，57，58，59，60，61，62，
63，64，65，66，67，68，69，70，71，72，
73，74，75，76，77，78，79，80，81，82，
83，84，85，86，87，88，89，90，91，92，
93，94，95，96，97．98，99，100，101，
102，103，104，105，106，107，108，109，
110，111，112，113，114，115，116，117，
118，119，120，121，122，123，124，125，
126，127，128，129，130，131，132，133，
134，135，136，137，138，139，140，141，
142，143，144，145，146，147，148，149，
150，151，152，153，154，155，156，157，
，158，159，160，161，162，163，164，
165，166，167，168，169，170，171，172，
173，174，175，176，177，178，179，180，

181 , 182 , 183 , 184 , 185 , 186 , 187 , 188 ,
189 , 190 , 191 , 192 , 193 , 194 , 195 , 196 ,
197 , 198 , 199 , 200 , 201 , 202 , 203 , 204 ,
205 , 206 , 207 , 208 , 209 , 210 , 211 , 212 ,
213 , 214 , 215 , 216 , 217 , 218 , 219 , 220 ,
221 , 222 , 223 , 224 , 225 , 226 , 227 , 228,,
229 , 230 , 231 , 232 , 233 , 234 , 235 , 236 ,
237 , 238 , 239 , 240 , 241 , 242 , 243 , 244 ,
245 , 246 , 247 , 248 , 249 , 250 , 251 , 252 ,
253 , 254 , 255 , 256 , 257 , 258 , 259 , 260 ,
261 , 262 , 263 , 264 , 265 , 266 , 267 , 268 ,
269 , 270 , 271 , 272 , 273 , 274 , 275 , 276 ,
277 , 278 , 279 , 280 , 281 , 282 , 283 , 284 ,
285 , 286 , 287 , 288 , 289 , 290 , 291 , 292 ,
293 , 294 , 295 , 296 , 297 , 298 , 299 , 300 ,
301 , 302 , 303 , 304 , 305 , 306 , 307 , 308 ,
309 , 310 , 311 , 312 , 313 , 314 , 315 , 316 ,
317 , 318 , 319 , 320 , 321 , 322 , 323 , 324 ,
325 , 326 , 327 , 328 , 329 , 330 , 331 , 332 ,
333 , 334 , 335 , 336 , 337 , 338 , 339 , 340 ,
341 , 342 , 343 , 344 , 345 , 346 , 347 , 348 ,
349 , 350 , 351 , 352 , 353 , 354 , 355 , 356 ,

357 , 358 , 359 , 360 , 361 , 362 , 363 , 364 ,

365 , 366 , 367 , 368 , 369 , 370 , 371 , 372 ,

373 , 374 , 375 , 376 , 377 , 378 , 379 , 380 ,

381 , 382 , 383 , 384 , 385 , 386 , 387 , 388 ,

389 , 390 , 391 , 392 , 393 , 394 , 395 , 396 ,

397 , 398 , 399 , 400

由於太陽每天在黃道上移動的快慢不同，冬至前後太陽移動快，因而節氣間僅有 14 天之多，而夏至前後，太陽移動慢，所以節氣間達 16 日之多，因此冬至與夏至常因年份不同，而提前一天或挪後一天（通常冬至在 12 月 22 日或 23 日，夏至在六月 21 日或 22 日），由上表即可知曉。

3. 據悉，月球運行的軌道，叫做白道，白道與黃道同爲天球上兩大圓，且以 5 度 9 分而斜交，而月球每日行 13 度 15 分，故月球自合朔，全繞地球一週，復至合朔，即朔實；需時 29.5309 日（合29日 12 時 44 分 30 秒）謂之合朔月（Synodic month）或太陰月，而陰曆每月以大月 30 日，小月 29 日計之，若每月以 29 日計算，則每月少算 0.5309日顯得太少；又以 30日爲1個月時，則太多，因此大、小月的安排實在沒有規則，然而吾人以連分數之理論來找出其線索：先將 29.5309 日化成分數如下：

$$29.5309 = 29\ \frac{5309}{10000}$$

其分數部份 $\dfrac{5309}{10000}$ 以連分數表示　　（利用輾轉相除法）

$$\frac{5309}{10000}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4}}}}}}}}}}$$

1_2	5309	10000	1_1
	4691	5309	
1_4	618	4691	7_3
	365	4326	
2_6	253	365	1_5
	224	253	
1_8	29	112	3_7
	25	87	
4_{10}	4	25	6_9
	4	24	
	0	1	

其中 $a_0=0$ ，$a_1=1$ ，$a_2=1$ ，$a_3=7$ ，

$a_4=1$ ，$a_5=1$ ，$a_6=2$ ，$a_7=3$ ，$a_8=1$ ，

$a_9=6$ ，$a_{10}=4$

利用公式得：

$p_0=0$ ，$p_1=1$ ，$p_2=1$ ，$p_3=8$ ，$p_4=9$ ，$p_5=17$，

$p_6=43$ ，$p_7=146$ ，$p_8=189$ ，$p_9=1280$ ，

$p_{10}=5309$

$q_0=1$ ，$q_1=1$ ，$q_2=2$ ，$q_3=15$ ，$q_4=17$ ，

$q_5=32$ ，$q_6=81$ ，$q_7=275$ ，$q_8=356$ ，

$q_9=2411$ ，$q_{10}=10000$

則其漸近分數為 $\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{8}{15}$，$\dfrac{9}{17}$，$\dfrac{17}{32}$，$\dfrac{43}{81}$，$\dfrac{146}{275}$，

$\dfrac{189}{356}$，$\dfrac{1280}{2411}$，$\dfrac{5309}{10000}$

按連分數所推出漸近分數，可知農曆大小月排列整齊，起初是六個大月，六個小月，間隔整齊，而後則為七個大月，五個小月，因此將其大小月排列如下：大月以圈表示：

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 ,

13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18 , 19 , 20 , 21 , 22 ,

23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 ,

33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 ,

43 , 44 , 45 , 46 , 47 , 48 , 49 , 50 , 51 , 52 ,

53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 61 , 62 ,

63 , 64 , 65 , 66 , 67 , 68 , 69 , 70 , 71 , 72 ,

73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 82 ,

83 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

93 , 94 , 95 , 96 , 97 , 98 , 99 , 100

……………………………………………………………………

以上月數應為 940個月，恰好一週期，故只寫出這些月數以驗證月數排列之規則，其他請參考萬年曆表，由於數據甚多，在此只列出 100個月。

太陰月依合朔定月，與節候無關，農曆以十二太陰月為一年，十二個太陰月之日數是 354 日或 355 日，每年較太陽年之歲實約短 11 日，故經過若干年後須置閏月，以調整節候，閏年一年則含十三個月。

4. 農曆閏年的決定是由於月球繞地球一週需時 29.5309 日，而地球繞著太陽一週需時 365.2422 天，因此 $365.2422 \div 29.5309 = 12.368136 \approx 12.37$ ，即每一太陽年實際有 12.37 個太陰月，而以 12 個月年為一年，每年少算 0.37 個月，將其累積成閏月，吾人將 0.37 展開成連分數：

$$\frac{37}{100}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}}$$

（利用輾轉相除法得：）

1_2	37	100	2_1
	26	74	
2_4	11	26	2_3
	8	22	
3_6	3	4	1_5
	3	3	
	0	1	

其中，$a_0=0$，$a_1=2$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=2$，

$a_5=1$，$a_6=3$

利用公式得：

$p_0=0$，$p_1=1$，$p_2=1$，$p_3=3$，$p_4=7$，

$p_5=10$，$p_6=37$

$q_0=1$，$q_1=2$，$q_2=3$，$q_3=8$，$q_4=19$，

$q_5=27$，$q_6=100$

則其漸近分數為 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{7}{19}$，$\frac{10}{27}$，$\frac{37}{100}$

按連分數之漸近分數的規則，農曆有閏月之年可安排如下：以圈表示。

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，

13，14，15，16，17，18，19，20，21，22，

23，24，25，26，27，28，29，30，31，32，

33，34，35，36，37，38，39，40，41，42，

43，44，45，46，47，48，49，50，51，52，

53，54，55，56，57，58，59，60，61，62，

63 , 64 , 65 , 66 , 67 , 68 , 69 , 70 , 71 , 72 ,

73 , 74 , 75 , 76

(1)由上表可看出每隔 2 年或 3 年有一次閏月。

(2)因每 19 年有七個閏月，故每 19年分一段，按數 2 , 3 , 3 , 2 , 3 , 3 , 3 , 重複排列，即可求出有閏月之年。

5. 農曆已可知有閏月之年，那麼接著再來推出閏月應在那一月份，蓋一年之月數既爲 12.368136 ，而冬至前已有餘數 0.631864 ，則到下次冬至之前必已積到一數朔實以上，故須置閏月，以前一個月之次序爲月序，稱爲閏幾月，而一年以整數 12 個月計之，故每年少算 0.368136 月，則每月少算

$0.368136 \div 12 = 0.030678$ (月)

$$0.030678 = \frac{30678}{1000000} = \frac{15339}{500000}$$

$$\frac{15339}{500000} = \cfrac{1}{32 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}}}}}}$$

1_2	15339	500000	32_1
	9152	490848	
2_4	6187	9152	1_3
	5930	6187	
1_6	257	2965	11_5
	138	2827	
6_8	119	138	1_7
	114	119	
1_{10}	5	19	3_9
	4	15	
	1	4	4_{11}
		4	
		0	

其中 $a_0 = 0$, $a_1 = 32$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 11$, $a_6 = 1$, $a_7 = 1$, $a_8 = 6$, $a_9 = 3$, $a_{10} = 1$, $a_{11} = 4$

利用公式得：

$p_0=0$，$p_1=1$，$p_2=1$，$p_3=2$，$p_4=5$，$p_5=57$，

$p_6=62$，$p_7=119$，$p_8=776$，$p_9=2447$，$p_{10}=3223$，

$p_{11}=15339$

$q_1=1$，$q_1=32$，$q_2=33$，$q_3=65$，$q_4=163$,，

$q_5=1858$，$q_6=2021$，$q_7=3879$，$q_8=25295$，

$q_9=79764$，$q_{10}=105059$，$q_{11}=500000$

則其漸近分數爲 $\frac{1}{32}$，$\frac{1}{33}$，$\frac{2}{65}$，$\frac{1}{163}$，$\frac{57}{1858}$，$\frac{62}{2021}$，

$\frac{119}{3879}$，$\frac{776}{25295}$，$\frac{2447}{79764}$，$\frac{3223}{105059}$，$\frac{15339}{500000}$

吾人將第幾月爲閏月，列表如下，且以圈表示：

1，2，3，…，33，34，35，36，…，67，68，69，70，……

101，102，103，104，………，135，136，137，138，……，

168，169，170，171，………，201，202，203，204，……，

235，236，237，238，………，269，270，271，272，……，

302，303，304，305，………，335，336，337，338，……，

369，370，371，372，………，403，404，405，406，……，

436，437，438，439，………，469，470，471，472，……，

504，505，506，507，………，538，539，540，541，……，

571，572，573，774，………，604，605，606，607，……，

638，639，640，641，………，672，673，674，675，……，

705，706，707，708，………，738，739，740，741，……，

772，773，774，775，………，806，807，808，809，……，

839，840，841，842，………，872，873，874，875，……，

906 , 907 , 908 , 909 , ……, 940

以上所列數據，其閏月之位置，似乎與連分數之漸近分數有些微誤差，其最大原因乃吾人所用之數據是 0.030678，其小數部份取到小數點後第6位，第7位即捨去，因此就產生了誤差，例如：漸近分數 $\frac{1}{32}$，$\frac{1}{33}$，$\frac{2}{65}$，即可看出，為了補救此誤差，吾人乃「以一年之月數 12.368136 ，若冬至前已有餘數在 0.631864 以上」則到下次冬至之前必有一閏月，如此累積之數據，即可糾正此項缺失。

6. 節氣是將太陽年 365.2422 天平均分成 24 氣，即依太陽在黃道上位置分為12 個節月，即十二個太陽月每一節月又分兩氣，在節月之初點叫做節氣，在節月之中點，稱為中氣，而十二個月分成春、夏、秋、冬四季，在季節的初點有立春、立夏、立秋、立冬，季節的中點有春分、夏至、秋分、冬至，而節氣間之日數多少不齊，但據曆法，春分及秋分一定要在晝、夜平分的那一天，而 24 節之順序，據悉歷代略有不同，當然，若能以連分數製作的萬年曆，在理論上而言應該是最正確而標準的一種萬年曆。

一年有24 節氣，而太陽年為 365.2422 天，故知每節氣間隔 15.218425天，若兩節氣間日數以 15 日計之，太少，而以 16 日計之，太多，應該如何處理，且看下列把 0.218425 化成連分數

$0.218425=$

$$\frac{8737}{40000}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{59}}}}}}}}}$$

1_2	8737	40000	4_1
	5052	34948	
2_4	3685	5052	1_3
	2734	3685	
2_6	951	1367	1_5
	832	951	
2_8	119	416	3_7
	118	357	
	1	59	59_9
		59	
		0	

其中 $a_0=0$，$a_1=4$，$a_2=1$，$a_3=1$，$a_4=2$，$a_5=1$，

$a_6=2$，$a_7=3$，$a_8=2$，$a_9=59$

利用公式得：

$p_0=0$，$p_1=1$，$p_2=1$，$p_3=2$，$p_4=5$，$p_5=7$，

$p_6=19$，$p_7=64$，$p_8=147$，$p_9=8737$

$q_0=1$，$q_1=4$，$q_2=5$，$q_3=9$，$q_4=23$，$q_5=32$，

$q_6=87$，$q_7=293$，$q_8=673$，$q_9=40000$

則其漸近分數爲 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{5}{23}$，$\frac{7}{32}$，$\frac{19}{87}$，$\frac{64}{293}$，

$\frac{8737}{40000}$

因節氣是以太陽年 365.2422 日分成24 氣，而太陽年每四年有一次閏年，即該年多一天，是366日，所以吾人可知節氣經過四年後，有一週期，今以圈表示兩節氣間隔爲 16 日之節氣，冬至爲歲首，故以1表冬至，24 表大雪，而冬至通常有 14 日之多，是隨著閏年或平年而調整。

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，

第一年　12，13，14，15，16，17，18，19，20，

21，22，23，24

　　　　25，26，27，28，29，30，31，32，33，
第二年　34，35，36，37，38，39，40，41，42，
　　　　43，44，45，46，47，48，
　　　　49，50，51，52，53，54，55，56，57，
第三年　58，59，60，61，62，63，64，65，66，
　　　　67，68，69，70，71，72
　　　　73，74，75，76，77，78，79，80，81，
第四年　82，83，84，85，86，87，88，89，90，
　　　　91，92，93，94，95，96

由以上數據及連分數之漸近分數，吾人可把其規則性列出如下：4，5，4，5，4，5，5 爲一週期

即表每間隔 4，5，4，5，4，5，5 之節氣有 16 天之多。

7.造萬年曆表：

表中：(1)一章，即太陰年 19 年。

(2)第○次閏年，即太陽年每幾年有○次閏年之意。

(3)第○年，即太陽年之年數。

(4)第一列表節序，其中奇數表中氣，偶數表節氣。

第二列表節氣名稱，多至乃歲元，故排第一位。

第三列表節氣間隔之數據，及太陽年累積日數。

第四列表月數（因 76 年共 940月，即可爲一週期）

第五列表月序，即農曆所使用「寅正無中閏法」之月序，按春、夏、秋、多四季，以立春爲正月順序而下，凡無中氣之月爲閏月。

第六列表太陰月間隔之數據，及太陰年累積日數，可看出大小月及閏月之月所在，可與節氣數據比較之。

第七列表太陰月大小月。

(5)表中之造法，乃根據(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)，中所述之數據而造成的，其數據累積之數目，請參閱萬年曆表。

三、結語：

1. 根據國中數學第一册所述，太陰年有354.3708日（即$29.5309 \times 12 = 354.3708$（日）），而太陽年有365.2422日，因此每年兩者相差10.8714日，每二年或三年，太陰年即有一次閏年，即該年有閏月，經過19年後，即相差$19 \times 10.8714 = 206.5566$（日）（約加七個月），又太陽年每四年有一次閏年，因為

$$29.5309 \times 235\,（月）= 6939.7615$$

$$365.2422 \times 19\,（年）= 6939.6018$$

兩者數據甚為接近，其誤差甚微，可略而不計，此時氣朔可以相齊，古人把19年稱為一「章」。

2. 每一太陽年含有12.37個月（約$12\frac{7}{19}$月）及太陽年數365.2422（約$365\frac{1}{4}$），兩者分母之最小公倍數，$4 \times 19 = 76$年，此時氣朔日三者相齊，古人把76年稱為「蔀」。

3. 又將76年$\times 20 = 1520$年（$1520 = 2^4 \times 5 \times 19$），而氣朔日與日名，甲子恰一週期，古人將其稱為「紀」。

4. 又將1520年$\times 3 = 4560$（$4560 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 19$），而太歲所值或歲星所在12次（週期），以及歲陽、歲陰60名或60干支（即天干、地支60週期）均可一復，古人稱為「元」。

5. 綜合所述，列表如下：

一章：19年，歲、月、齊同。

一蔀：76年，歲、月、日齊同。

一紀：1520年，歲、月、日、甲子回復。

一元：4560年，歲、月、日名，歲名回復。

6. (1)由(6)知節氣間隔爲 15.218425 日，但現行曆法，是以 $365\frac{1}{4} \div 24 = 15.21875$ 日，故兩相比較，每一節氣約少 0.00035，而 76 年共有 1824 個節氣，則其累積最大誤差爲 $0.00035 \times 1824 = 0.6384$，在第 76 年最後一節氣數據爲 $27743.1432 + 15.2184 = 27758.3616$，若再加上 0.6384，則等於 27759 即可一復。

(2)太陰月爲 29.5309 日爲累積數據，若小數部份大於 0.4691 則此月份必爲大月，否則爲小月，根據課本第一册例題太陰月，每月爲 29 日 12 時 44 分 30 秒，約等於 $29\frac{499}{940}$ 日，而 $29\frac{499}{940} = 29.530851$，則其誤差每月爲 0.000049，月數越大則其累積誤差越大，故其最大誤差絕不超過 0.04606，在第 940 月爲 $27729.5159 + 29.5309 = 27759.046$，因此再減去 0.04606，其數據接近 27759，故月序回復，且與節氣數據相同。

評語：利用連分數的概念解說，農曆曆法爲作者年來潛心研究的成果，研究精神以及把數學應用在日常生活的事物上，值得鼓勵。