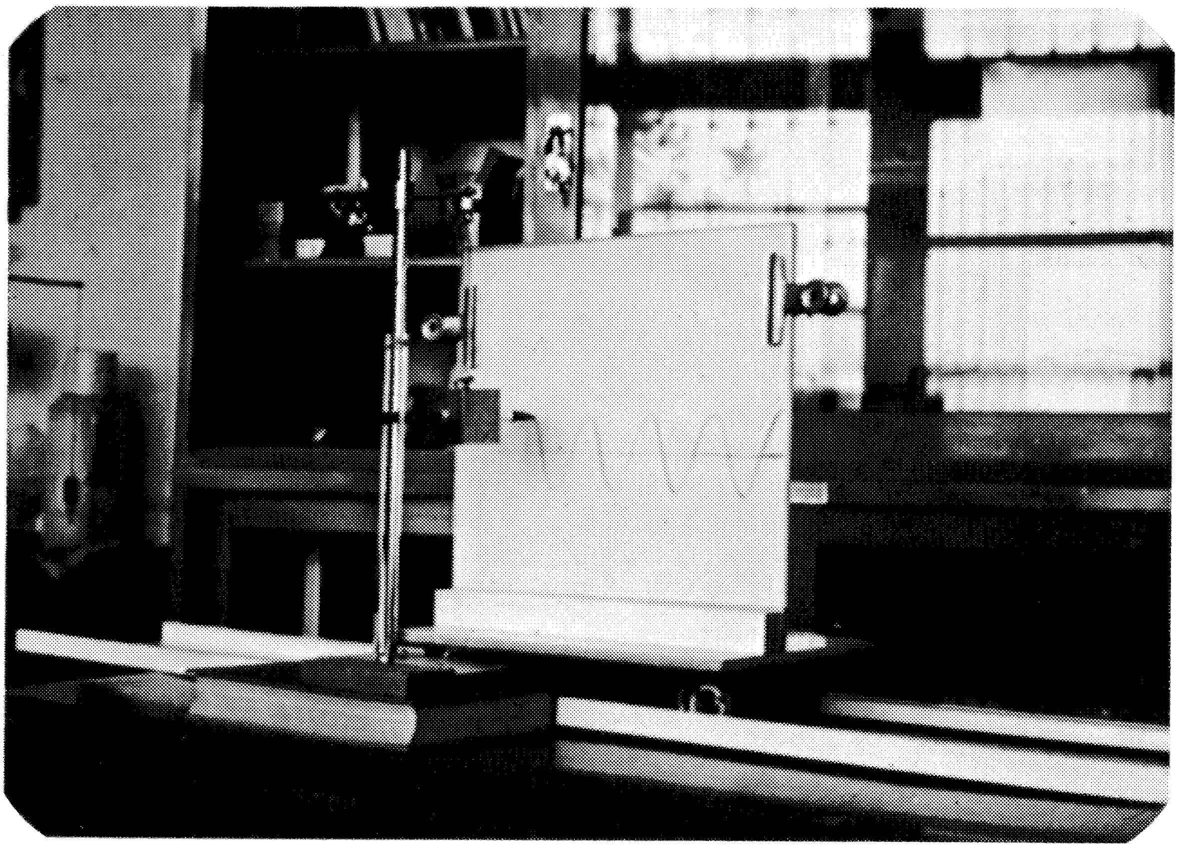
振盪體"彈簧和單擺"性質的研究與應用
國中教師組物理第三名

台北縣五股國民中學　　　　　　　　作　　者：洪鈴雄



一、研究目的：

1. 剖析彈簧和單擺的性質使實驗結果更準確。
2. 探討利用彈簧和單擺的諧振及非諧振算式測量重力加速度值並比較其結果。
3. 自製教具利用彈簧振子和單擺的振動來解釋簡諧運動的觀念並且證明單擺和彈簧的振動都是屬於弦波（正弦或餘弦波）。

二、研究項目：

1. 對於彈簧重量因素$\frac{1}{a}$因子的探討。

2. 關於彈簧彈力常數的範圍，下限與上限。

3. 彈簧振盪週期的測量方法。

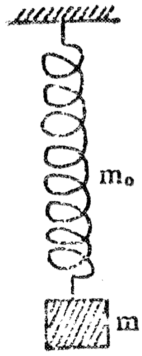
4. 應用彈簧測量重力加速度的方法。

5. 以單擺的諧振和非諧振算式測量重力加速度值的比較——單擺的諧振條件。

6. 自製教具說明單擺與彈簧的振盪通性、弦波。

三、研究內容：

1. 對於彈簧重量因素$\frac{1}{a}$因子的探討：



圖一

對於彈簧性質常用的兩個公式：

$$f=-k\cdot\triangle x=M\cdot a \text{ 與 } T=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}，$$

通常都假設彈簧的質量（m_0）爲零，但是在某些要求較嚴格的情況下必須把彈簧的重量因素考慮進去，又因爲$M\fallingdotseq m+m_0$ 故設M

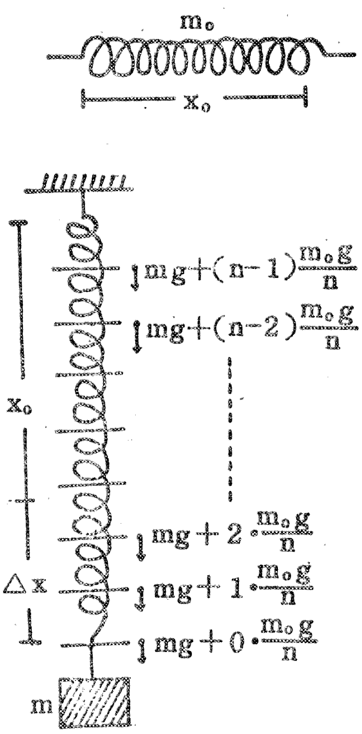
$$M=m+\frac{1}{a}m_0 \text{ 或 } Mg=mg+\frac{1}{a}m_0 g \text{ 底下}$$

是探討$\frac{1}{a}$值的方法：

(1)設整個彈簧掛上m時其彈力常數爲 k 。

(2)若將彈簧細分成 n 小段則每一小段彈簧的力常數 k_n 爲 nk，重量爲$m_0 g/n$ 。

(3)各小段彈簧的受力大小與長度增加量$\triangle x_i$ 的關係如下：



圖二

$$mg+(n-1)\frac{m_o g}{n}=nk\cdot\triangle x_1 \cdots\cdots(1)$$

$$mg+(n-3)\frac{m_o g}{n}=nk\cdot\triangle x_2 \cdots\cdots(2)$$

$$mg+(n-3)\frac{m_o g}{n}=nk\cdot\triangle x_3 \cdots\cdots(3)$$

$$\vdots$$

$$mg+2\cdot\frac{m_o g}{n}=nk\cdot\triangle x_{n-2} \cdots\cdots(n-2)$$

$$mg+1\cdot\frac{m_o g}{n}=nk\cdot\triangle x_{n-1} \cdots\cdots(n-1)$$

$$mg+0\cdot\frac{m_o g}{n}=nk\cdot\triangle x_n \cdots\cdots\cdots(n)$$

(4)將以上 n 個式子相加得：

$$n\cdot mg+[1+2+\cdots+(n-1)]\frac{m_o g}{n}$$

$$=nk(\triangle x_1+\triangle x_2+\cdots+\triangle x_{n-1}+\triangle x_n)$$

$$=nk\cdot\triangle x$$

或

$$mg+[1+2+\cdots+(n-1)]\frac{m_o g}{n^2}=k\cdot\triangle x$$

(5)故$\frac{1}{a}=[1+2+\cdots+(n-1)]/n^2$

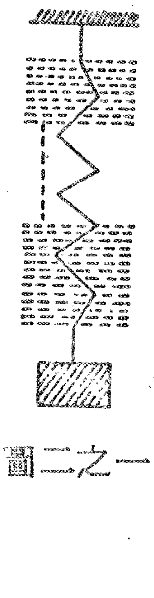
$$=(n-1)[2\times1+(n-2)\times1]/2n^2$$

$$=(n-1)(n)/2n^2$$

$$=\frac{n-1}{2n}=\frac{1-\frac{1}{n}}{2}$$

(6)設 $n=200$ 則$\frac{1}{a}=(1-\frac{1}{200})/2=\frac{199}{400}\cong\frac{1}{2}$

(7)設 $n\to\infty$，則$\frac{1}{a}=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$如右圖



圖二之一

(8)故取一般實驗用彈簧的$\frac{1}{a}$因子為$\frac{1}{2}$。

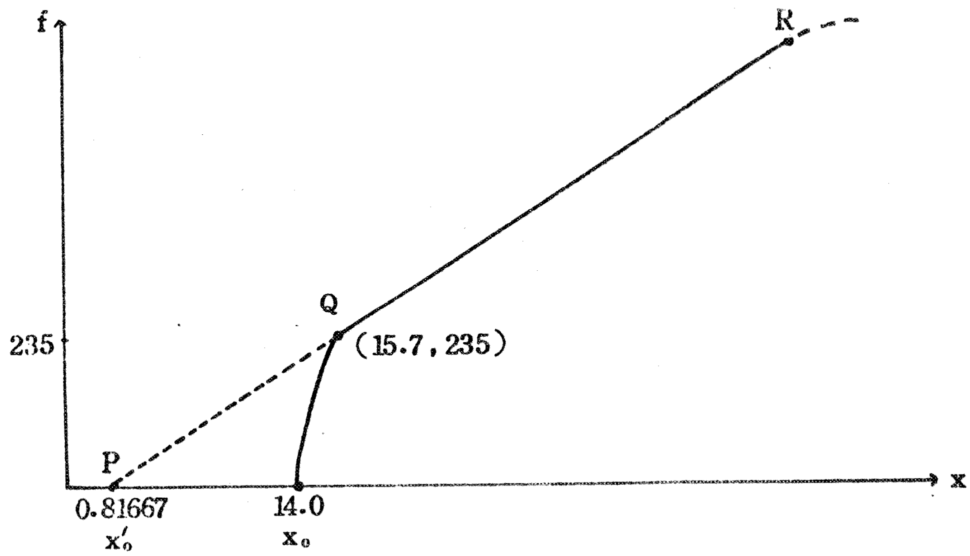
2. 彈簧的應力與長度及長度增量的關係——彈力常數的範圍“下限與上限”。

一般實驗用彈簧的受力(f)與長度(x)的關係，大致有如下數種情形：

(1)第一種彈簧其受力 f（$=mg+\frac{1}{2}m_og$）與長度 x 的關係如表㈠㈡㈢與曲線圖㈢㈣㈤：

彈簧質量 m_o(g)	10.0										
彈簧原長 x_o(cm)	14.0										
受力 f ($m+\frac{1}{2}m_o$)(gw)	0	5	145	175	205	235	265	295	325	355	385
受力後全長 x(cm)	14.0	14.0	14.15	14.2	14.4	15.7	17.6	19.5	21.4	23.3	25.2
相鄰兩受力間增長		0	0.15	0.05	0.2	1.3	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9

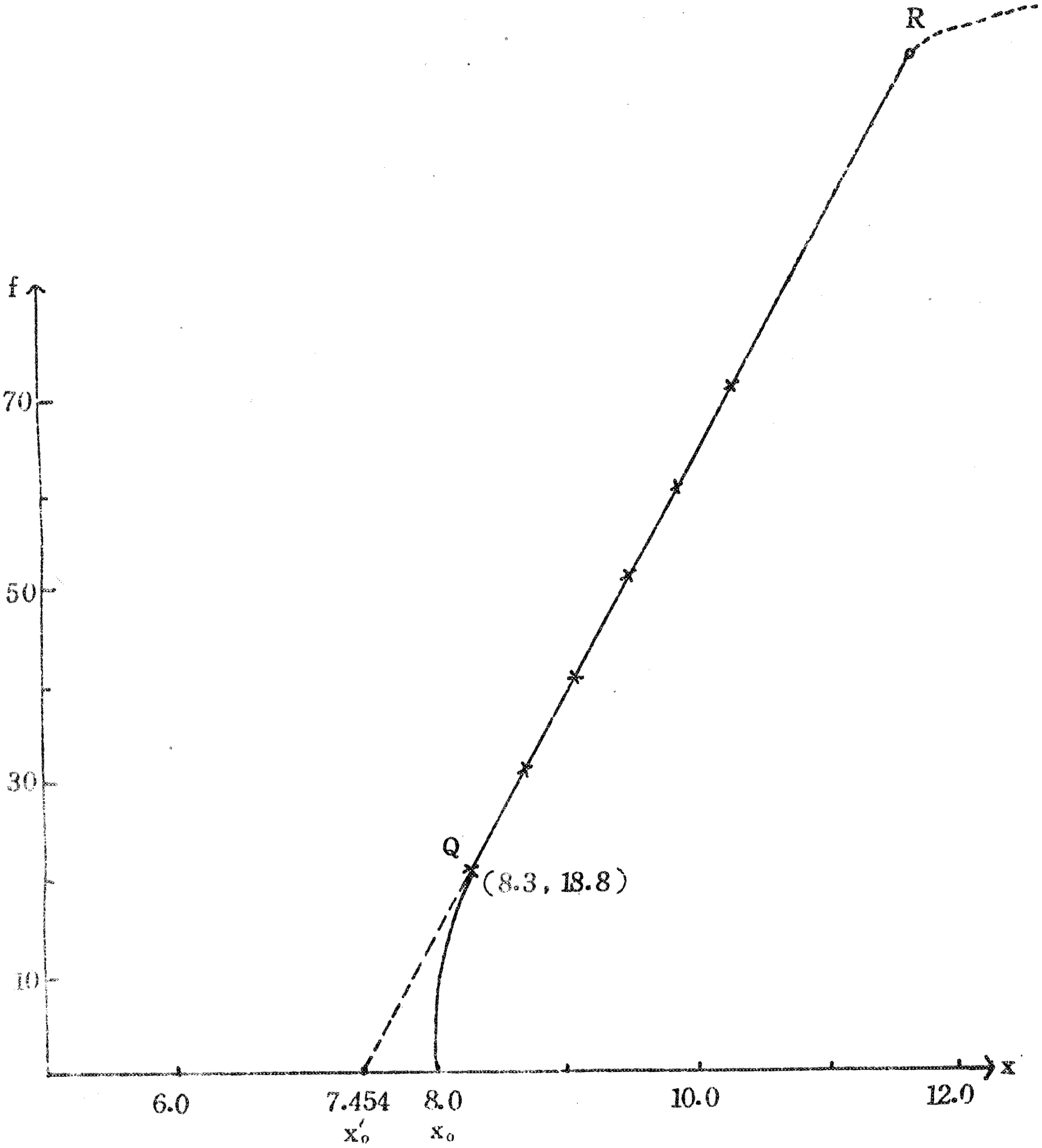
表《一》



圖三

m_o (g)	5.6								
x_o (cm)	8.0								
$f(m+\frac{1}{2}m_o)$(gw)	0	2.8	8.8	18.8	28.8	38.8	48.8	58.8	98.8
x	8.0	8.0	8.0	8.3	8.75	9.2	9.65	10.10	11.9
$x_i - x_{i-1}$		0	0	0.3	0.45	0.45	0.45	0.45	$\frac{0.45}{10g}$

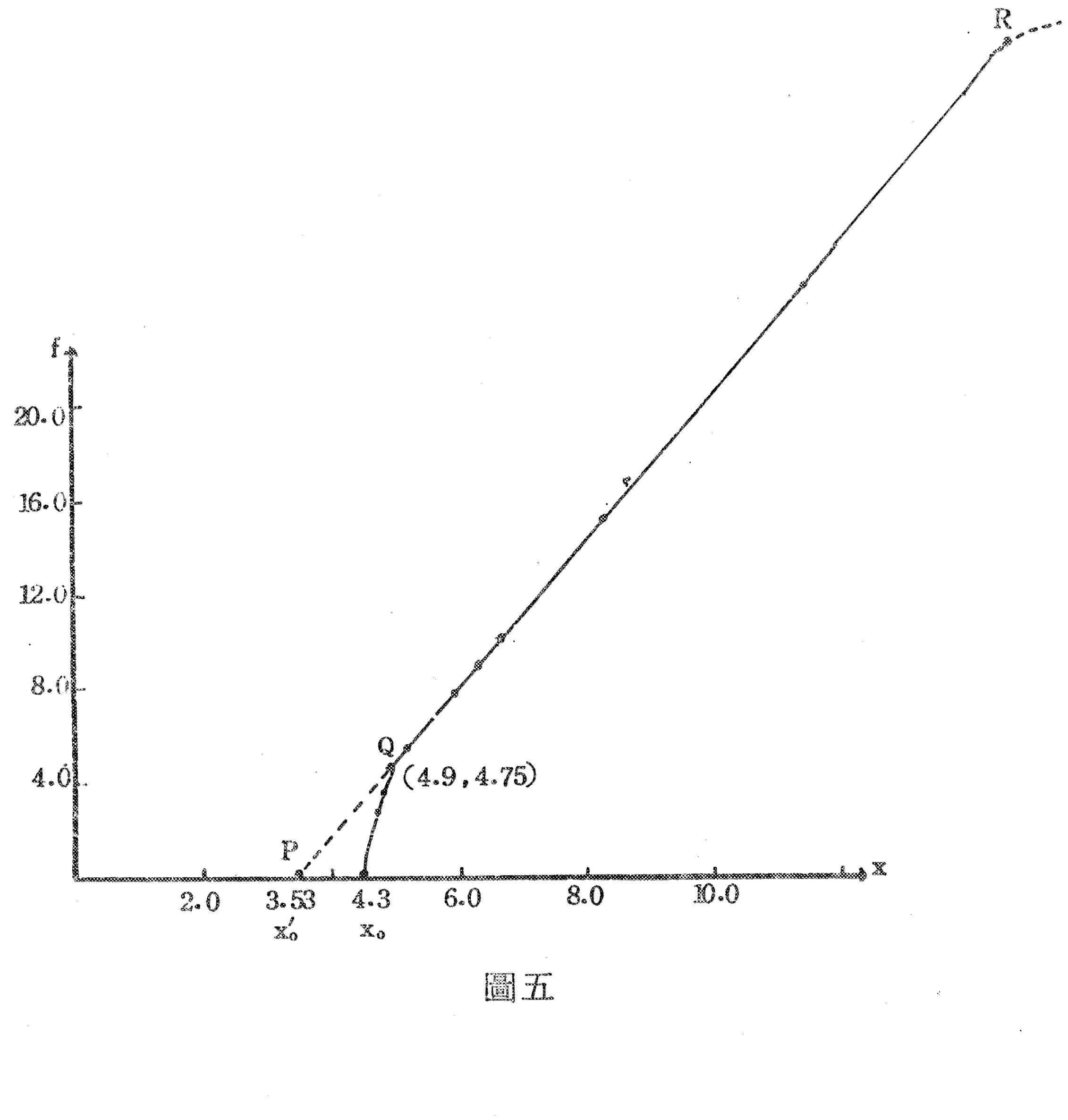
表《二》



圖四

$m_o(g)$	1.5											
$x_o(cm)$	4.3											
$f(m+\frac{1}{2}m_o)(gw)$	0	0.75	2.75	3.75	4.75	5.75	6.75	7.75	875	9.75	14.75	21.75
$x(cm)$	4.3	4.3	4.4	4.6	4.9	5.25	5.6	5.9	6.25	6.6	8.3	11.7
$x_i - x_{i-1}$	0	0	0.1	0.2	0.3	0.35	0.35	0.3	0.35	0.35	$\frac{1.7}{5g}$	$\frac{3.4}{10g}$

表《三》

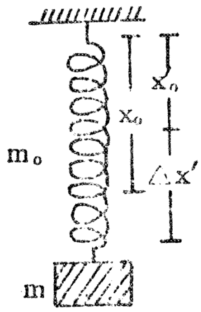


圖五

由曲線圖㈢㈣㈤顯示，從 x_0 點到Q點彈簧的彈力係數很大，並且是隨 x 逐漸減小。從Q點到R點彈力係數固定不變，是個常數，因此我們把Q點叫做彈力常數範圍的下限，把R點叫做上限。由於近距離應力（ $x_0 \rightarrow Q$ ）的作用，使得彈簧的 f － x 曲線QR段的後退延伸線到達 x'_0 ，（ f ＝ 0 ）的位置 故在虎克定律彈性限度上下限內彈簧的總應力爲 $f = -k(x - x'_0)$

$$= -k \cdot \triangle x'$$

這表示：在力常數爲 k 的情形下，外力的作用，相當於把彈簧拉長了 $\triangle x'$ 的距離，故這種彈簧的 x'_0 要受到特別的考慮！如左圖：

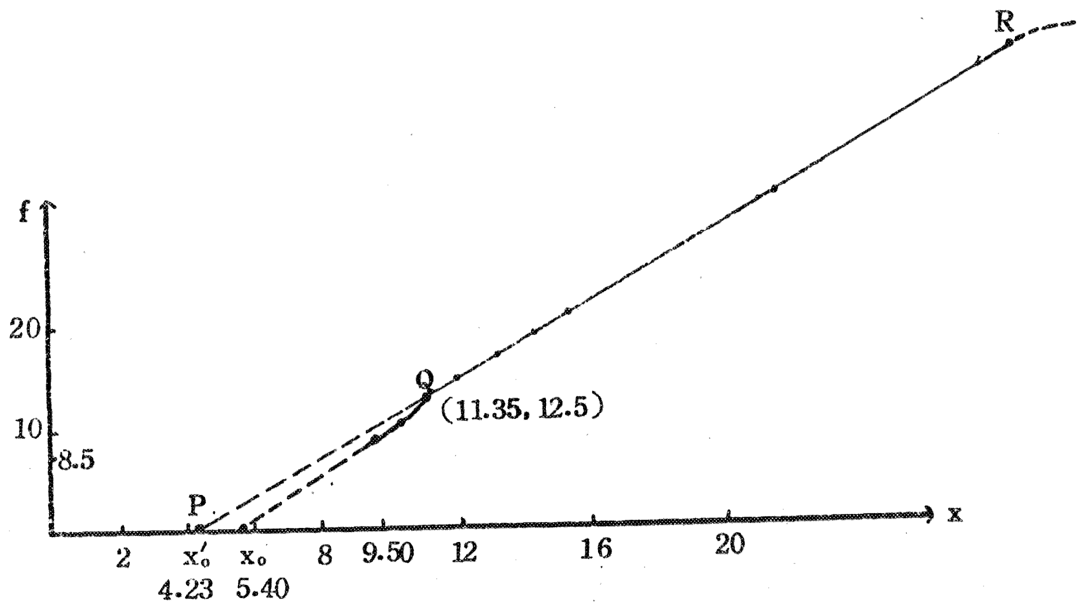


圖五之一

(2)第二種彈簧的應力（ f ）與長度（ x ）的關係如下表與圖：

m_0 (g)	17.0								
x_0 (cm)	5.40								
f (g)	0	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5	20.5	30.5
x (cm)	5.40	9.50	10.35	11.35	12.4	13.55	14.65	15.75	21.25
$x_i - x_{i-1}$		4.10	0.85	1.0	1.05	1.15	1.10	1.10	5.50/10g

表《四》



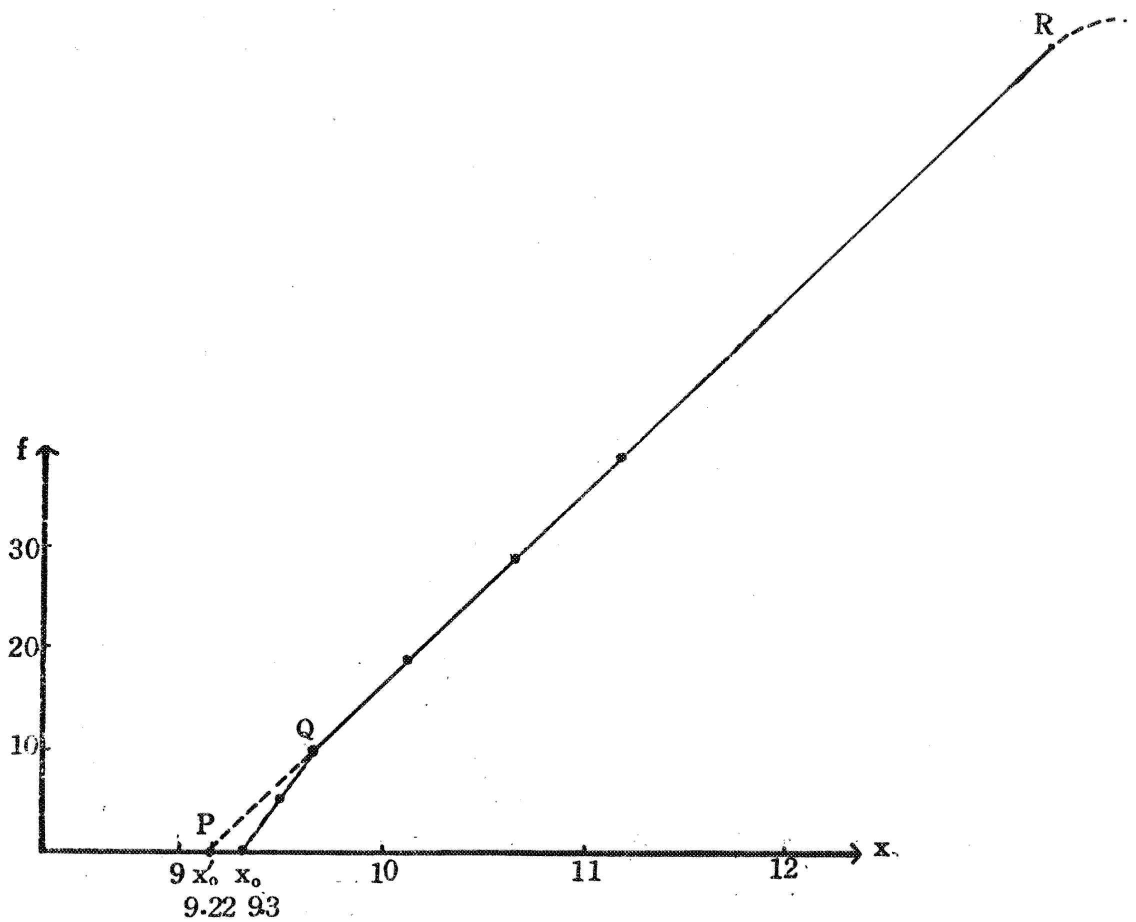
圖六

這種彈簧的彈力係數（ f ／△x ）很小，$\frac{1}{2}m_o$ 的作用很顯著，雖然近距離應力的作用很強，但大部分屬於$\frac{1}{2}m_o g$ 的應力，故這種彈簧的$\frac{1}{2}m_o$及x'_o 都要受到考慮。

(3)第三種彈簧的 f 與 x 關係如下表與圖：

m_o(g)	7.2								
x_o (*cm*)	9.3								
f (g)	0	3.6	8.6	18.6	28.6	38.6	48.6	58.6	68.6
x (*cm*)	9.3	9.45	9.60	10.10	10.65	11.15	11.65	12.15	12.65
$x_i - x_{i-1}$	0.15	0.15	0.50	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50

表《五》



圖七

x_o 與 x'_o 只相差 0.08 *cm*，接近商業用彈簧秤的要求。

(4) CNS，"同"標記彈簧秤的 f 與 x 關係如下表：

m_o (g)	36								
x_o (*cm*)	10.0								
f ($m+\frac{1}{2}m_o$)	0	18	118	218	318	418	518	618	718
x (*cm*)	10.0	10.0	10.3	10.6	10.9	11.15	11.45	11.70	12.0
$x_i - x_i - 1$		0	0.3	0.3	0.3	0.25	0.3	0.25	0.3
x'_o (*cm*)	9.9551								
$x_o - x'_o$ (*cm*)	0.0449								

表《六》

x_o 與 x'_o 只相差 0.0449 *cm*（ 0.5 *mm* 以下 ）佔全長的0.5 %以下。

(5)學生實驗用彈簧稱的 f 與 x 關係如下表：

m_o (g)	0.833								
x_o (*cm*)	1.60								
f $(m + \frac{1}{2} m_o)$	0	$\frac{1}{2} m_o$	3.8	13.8	23.8	33.8	43.8	53.8	153.8
x (*cm*)	1.60	1.60	1.60	1.75	2.15	2.55	3.0	3.4	7.7
$x_i - x_{i-1}$		0	0	0.15	0.40	0.40	0.45	0.40	0.43 × 10
x'_o	1.0909								
$x_o - x'_o$	0.5091								

表《七》

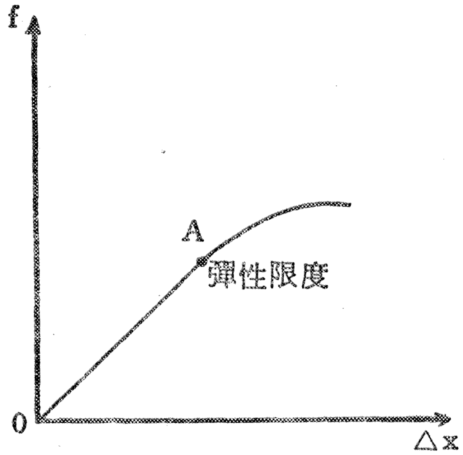
x_o 與 x'_o 相差 0.5091 *cm*，佔全長的 31.82%，故這種彈簧稱的刻度誤差太大（如附件所示），不適於商業用。

(6)討論：

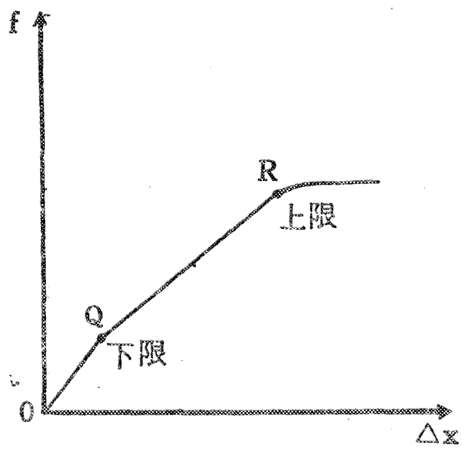
a. 各種彈簧因爲材料性質或捲繞技術的不同，其 f (x)特性曲線亦有差異。故對於任何實驗用彈簧在使用前必須先瞭解其 f (x)特性曲線以決定該彈簧彈力常數上下限的範圍及 x'_o 的位置。

b. 國中物理第一册圖 5 － 9 彈簧的 f －△x 曲線的描繪只是一特殊彈簧（標準彈簧）的曲線，與一般實驗用彈簧 f －△x 曲線略有差別：

c. 一般實驗用彈簧稱的刻度間隔與彈簧稱的 f －△x 曲線不符，稱量的誤差很大，影響相關實驗的結果。補救的辦法是按該彈簧的 f －△x 曲線或以標準砝碼做爲修正，重新刻劃正確的刻度間隔。



國中物理圖 5—9



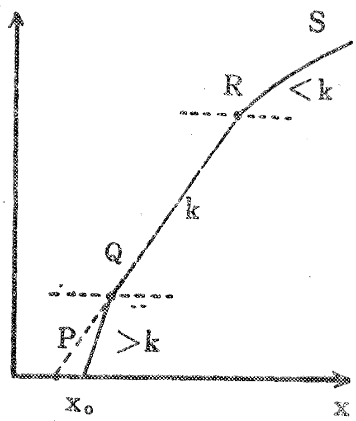
一般彈簧成品的 f—△x曲線

圖八

3. 彈簧與振子在重力場中諧振週期的測量方法：

(1)方法：使彈簧的振子(m)在重力場中做輕度上下振動，則其振動週期為：

$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ 式中的k是f(x)曲線的斜率，它在QR段是一個常數，在x_0Q間及RS間隨x而改變，故實驗時常取QR間靠中央附近的f（$=m+\frac{1}{2}m_o$）值做實驗以減少振子上下振動時接近上下限所造成的誤差。



圖九

(2)實驗例：彈簧諧振週期T的理論值（T_B）與觀測值（T_A）如下表：

(3)結論：嚴密操作下T_A與T_B約相差萬分之一秒。

m_o (g)	10.0				
x_o (*cm*)	14.0				
$M\,(m+\frac{1}{2}m_o)$(g)	325	355	385	516	616
x (*cm*)	21.4	23.3	25.2	33.6	40.1
k (dyne/cm)	$15.789 \times 979^{-}$				
T_A (觀測值，sec)	0.9110	0.9523	0.9917	1.1500	1.2553
T_B ($2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ sec)	0.9111	0.9522	0.9916	1.1480	1.2543
($T_A - T_B$) (sec)	0.0001	0.0001	0.0001	0.0020	0.0010

表《八》

4. 利用彈簧的諧振測量重力加速度的方法：

(1)理論：

由彈簧性質的公式

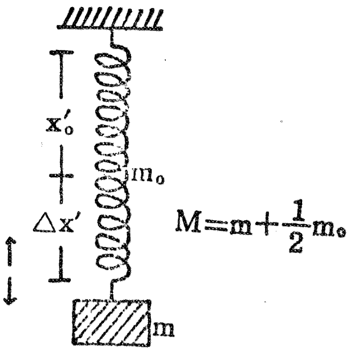
$f = k\,(x - x'_o)$ (只考慮大小)

$= k \cdot \triangle x'$ …………(a)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ …………(b)

$\because M = m + \frac{1}{2} m_o$ ，M在

QR部分內



圖十

且 $f = Mg = (m + \frac{1}{2} m_o)\,g$

故(a) 爲 $(m + \frac{1}{2} m_o)\,g = k \cdot (k - x'_o)$

$= k \cdot \triangle x'$ …………(3)

由(b) 得 $k = \dfrac{(m + \frac{1}{2} m_o)\,g}{\triangle x'}$

將此 k 值代入(2)

$$得\ T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m+\frac{1}{2}m_o}{\frac{(m+\frac{1}{2}m_o)g}{\triangle x'}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\triangle x'}{g}}$$

$$或\ \boxed{\begin{aligned} g &= \frac{4\pi^2\cdot\triangle x'}{T^2} \\ &= \frac{4\pi^2(x-x'_o)}{T^2} \end{aligned}}$$

只要測得彈簧的 x'_o，x 及對應的 T 值即可求得測量地點的重力加速度值。

m_o(g)	10.0							
x_o (*cm*)	14.0							
$M(m+\frac{1}{2}m_o)$	235	265	295	325	355	385	516	616
x (*cm*)	15.7	17.6	19.5	21.4	23.3	25.2	33.6	40.1
x'_o(*cm*)	0.8167							
$\triangle x'$(*cm*)	接近下限 Q			20.583	22.483	24.383	32.783	39.283
T (sec)	點 (15.7, 235) g			0.9110	0.9523	0.9917	1.1500	1.2553
$g(\frac{4\pi^2\cdot\triangle x'}{T^2})$ cm/sec²	值漸不準確			979.13	978.74	978.80	978.62	984.17

表《九》

(3)討論：

a. M 值宜取彈性上下限的中央值，否則所測得的 g 值不準確，例如M為 325 克與M為 616 克。

b. 所使用的彈簧不宜太短，否則 $\triangle x'$ 值太小，估計值誤差太大以致於 g 值不準確。

c.北緯 25° 的重力加速度值爲 $978.5 \sim 979.0\ cm/sec^2$ 。

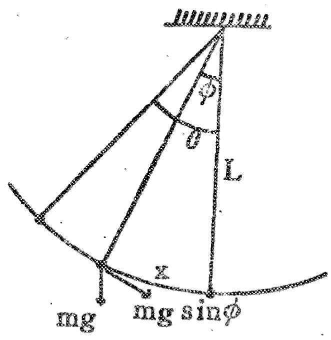
d.由表《八》與表《九》所測得T值與 g 值的準確性證明彈簧的 $\frac{1}{a}$ 因子，彈性常數上下限及 x'_0 的測定是相當正確的。

e.本實驗週期(T)的測量是以彈簧振子連續振盪 600 次所須的總時間求平均值而得。

5. 以單擺的諧振算式測量重力加速度值的比較——單擺的諧振條件：

(1)理論：

單擺擺動時其回復力F爲 $F=-mg\sin\phi$ 此回復力並不與 ϕ 成正比而係與 $\sin\phi$ 成正比故此一運動並非簡諧運動，不過若 ϕ 甚小時 $\sin\phi$ 即極近 ϕ ，



圖十一

故 $F=-mg\sin\phi \simeq -mg\phi$

$$=-mg\frac{x}{L}$$

$F=-\frac{mg}{L}\cdot x$ 此即爲簡諧運動

$$\therefore T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$\text{或 } g=\frac{4\pi^2\cdot L}{T^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

(a)(b)式只是一近似值，實際上單擺擺動週期之眞實算式爲：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\left(\frac{1\cdot 2}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\theta}{2}+\cdots\right]$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}}\ G \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

$$\text{或 } g'=\frac{4\pi^2\cdot L}{T^2}\ G^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d)\ (\text{眞實的 g 值})$$

註：(c)式是由橢圓積分而得，演算過程本文從略。

當　$\theta=10^\circ$ 時　$G=1.0019002$；　$L=25\,cm$時眞實的 g 值約較第(b)式的 g 值多 $3.7\ cm/sec^2$，

$\theta=4^\circ$ 時約多 $0.6\ cm/sec^2$，

$\theta=2^\circ$ 時約多 $0.16\ cm/sec^2$。

(2)結論：

故若欲以單擺的近似值公式$T=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ 來求 g 值，角幅 θ 應在 4° 以下，否則就必須按非諧振算式計算：

$$g'=\frac{4\pi^2\cdot L}{T^2}\cdot G^2$$

$$G=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\left(\frac{1\times3}{2\times4}\right)^2\sin^4\frac{\theta}{2}+\left(\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\right)^2\sin^6\frac{\theta}{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(3)實驗例：

由單擺在不同角幅振動所測得的 g 和 g′ 值：

擺長 L（cm）	41.25				
角　幅　θ°	40	30	20	10	4
G^2	1.059	1.035	1.015	1.0038	1.00061
週期 T（sec）	1.3333	1.3158	1.3043	1.2949	1.2903
$g\left(=\dfrac{4\pi^2\cdot L}{T^2}\right)$	916.03	947.94	957.11	971.11	978.11
$g'\left(=\dfrac{4\pi^2\cdot L}{T^2}G^2\right)$	970.07	981.12	971.55	974.03	978.71

《表十》

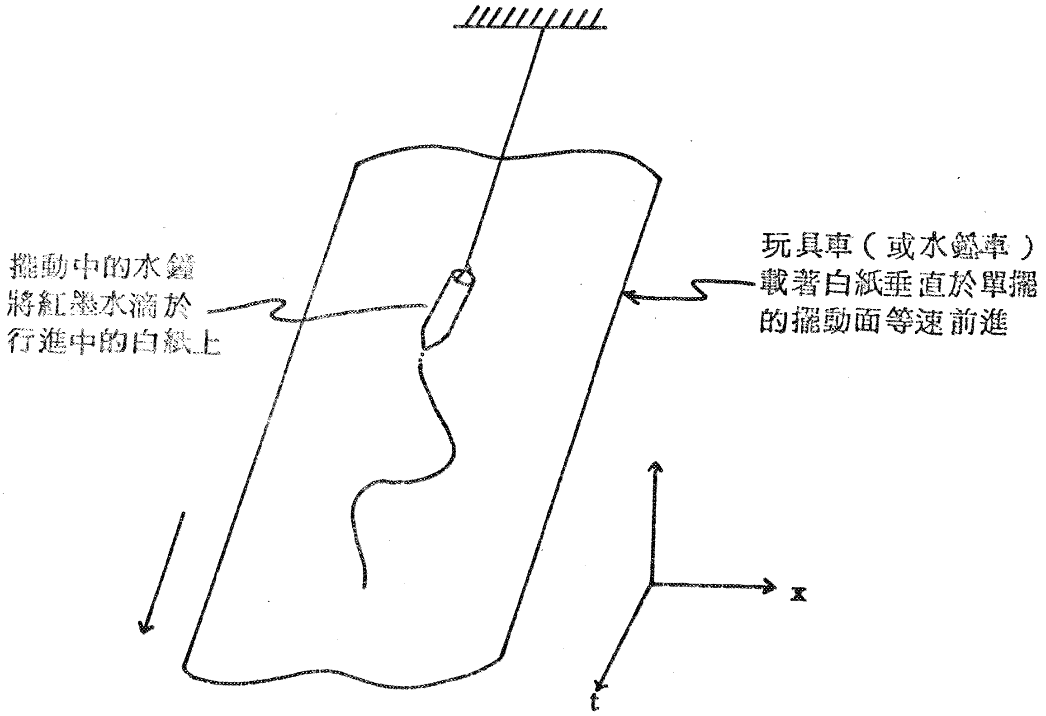
(4)討論：

a. 角幅越大，擺錘切線速度越快，週期測定值的誤差越大，g 值測定值的誤差也增大。

b. 角幅 10° 與 4° 之間週期相差 0.0046 sec ，通常是感覺不出來的，故亦可假設 10° 左右仍是諧振現象。

6. 簡諧運動曲線圖的描繪——製作自動描繪器教具解釋單擺與彈簧的振盪通性、弦波。

(1)單擺諧振圖形的描繪：由表(十)知道單擺的擺幅在 10° 以下時週期 T 只相差約 0.005 sec ，通常是感覺不出來的，因此可以視同諧振，下圖是單擺諧振曲線圖形的描繪法：



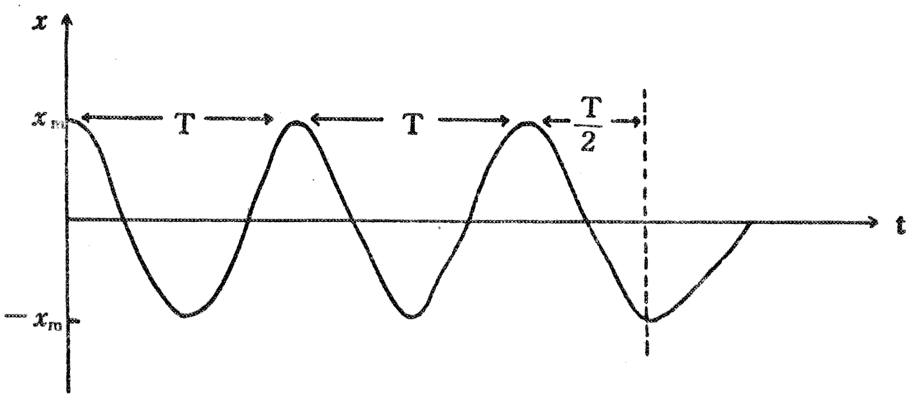
圖十二

說明：

a. 將白紙置於玩具車的平台上，將玩具車置於一斜面上，使斜面的斜角約爲 1 ～ 2°，則玩具車在斜面方向的下滑力約等於玩具車與斜面之間的動摩擦力，故玩具車得以等速前進。

b. 使單擺——水鐘係統把紅墨水滴於行進中的白紙上，即形成諧振的曲線圖形。

c. 將以上水鐘描繪出的曲線圖加上 x 與 t 坐標軸如下圖：



圖十三

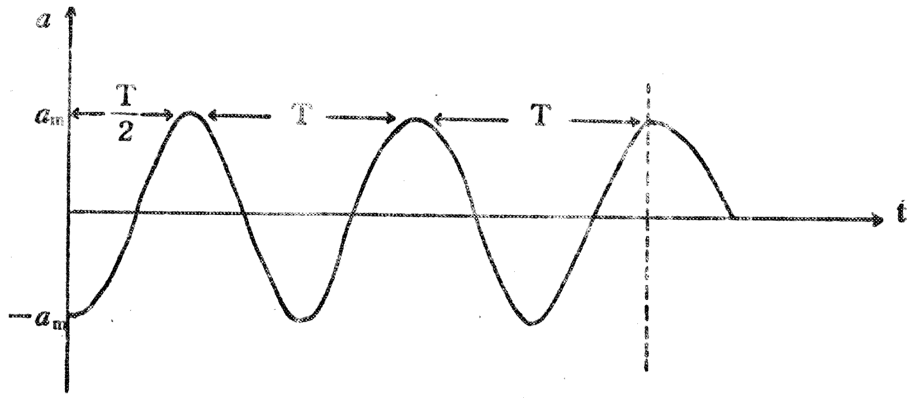
此曲線圖表示(I)單擺的小振幅運動視同簡諧運動。

(II)單擺的等時性運動，週期為 T 。

(III) $x = x_m \cos 2\pi t / T$ ，為一弦波。

d. $\because F = -\dfrac{mg}{L} \cdot x = ma$ $\quad \therefore \infty - a$ 表示正比反方向原則

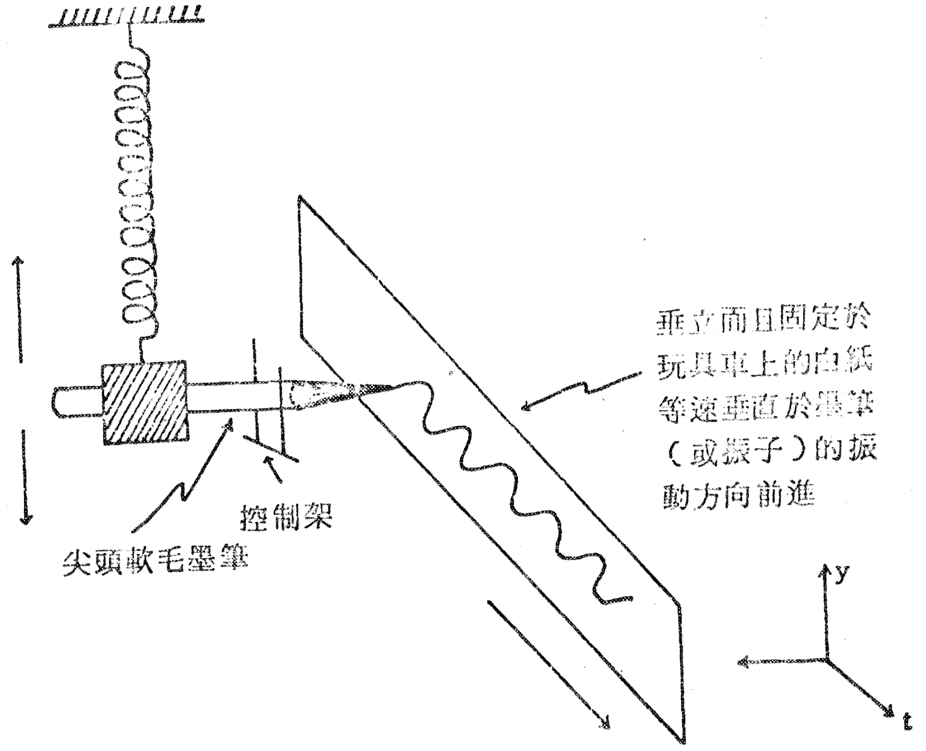
故由圖(十三)可依此原則繪得 a － t 曲線如下圖：



圖十四

此圖表示 $a = -a_m \cos 2\pi t / T$ ，加速度 a 隨時間 t 而變。

(2)彈簧諧振圖形的描繪：



圖十五

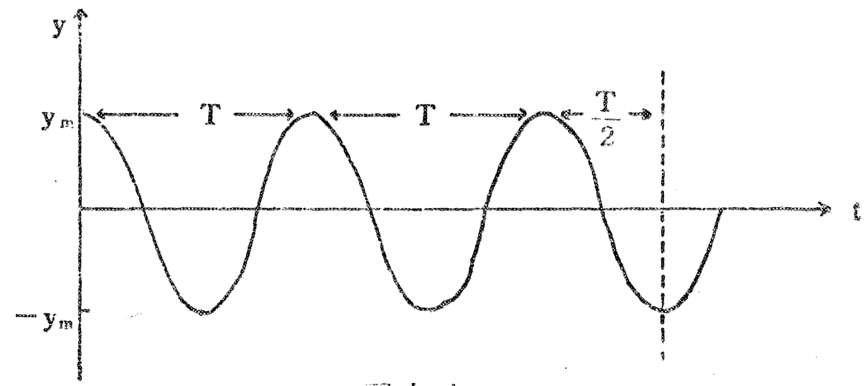
說明：

a. 尖頭軟毛墨水筆（與紙面的摩擦力不大）隨着彈簧——振子係統上下振動。

b. 白紙與墨水筆尖輕微接觸並且垂直於墨筆的振動方向等速前進（等速玩具車）。

c. 如此即可在白紙上描繪出諧振位移(y)與時間(t)的曲線圖。

d. 將上圖墨水筆所描繪出來的曲線圖加上 y 與 t 坐標軸如下圖：



圖十六

此曲線圖表示：(a)諧振現象。

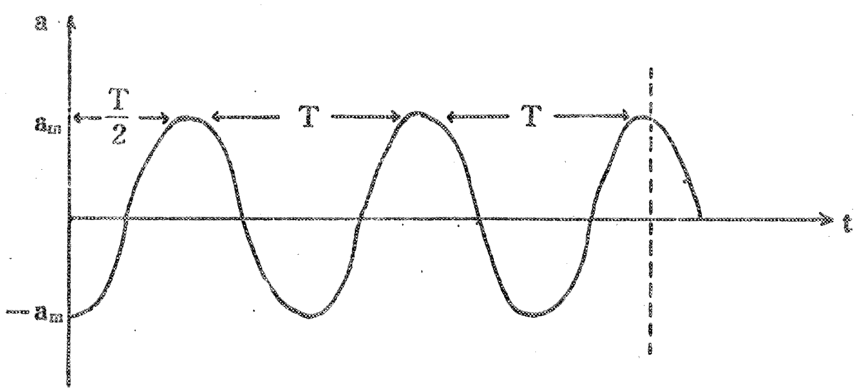
(b)等時性，週期為 T。

(c) $y = y_m \cos 2\pi t/T$ 是一弦波。

e.又因為虎克定律 $f = -ky$

$= Ma$

故 $a \propto -y$，加速度與 y 成正比，唯方向相反，故從上圖可依正比、反方向的原則繪得如下之曲線圖：



圖十七

此圖即為 $a = -a_m \cos 2\pi t/T$，它說明加速度 a 隨時間 t 變化的情形。

(3)結論：

a.單擺的小振幅振動曲線圖與彈簧振子的振盪曲線圖相同，都是屬於弦波（正弦或餘弦波）曲線。而且利用小振幅單擺與利用彈簧所測量到的重力加速度值幾乎相同，證明小振幅單擺的振動確實極近似彈簧的振盪型式——簡諧運動。

b.單擺和彈簧諧振圖形描繪器所描繪出來的曲線圖雖然因為一些阻礙因素的影響而不夠完美，但是把安推廣做為解釋一般振盪體的諧振現象，仍然是相當直接而且理想的教具。

評語：思考縝密分析及表達方法甚佳，富創造能力及研究精神，惜出發點理論稍有錯誤。