物體質心的位置

高中教師組數學第三名

省立新竹高級中學　　　　　　　　　　　　作　　者：儲啟政

一、前言：

本文純以數學方法來探討一個物理上的問題一物體質心的位置，文分三節，第一節中以數學的形式來定義 n 維歐氏空間中的物體及其密度和質心，並討論凸集合的一些性質，第二節引述了 Hahn-Banach 定理而不加證明，但證明它的一個有用的推論，以作為討論物體質心的依據，第三節則為本文的主題，證明了具有凸領域的物體其質心必在其領域之中，並進而說明了一般物體質心的位置。

值得注意的是物理世界中眞實的物體，其密度和質心均符合本文第一節中 $n=3$ 的定義，因此本文的結論自然適合物理上實際的情況，然而本文所述較實際略為一般化。

本文牽涉一點基本的泛函分析，測度論和拓樸學，由於所用到的一些性質均屬相當基本的論述，故並未註明參考書目。

1. 物體的質心與凸集合

(1)定義：

令 En 表 n 維歐氏空間，若 R 為 En 的一個非空子集，ρ 為 En 上的一個實數值函數，滿足

a. $\rho \geq 0$

b. $\rho = 0$ 在 $En \setminus R$ 上幾乎處處（almost everywhere）成立。

c. $\rho \in L^1(En)$ 且 $\int_{En} \rho \, d\mu \neq 0$（$\int_{En} d\mu$ 表 En 上的 Lebesque 積分）。

d. $p_i \rho \in L^1(En)$, $i=1, 2 \cdots, n$

此處 p_i : $En \to E_1$ 定義為

$p_i(x(1), x(2), \cdots, x(n)) = x(i)$

而 $p_i \rho$ 表 p_i 與 ρ 之乘積

則稱（R，ρ）為En中的一物體，R為此物體之領域，ρ為為此物體之密度，而點 $x=(\overline{x}(1),\overline{x}(2),\cdots,x(n))$ 稱為（R，ρ）的質心，其中

$$\overline{x}(i)=\frac{\int_{En} p_i \rho d\mu}{\int_{En} \rho d\mu}$$

(2)定義：

若 $S\subset En$，當 $x, y\in S$ 時，$\lambda x+(1-\lambda)y\in S$ 對所有 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 皆然，則稱S為En中的一個凸集合，簡稱凸集。

若S為凸集，我們可用數學歸納法很容易地證明，若 $x_1, x_2, \cdots, x_k\in S$ 則集合 $\{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_{k-1}x_{k-1}+(1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{k-1})x_k \mid \lambda_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots\cdots, k-1, \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{k-1}\leqslant 1\}$ 包含於S，我們可以利用此一性質說明若（R，ρ）為En中一物體，且R為一凸集，則R在En中必有內點（interior point），亦即R的內部（interior）不為空集合，由於平移不影響拓樸性質我們不妨假設R含有原點0，則由R所生成（generate）的向量空間必為En本身，若不然，則R在En中之測度（measure）必為0，與 $\int_{En}\rho d\mu=\int_R \rho d\mu\neq 0$ 相矛盾。今令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 為R中一組線性獨立之點，則 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 可做為En的一組基底，因此由映射 $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n\rightarrow\lambda_1$ 所決定之函數為En上的實數值連續函數，由此可知集合 $\{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n \mid \lambda_i>0, i=1,2,\cdots,n, \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n<1\}=\bigcap_{i=1}^{n}\{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n \mid \lambda_i>0\}\cap\{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n \mid \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n<1\}$ 為開集合，又 $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n+(1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_n)0$ 所以此開集合為R中之非空子集，故R在En中有

內點。

(3)定義：

若$S \subset E_n$，則E_n中包含S最小凸集稱為S的凸包（convex hull），以ch（S）表之。

由於凸集的任意交集必仍為凸集，故取包含S的所有凸集（至少有一個，即E_n）做交集，即得包含S的最小凸集，所以任何集合均有其凸包。

2. Hahn-Banach定理的一個推論

當今數學分析中最重要的定理之一，Hahn-Banach定理有著各種不同形式的同義敍述，玆列出其中較為一般化的一種形式。

(1)定理：

若V為一實向量空間，P為V上的一個實數值函數，滿足

a. $P(x) \geqslant 0$ 所有 $x \in V$

b. $P(x+y) \leqslant P(x)+P(y)$ 所有 $x, y \in V$

c. $P(\alpha x)=\alpha P(x)$ 所有 $x \in V$，$\alpha \geqslant 0$

W為V的一個子空間，f為W上的一個線性泛函，滿足$f(x) \leqslant P(x)$對所有$x \in W$皆然

則線性泛函f可擴張（extend）到V上，令為F，而F依然滿足$F(x) \leqslant P(x)$，對所有$x \in V$皆然。

(2)推論：

若R為E_n中的一個凸集，且R含有一內點，x_0為R外的一點，則必有E_n上的一個非零線性泛函F，使得$F(x) \leqslant F(x_0)$對所有$x \in R$皆然。

證明：

我們可假設原點0為內點，否則只須做一平移使R＋a以0為內點，最後由$F(x+a) \leqslant F(x_0+a)$得到$F(x)+F(a) \leqslant F(x_0)+F(a)$而導出$F(x) \leqslant F(x_0)$，因為0為R的內點，則可設B為以原點0為球心，而包含於R的一個開

球（open ball），則任一 $x \in En$，顯然均有 $t > 0$，使得 $tx \in B$，因此 $tx \in R$，即 $x \in \frac{1}{t} R$ 令

$$P(x) = \inf \{ \beta \mid \beta > 0 , x \in \beta R \}$$

則 $P(x)$ 對所有 $x \in En$ 均有定義，且對所有 $x , y \in En$，$\alpha \geqslant 0$，均有

a. $P(x) \geqslant 0$

b. $P(x+y) \leqslant P(x) + P(y)$

c. $P(\alpha x) = \alpha P(x)$

d. 若 $x \in R$ 則 $P(x) \leqslant 1$

e. 若 $x \notin R$ 則 $P(x) \geqslant 1$

由 $P(x)$ 之定義知(1)顯然成立，其次我們證明(2)，若 $\varepsilon > 0$，$x \in En$ 由 $P(x)$ 之定義知 $x \in (P(x)+\varepsilon)R$

即 $\frac{1}{P(x)+\varepsilon} x \in R$

由 R 是凸集 $\frac{1}{P(x)+\varepsilon} x \in R$; $\frac{1}{P(y)+\varepsilon} y \in R$ 知

$\frac{\lambda}{P(x)+\varepsilon} x + \frac{1-\lambda}{P(y)+\varepsilon} y \in R$ 對所有 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 皆然

若令 $\lambda = \frac{P(x)+\varepsilon}{P(x)+P(y)+2\varepsilon}$ 則可得

$$\frac{1}{P(x)+P(y)+2\varepsilon}(x+y) \in R \text{ 即}$$

$x+y \in (P(x)+P(y)+2\varepsilon)R$ 由 $P(x+y)$ 之定義

3. 質心的位置：

我們可以利用第二節中的推論來討論具有凸領域（領域爲凸集）的物體，其質心必落在其領域之中，進而討論一般物體質心的位置。

(1)定理：

(R，ρ)爲一物體，若R爲凸集，$\overline{x}$爲(R，ρ)之質心，則$\overline{x}\in R$。

證明：

不妨假設$\overline{x}$爲原點0，若$0\notin R$，因R有內點，由2—(2)推論知存在En上的非零線性泛函F'，使$F'(x)\leqslant F'(0)=0$，對所有$x\in R$均成立，令線性泛函$F=-F'$，則$F(x)\geqslant 0$對所有$x\in R$均成立

我們定義En上的另一測度ν

$$\nu(K)=\int_K \rho\, d\mu,\ K\text{爲 Lebesque 可測集}$$

則 $\int_R F\, d\nu=\int_R F\rho\, d\mu$

又F爲En上的線性泛函，故可設$F=\sum_{i=1}^{n} c_i p_i$，c_i爲實數

於是 $\int_R F\rho\, d\mu=\sum_{i=1}^{n} c_i \int_R p_i\rho\, d\mu=0$

因爲由1—(1)定義

$$\int_R p_i\rho\, d\mu=\int_{En} p_i\rho\, d\mu=\overline{x}(i)\int_{En}\rho\, d\mu$$

$$=0\int_{En}\rho\, d\mu=0$$

所以$\int_R F\, d\nu=0$，但是$F\geqslant 0$，故知F在R上對ν測度而言，幾乎處處爲0，亦即$\nu(R\setminus A)=0$

$$A=\{x\in R \mid F(x)=0\}$$

然而$A\subset \ker F=\{x\in En \mid F(x)=0\}$，且ker F是En中維度爲n－1的子空間($F\neq 0$)，故$\mu(A)=0$

所以$\nu(A)=\int_A \rho\, d\mu=0$

於是我們得到$\nu(R)=\nu(A)+\nu(R\setminus A)=0$

但另一方面 $\nu(R)=\int_R \rho d\mu=\int_{En}\rho d\mu \neq 0$ (1—(1)定義)導致一個矛盾，因此我們最初假設 $\overline{x}\notin R$，是不合理的，故得知 $\overline{x}\in R$。

(2)推論：

若 (R,ρ) 爲一物體，$\overline{x}$ 爲其質心，T爲包含R的一個凸集，則 $\overline{x}\in T$，特別地 $\overline{x}\in ch(S)$

證明：

$T\supset R$ 所以 $En\setminus T\subset En\setminus R$，$\rho$ 在 $En\setminus R$ 上幾乎處處爲零，故在 $En\setminus T$ 上也是幾乎處處爲零，由 1—(1)定義知 (T,ρ) 亦爲En 中的一物體且與 (R,ρ) 有相同的質心 $\overline{x}$，又T爲凸集，由上述定理知 $\overline{x}\in T$，因爲S的凸包ch(S)。也是一個包含S的凸集，所以 $\overline{x}\in sh(s)$。

知 $P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)+2\varepsilon$

由於 ε 可以是任意正數，故得 $P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)$

接著我們證明(c)若 $\alpha>0$

$$\begin{aligned}
P(\alpha x) &= \inf\{\beta \mid \beta>0,\ \alpha x\in\beta R\}\\
&= \inf\{\beta \mid \beta>0;\ x\in \frac{\beta}{\alpha}R\}\\
&= \inf\{\alpha\beta \mid \beta>0,\ x\in\beta R\}\\
&= \alpha \inf\{\beta \mid \beta>0,\ x\in\beta R\}\\
&= \alpha P(x)
\end{aligned}$$

若 $\alpha=0$，$P(0x)=\inf\{\beta \mid \beta>0,\ 0x\in R\}=\inf\{\beta \mid \beta>0\}=0=0P(x)$

d與e的證明較爲簡單，若 $x\in R$，則 $1\in\{\beta \mid \beta>0,\ x\in\beta R\}$ 故 $P(x)\leqslant 1$，若 $x\notin R$，假設 $P(x)<1$ 則 $x\in 1R=R$ 矛盾，故 $P(x)\geqslant 1$

令W爲由 x_0 所生成的一維空間($x_0\neq 0$)，定義 $f(cx_0)=cP(x_0)$，c爲實數，則f爲W上的線性泛函，

滿足 $f(x) \leqslant P(x)$，$x \in W$，因爲

若 $c \geqslant 0$　$f(cx_0) = cP(x_0) = P(cx_0)$

若 $c < 0$　$f(cx_0) = cP(x_0) \leqslant 0 \leqslant P(cx_0)$

由 2.—(1)知 f 可擴張至 En 上，令爲 F，滿足

$F(x) \leqslant P(x)$　對所有 $x \in En$ 皆然

當 $x \in R$ 時，$F(x) \leqslant P(x) \leqslant 1 \leqslant P(x_0) = f(x_0)$

$= F(x_0)$，本推論至此得證。

評語：結論涵蓋廣，論理深入。