

機率與空間之對應

高中組數學第三名

省立花蓮女子高級中學

作者：鍾子謀等四名

指導老師：何聖宗

一、研究動機：

半年多前，我在一本有關機率的書上看到如下的題目：某女與男友相約，在下午五時至六時之間，在公園門口見面，先到的人應等候二十分鐘，求此二人在門口相遇的機率。當時我就想：如果相約的人有三個、四個或更多的話，這個機率要如何求呢？於是就著手開始研究，得到結果之後，只覺得高興，並沒有想到居然有機會把它寫出來。

二、研究過程：

1 我們先從兩個人的情形開始命題：

(1) 甲、乙兩人相約，在下午五時至五時十分之間，在公園門口見面，先到的人應等候三分鐘，求此二人在公園門口相遇的機率。

解：設甲在五時 X 分到達，乙在五時 Y 分到達，則依題意得

$$0 \leq X \leq 10$$

$$0 \leq Y \leq 10$$

$$|X - Y| \leq 3$$

其圖如右

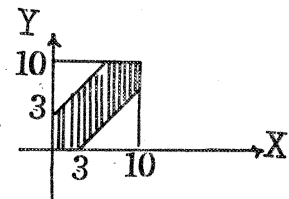


圖 (一)

所求機率即為陰影部份與正方形之面積比

$$= \frac{10^2 - 7^2}{10^2} = \frac{51}{100}$$

2 接著我們再看看三個人的情形：

(2) 人物為甲、乙、丙三人，約定事項如(1)，求此三人相遇的機率。

解：甲、乙兩人抵達時間同(1)，丙則於五時 Z 分到達，則依

題意得：

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ 0 \leq z \leq 10 \\ |x-y| \leq 3 \\ |y-z| \leq 3 \\ |z-x| \leq 3 \end{aligned}$$

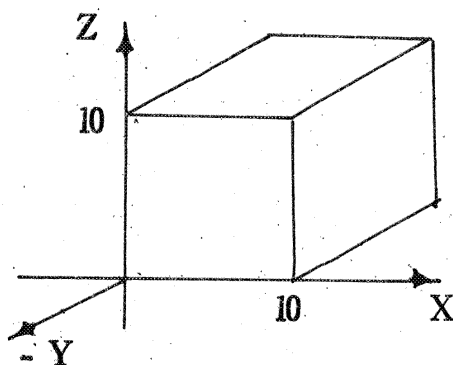


圖 (一)

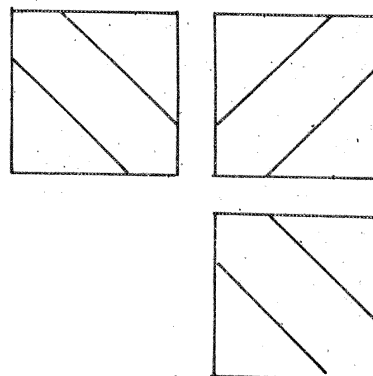


圖 (二)

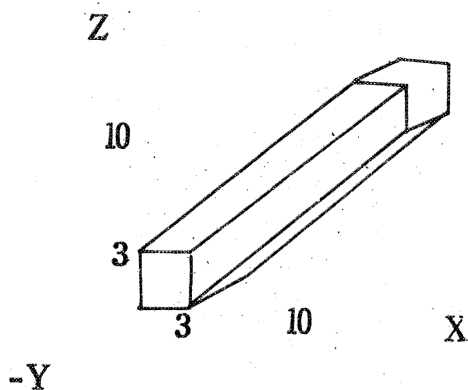


圖 (四)

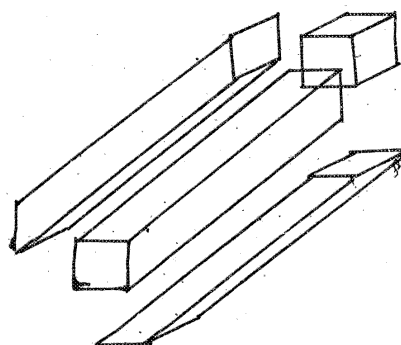


圖 (五)

其解集合之圖形繪來較為複雜，方法是從圖(一)的前方、左方、下方各切二刀，如圖(二)所示，則得到圖(四)。欲計算圖(四)中紅線所包圍的體積，我們可將之折成一塊邊長為3的正立方體，及三塊底面積為(3×3)高為(10-3)的平行六面體，故其體積 = $3^3 + 3 \times 7 \times 3^2$ ，機率 = $\frac{3^3 + 3 \times 7 \times 3^2}{10^3}$

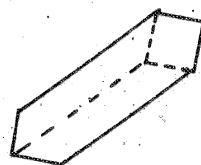
3. 現在我們來處理 n 個人的情形。($n > 3$)

設此 n 個人分別於五時 X_1 分，五時 X_2 分……五時 X_n 分到達，亦即有 n 個變數需要處理，但因為 $n > 3$ ，所以我們無法再像(1)(2)般地用幾何的方法來解決，於是我想應將代數的通式找出來。因為(1)比(2)簡單，我們不妨改寫它。

本來在圖(一)中，我們計算斜線部份面積的方法，是把正方形面積減去兩個直角三角形的面積，現在我們模仿(2)的方法，

把斜線部份折成一個邊長為 3 的正方形和兩個底為 3，高為 7 的平行四邊形，如圖所示，則其面積可表為

$$(3^2 + 2 \times 7 \times 3) \text{ , 機率} = \frac{3^2 + 2 \times 7 \times 3}{10^2}$$



，與(2)所得的機率 $\frac{3^3 + 3 \times 7 \times 3^2}{10^3}$ 比較，很容易會令人想到其

$$\text{通式} = \frac{3^n + n \times 7 \times 3^{n-1}}{10^n}$$

4. 爲了使這個通式更爲可信，我們可以想想它有沒有什麼直觀的意義。現在先將其改爲成 $(\frac{3}{10})^n + n \times \frac{7}{10} \times (\frac{3}{10})^{n-1}$ 。這可以分兩部份解釋：

(1) 假設參與約定的 n 個人，都在五點七分至五點十分之間到達公園門口。這種情況發生的機率是 $(\frac{3}{10})^n$ 。當然，此時他們一定可以相遇的。

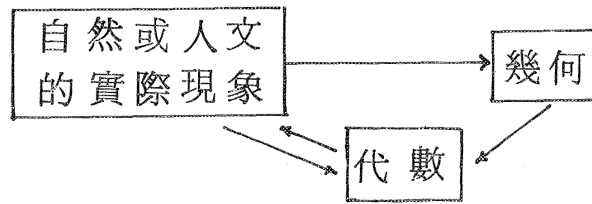
(2) 假設 n 個人中，至少有一人並非在五時七分至五時十分之間到達。這時我們假定甲是最早到達的，那麼很顯然甲在五時七分之前已經到達。在這種情況下，其他人必須要在甲到達後的三分鐘內趕到，才有可能使 n 個人相遇在一起。因此這時 n 人相遇的機率 = $\frac{7}{10} \times (\frac{3}{10})^{n-1} \dots (1)$ 。但是甲不一定是最早到達的，其他人也有可能是最早抵達者，所以應將(1)式再乘以 n ，即得 $n \times \frac{7}{10} \times (\frac{3}{10})^{n-1}$ 。

5. 由步驟 4 的(一)、(二)得知，此 n 個人相遇的機率 $(\frac{3}{10})^n + n \times \frac{7}{10} \times (\frac{3}{10})^{n-1}$ 。我們已經得到一個直觀的解釋來支持通式。

三、結 論：

在本文中，我們解決這個問題的次序是：1 由解析幾何的作圖法得到概念。2 在抽象的 n 維世界中推測代數形式的通式。3

賦予代數式實際的意義。把這種程序繪成圖解即是：



這正是在實驗本第三冊第一章所一再強調的重點。我們以這個題目做為學習之後的一點回響。

評語：將已知機率問題一般化，並得出解法公式。