取 點 機 率

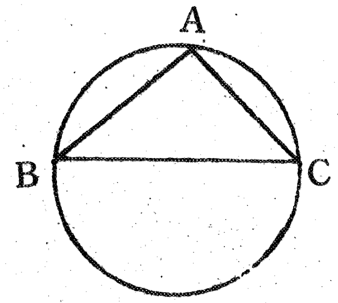
高中組數學第三名

省立台中一中　　　　　　　　　　　　作　　者：林清進等四名

指導老師：黃呈明

一、動機：

上課講到這樣一個例子：圓周上任取相異三點（取到那一點之機會均等）求此三點在一半圓上之機率 P＝？



取△ABC 最大角爲∠A

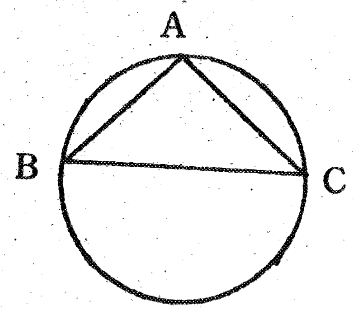
則 $60° \leq \angle A < 180°$

⇒△ABC 三頂點在一半圓上時

$90° \leq \angle A < 180°$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{180-90}{180-60}=\frac{3}{4}$$

此種解法，意爲當 $60° \leq \angle A < 180°$，則取 $90° \leq \angle A < 180°$ 之機率 $=\frac{3}{4}$，與原題意"取到那一點之機會均等"似有不妥之處，又依據機率入門黃提源之解法爲



令△ABC 最大角爲∠A，∠A 所對弧爲 $\overparen{BC}$

則 $\frac{2\pi R}{3} \leq \overparen{BC}$ 長 $< 2\pi R$

（R 爲圓半徑）

⇒△ABC 三頂點在一半圓上時

則 $\pi R \leq \overparen{BC}$ 長 $< 2\pi R$

$$\Rightarrow P(\overparen{BC})=\frac{2\pi R-\pi R}{2\pi R-\frac{2}{3}\pi R}=\frac{3}{4}$$

黃氏解法爲　$S=\{\overparen{BC} \mid \frac{2\pi R}{3} \leq \overparen{BC}\text{ 長} < 2\pi R\}$

$A=\{\overparen{BC} \mid \pi R \leq \overparen{BC}\text{ 長} < 2\pi R\}$

$$P(A)=\frac{2\pi R-\pi R}{2\pi R-\frac{2\pi R}{3}}=\frac{3}{4}$$

其意與原題意取到那一點之機會均等亦有不盡合理之處

∵圓可視爲圓內正 n 邊形之極限，故我們想：若自圓內接正 n 邊形之 n 個頂點，任取三點，當 $n\to\infty$ 時，此三點同在一半圓上之機率 P 的極限值可視爲自圓上任意取相異三點同在一個半圓上之機率，爲了尋求其規律性，並擴大適用範圍，於是我們展開了研究序幕。

〔註〕本說明書所列命題中所取之點均爲相異點並設取到那一點之機會均等。

二、預備知識：

1. 若 S 爲樣本空間且 S 中每一元素發生之機會均等，$A\subset S$ 則 A 事件發生之機率 $=P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

2. 在此我們定義：

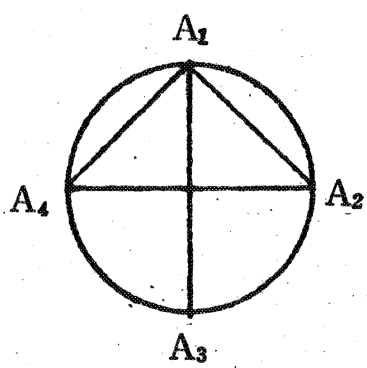
Ar 爲成功事件，P(Ar) 爲 Ar 成功之機率且樣本空間 S 中每一元素發生之機會均等。則 $0\leq P(Ar)\leq 1$

當 (1) $P(Ar)=\lim\limits_{n\to\infty}(f(n)\geq 1)$ 時 $P(Ar)=1$

(2) $P(Ar)=\lim\limits_{n\to\infty}(f(n)\leq 0)$ 時 $P(Ar)=0$

三、內容：

命題 1：圓內接正四邊形，任取三頂點所成之△爲直角△或鈍角△之機率＝？



(1)以 A_1 爲直角頂有 1 個

(2)以 A_1 爲鈍角頂有 0 個

計有直角△＝4.1＝4 個

∴任三頂點所成之△爲直角或鈍角之機率＝ $\dfrac{4}{C^4_3}=1$

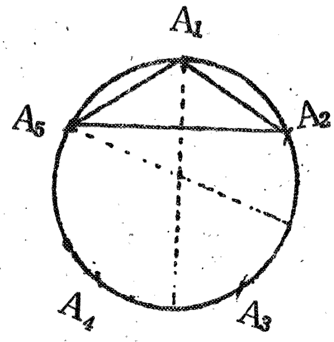
命題 2：圓內接正五邊形，任取三頂點所成之△爲直角△或鈍角△之機率 P＝？

(1)以 A_1 爲直角頂有 0 個

(2)以 A_1 爲鈍角頂有 1 個。

計有鈍角△5 個

$\therefore P = \dfrac{5}{C^5_3} = \dfrac{1}{2}$



命題 3：圓內接正六邊形，任取三頂點所成之△爲直角或鈍角△之機率 P = ?

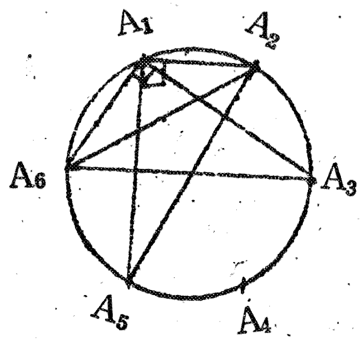
(1)以 A_1 爲直角頂之△有 2 個

(2)以 A_2 爲鈍角頂之△有 1 個

計有直角△ $6 \times 2 = 12$ 個

鈍角△ $6.1 = 6$ 個

$\therefore P = \dfrac{12+6}{C^6_3} = \dfrac{9}{10}$



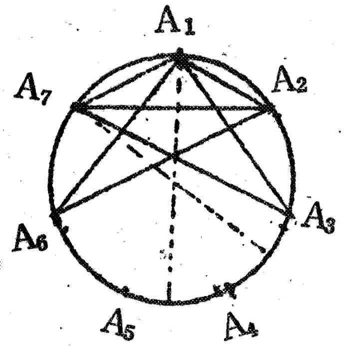
命題 4：圓內接正七邊形，任取三頂點所成之△爲直角△或鈍角△之機率 P = ?

(1)以 A_1 爲直角頂之直角△有 0 個

(2)以 A_1 爲鈍角頂之鈍角△有 3 個

計有鈍角△ $7 \times 3 = 21$ 個

$\therefore P = \dfrac{21}{C^7_3} = \dfrac{3}{5}$



命題 5：圓內接正八邊形，任取三頂點所成之△爲直角△或鈍角△之機率 P = ?

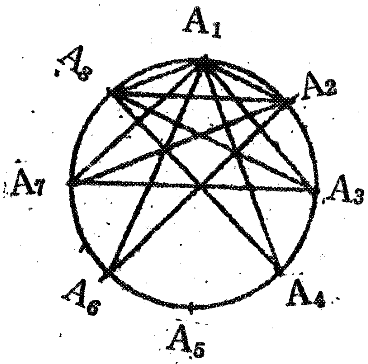
(1)以 A_1 爲直角頂之△有 3 個

(2)以 A_1 爲鈍角頂之△有 3 個

計有直角△ $3.8 = 24$ 個

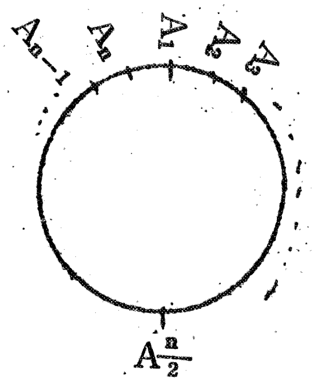
鈍角△ $3.8 = 24$ 個

$\therefore P = \dfrac{48}{C^8_3} = \dfrac{6}{7}$



命題6：圓內接正n邊形，任取三頂點所成之△爲直角△或鈍角△之機率P＝？

(1) $n=2K$，$K\in N$



a. 以 A_1 爲直角頂之△有 $\dfrac{n-2}{2}$ 個

b. 以 A_1 爲鈍角頂之△有

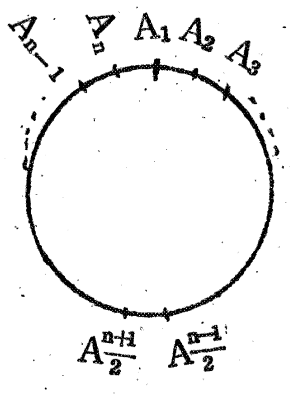
$$\frac{n-4}{2}+\frac{n-6}{2}+\frac{n-8}{2}+\cdots\cdots+1=\frac{(n-4)(n-2)}{8}\text{ 個}$$

計有直角△ $n\cdot\dfrac{n-2}{2}=\dfrac{n(n-2)}{2}$ 個

鈍角△ $n\cdot\dfrac{(n-4)(n-2)}{8}=\dfrac{n(n-2)(n-4)}{8}$ 個

$$\therefore P=\frac{\dfrac{n(n-2)(n-4)}{8}+\dfrac{n(n-2)}{2}}{C^n_3}=\frac{3n}{4(n-1)}$$

(2) $n=2K+1$，$K\in N$



a. 以 A_1 爲直角頂之△有0個

b. 以 A_1 爲鈍角頂之△有

$$\frac{n-3}{2}+\frac{n-5}{2}+\cdots\cdots+1=\frac{(n-1)(n-3)}{8}\text{個}$$

計有鈍角△ $\dfrac{n(n-1)(n-3)}{8}$ 個

$$\therefore P=\frac{\dfrac{n(n-1)(n-3)}{8}}{C^n_3}=\frac{3(n-3)}{4(n-2)}$$

推廣 1：圓內接正 n 邊形，當 $n\to\infty$ 時即表示為一圓，則自圓上任取三點所成之△為直角△或鈍角△之機率 P＝？

(1)當 $n=2K$，$K\in N$ 時

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{4(n-1)}=\frac{3}{4}$$

(2)當 $n=2K+1$，$K\in N$ 時

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n-3)}{4(n-2)}=\frac{3}{4}$$

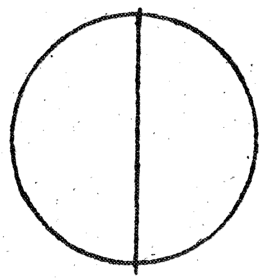
∴自圓上任取三點所成之△為直角△或鈍角△之機率 $P=\frac{3}{4}$

推廣 2：圓內接直角△或鈍角△之三頂點皆在同一半圓上，故"推廣 1"可改為：自圓上任取三點皆在一半圓上之機率為何？

命題 7：圓內接正 n 邊形，任取 r 個頂點，此 r 個頂點皆在一半圓上之機率 P＝？

(1) $n=2K$，$K\in N$

a. $r=2$



(a) n 個頂點中任取一點 A

(b)自 A 作直徑，則端點必為為另一頂點，設為B

(c)將圓以 $\overline{AB}$ 劃分為左、右兩弧則每弧上各有 $\frac{n-2}{2}$ 個頂點

(d)令 A為 r 個頂點之一，A至 B之順時針方向之弧上有 $\frac{n}{2}$ 個頂點（包含B點而A點除外），由此 $\frac{n}{2}$ 個頂點中任取一點必與A在同一半圓，故其方法數＝$C^{\frac{n}{2}}_{1}$ 種

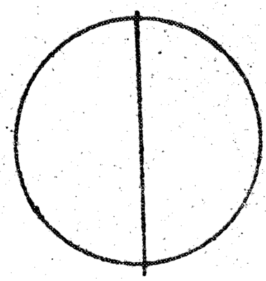
(e)此種A點共有 n 個

∴自 n 個頂點中任取 2 點在一半圓上之方法數＝$n\cdot C^{\frac{n}{2}}_{1}-\frac{n}{2}$

$$\therefore P=\frac{n\cdot C^{\frac{n}{2}}_{1}-\frac{n}{2}}{C^{n}_{2}}=1$$

b. $r = 3$

(a)同上，令A爲r 個頂點之一，A至B之順時針方向弧上有$\frac{n}{2}$個頂點（包含B；A除外），由此$\frac{n}{2}$個頂點中任取一點必與A在一半圓上，故其方法數$= C^{\frac{n}{2}}_{2}$種



(b)此種A點共有n個

$\therefore$自 n 個頂點中任取3點在一半圓上之方法數$= n \cdot C^{\frac{n}{2}}_{2}$

$$\therefore P = \frac{n \cdot C^{\frac{n}{2}}_{2}}{C^{n}_{3}} = \frac{3n}{4(n-1)}$$

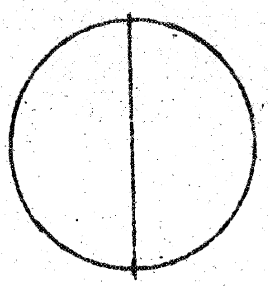
(i) 當 $n \leq 4$ 時　$P = \dfrac{3n}{4(n-1)} \geq 1 \Rightarrow P = 1$

(ii)當 $n < 4$ 時　$P = \dfrac{3n}{4(n-1)}$

c. 同理　$r = 4, 5, 6 \cdots\cdots$亦同

當 $r = r$ 時

(a)令A爲r 個頂點之一，A至B之順時針方向弧上有$\frac{n}{2}$個頂點（A除外；含B），則由此$\frac{n}{2}$個頂點中任取$(r-1)$個點必與A在一半圓上，故其方法數$= C^{\frac{n}{2}}_{r-1}$種



(b)此種A點共有n個

$\therefore$ n個頂點中任取r點在一半圓上之方法數$= n \cdot C^{\frac{n}{2}}_{r-1}$種

$$\therefore P = \frac{n \cdot C^{\frac{n}{2}}_{r-1}}{C^{n}_{r}}$$

$$= \frac{\dfrac{n \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-4}{2} \cdots \frac{n-2r+4}{2}}{(r-1)\,!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{r\,!}}$$

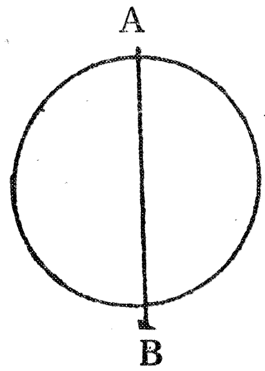
$$= \frac{r}{2^{r-1}} \cdot \frac{n(n-2)(n-4)\cdots(n-2r+4)}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}$$

(2) $n = 2K + 1$，$K \in N$

a. $r = 2$

(a)從 n 個頂點中任取一點 A

(b)由 A 作直徑，則另一端點 B 不爲頂點



(c) $\overline{AB}$ 將圓分爲兩弧，令 A 爲 r 個頂點之一，A至 B 之順時針方向之弧上有 $\frac{n-1}{2}$ 個頂點（ A點除外），則由此 $\frac{n-1}{2}$ 個頂點中任取一點必與 A 在同一半圓上，故其方法數 $= C^{\frac{n-1}{2}}_{1}$ 種

(d)此種 A 頂點共有 n 個

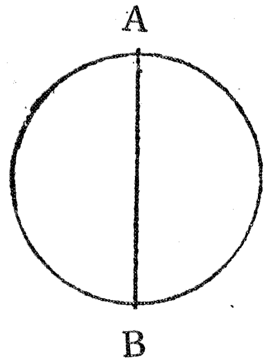
∴自 n 個頂點中任取 2 點在一半圓上之方法數 $=$

$n \cdot C^{\frac{n-1}{2}}_{1}$ 種

$$P = \frac{n \cdot C^{\frac{n-1}{2}}_{1}}{C^{n}_{2}} = \frac{n \cdot \frac{n-1}{2}}{\frac{n(n-1)}{2\,!}} = 1$$

b. $r=3$

(a)同上，令A點爲 r 個頂點之一，A至B之順時針方向弧上有 $\frac{n-1}{2}$ 個頂點（A除外），則由此 $\frac{n-1}{2}$ 個頂點中任取二點必與A在同一半圓上，故其方法數 $=C^{\frac{n-1}{2}}_{2}$ 種



(b)此種A之頂點共有 n 個

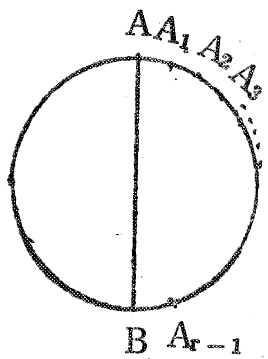
∴自 n 個頂點中任取 3 點在一半圓上之方法數 $=n\cdot C^{\frac{n-1}{2}}_{2}$

$$\therefore P=\frac{n\cdot C^{\frac{n-1}{2}}_{2}}{C^{n}_{3}}=\frac{3(n-3)}{4(n-2)}$$

c. 同理　$r=4,5,6\cdots\cdots$ 亦同

當 $r=r$ 時

(a)令A點爲爲 r 個頂點之一，A至B之順時針方向弧上有 $\frac{n-1}{2}$ 個點，則由此 $\frac{n-1}{2}$ 個點中任取 $(r-1)$ 個頂點 A_1、$A_2\cdots\cdots A_{r-1}$ 必與A在同一半圓上，故其方法數 $=C^{\frac{n-1}{2}}_{r-1}$ 種



(b)此種A之頂點共有 n 個

∴自 n 個頂點任取 r 點在一半圓上之方法數 $=n\cdot C^{\frac{n-1}{2}}_{r-1}$ 種

$$\therefore P=\frac{n\cdot C^{\frac{n-1}{2}}_{r-1}}{C^{n}_{r}}=\frac{\dfrac{n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}\cdots\frac{n-2r+3}{2}}{(r-1)!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$$= \frac{r}{2^{r-1}} \cdot \frac{(n-3)(n-5)\cdots\cdots(n-2r+3)}{(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}$$

命題7中之圓內接正n邊形，當$n\to\infty$時，可視爲自圓上任取相異r點皆在一半圓上之機率。

當$n=2K \quad K\in N$時

a. $r=2 \quad P=\lim\limits_{n\to\infty} 1=1$

b. $r=3 \quad P=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{4(n-1)}=\dfrac{3}{4}$

c. $r=r \quad P=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r}{2^{r-1}} \cdot \dfrac{n(n-2)(n-4)\cdots(n-2r+4)}{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}$

$$= \frac{r}{2^{r-1}}$$

又當$n=2K+1 \quad K\in N$時

a. $r=2 \quad P=\lim\limits_{n\to\infty} 1=1$

b. $r=3 \quad P=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3(n-3)}{4(n-2)}=\dfrac{3}{4}$

c. $r=r \quad P=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r}{2^{r-1}} \cdot \dfrac{(n-3)(n-5)\cdots\cdots(n-2r+3)}{(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}$

$$= \frac{r}{2^{r-1}}$$

∴自圓上任取相異r點皆同在一半圓上之機率$P=\dfrac{r}{2^{r-1}}$

推廣3：推廣2中，只是自圓上任取r點皆在一半圓上之機率，若是在$\frac{1}{3}$圓，$\frac{1}{4}$圓……$\frac{1}{m}$圓（$m\in N$），其機率又是多少呢？

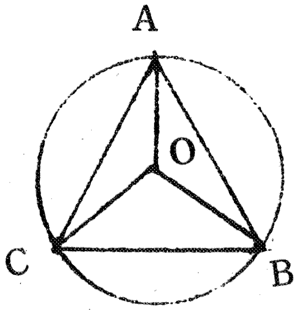
命題8：圓內接正n邊形，任取相異r個頂點同在一個$\frac{1}{3}$圓上之機率$P=$？

假設$n=3K \quad K\in N$時

(1)從n個頂點中任取三頂點A.B.C

使半徑OA．OB．OC將圓等分爲三等分。

(2)令A點爲 r 個頂點之一，則由小$\overset{\frown}{AB}$上之$\frac{n}{3}$個頂點（A除外，B包含在內）中任取（r－1）個點，必與A點在同一$\frac{1}{3}$圓上，故其方法數＝$C^{\frac{n}{3}}_{r-1}$種



(3)此種A之頂點共有n個

∴自n個頂點中任取r點皆在一個$\frac{1}{3}$圓上之方法數＝$n\cdot C^{\frac{n}{3}}_{r-1}$種

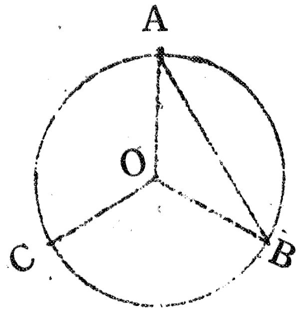
$$\therefore P=\frac{n\cdot C^{\frac{n}{3}}_{r-1}}{C^{n}_{r}}=\frac{\dfrac{n\cdot\frac{n}{3}\cdot\frac{n-3}{3}\cdot\frac{n-6}{3}\cdots\frac{n-3(r-2)}{3}}{(r-1)!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$$=\frac{r}{3^{r-1}}\cdot\frac{n(n-3)(n-6)\cdots\cdots[n-3(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}$$

又設 $n=3K+1\quad K\in N$

(1)從n個頂點中任取一點A，另在圓上取B、C二點，使$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$等分圓爲三等分，則B、C不爲頂點。

(2)令A爲r個頂點之一，則由小$\overset{\frown}{AB}$上之$\frac{n-1}{3}$個頂點中任取（r－1）個點必與A在同一$\frac{1}{3}$圓上，故其方法數＝$C^{\frac{n-1}{3}}_{r-1}$種



(3)此種A點共有n個

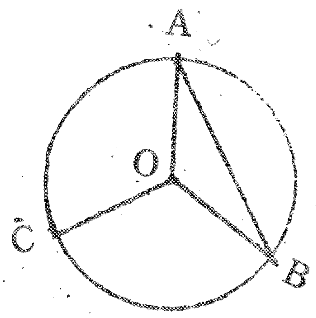
∴自n個頂點中任取r點皆在一個$\frac{1}{3}$圓上之方法數＝$n\cdot C^{\frac{n-1}{3}}_{r-1}$種

$$\therefore P = \frac{n \cdot C^{\frac{n-1}{3}}_{r-1}}{C^n_r} = \frac{\dfrac{n \cdot \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-4}{3} \cdot \frac{n-7}{3} \cdots \frac{n-1-3(r-2)}{3}}{(r-1)!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$$= \frac{r}{3^{r-1}} \cdot \frac{(n-4)(n-7)(n-10)\cdots\cdots[n-1-3(r-2)]}{(n-2)(n-3)(n-4)\cdots\cdots(n-r+1)}$$

又 $n = 3K+2 \quad K \in N$

(1)從 n 個頂點中任取一點 A，另在圓上取 B、C，使半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 等分圓為三等分，則 B、C 不為頂點。



(2)令 A點為 r 個頂點之一，則由小 $\overset{\frown}{AB}$ 上之 $\frac{n-2}{3}$ 個頂點（A除外，不包含 B）中任取（r−1）個點必與A在同一$\frac{1}{3}$圓，故其方法數 $= C^{\frac{n-2}{3}}_{r-1}$ 種

(3)此種 A 頂點共有 n 個

$\therefore$ n 個頂點中任取 r 點皆在一個$\frac{1}{3}$圓上之方法數 $= n \cdot C^{\frac{n-1}{3}}_{r-1}$ 種

$$\therefore P = \frac{n \cdot C^{\frac{n-1}{3}}_{r-1}}{C^n_r} = \frac{r}{3^{r-1}} \cdot \frac{(n-2-3)(n-2-6)\cdots[n-2-3(r-2)]}{(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}$$

在命題 8 中圓內接正 n 邊形，當 $n \to \infty$ 可視為自圓上任取相異 r 點皆在一個$\frac{1}{3}$圓上之機率。

當 $n = 3K \quad K \in N$

$$P = \lim_{n \to \infty} \frac{r}{3^{r-1}} \cdot \frac{n(n-3)(n-6)\cdots[n-3(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)} = \frac{r}{3^{r-1}}$$

當 $n = 3K+1 \quad K \in N$ 時

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{3^{r-1}}\cdot\frac{(n-4)(n-7)\cdots[n-1-3(r-2)]}{(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}=\frac{r}{3^{r-1}}$$

當 $n=3K+2\quad K\in N$ 時

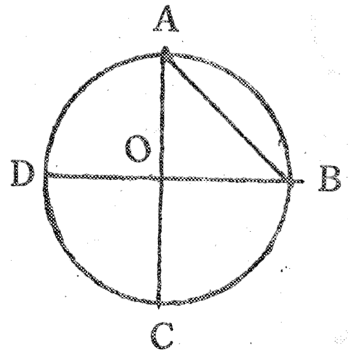
$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{3^{r-1}}\cdot\frac{(n-2-3)(n-2-6)\cdots[n-2-3(r-2)]}{(n-2)(n-3)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)}=\frac{r}{3^{r-1}}$$

∴自圓上任取相異 r 點皆在一個 $\frac{1}{3}$ 圓上之機率 $P=\dfrac{r}{3^{r-1}}$

命題 9：圓之內接正 n 邊形，任取 r 個頂點，則此 r 個頂點皆在一個 $\frac{1}{4}$ 圓上之機率 $P=?$

先設 $n=4K\quad K\in N$

(1)從 n 個頂點中任取四點 A、B、C、D，使半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$ 等分圓爲四等分。



(2)令 A 爲 r 個頂點之一，則由小 $\overset{\frown}{AB}$ 上之 $\frac{n}{4}$ 個頂點中（A除外，包含 B）任取（$r-1$）個頂點，必與 A 在同一個 $\frac{1}{4}$ 圓上，

故其方法數 $=C^{\frac{n}{4}}_{r-1}$ 種

(3)此種 A 之頂點共有 n 個

∴自 n 個頂點中任取相異 r 點皆在一個 $\frac{1}{4}$ 圓上之方法數

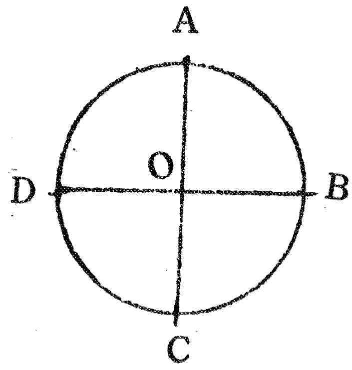
$=n\cdot C^{\frac{n}{4}}_{r-1}$ 種

$$\therefore P=\frac{n\cdot C^{\frac{n}{4}}_{r-1}}{C^{n}_{r}}=\frac{\dfrac{n\cdot\frac{n}{4}\cdot\frac{n-4}{4}\cdot\frac{n-8}{4}\cdots\frac{n-4(r-2)}{4}}{(r-1)!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$$=\frac{r}{4^{r-1}}\cdot\frac{n(n-4)(n-8)\cdots[n-4(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}$$

又設 $n=4K+1 \quad K\in N$

(1)自 n 個頂點中任取一點 A，另在圓上取三點 B、C、D 使半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$ 等分圓爲四等分，則 B、C、D 不爲頂點。



(2)令 A 點爲 r 個頂點之一，則由小 $\overset{\frown}{AB}$ 上之 $\frac{n-1}{4}$ 個頂點中（A除外）任取（r－1）個點必與 A 在同一個 $\frac{1}{4}$ 圓上，故其方法數 $=C^{\frac{n-1}{4}}_{r-1}$ 種

(3)此種 A 點共有 n 個

∴自 n 個頂點中，任取相異 r 點皆在一個 $\frac{1}{4}$ 圓上之方法數

$=n\cdot C^{\frac{n-1}{4}}_{r-1}$ 種

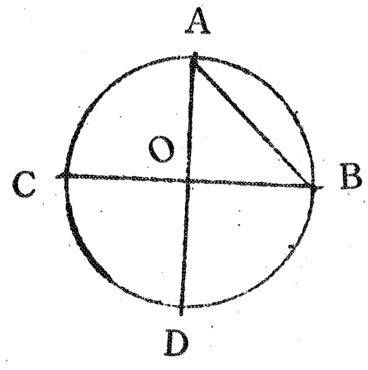
$$\therefore P=\frac{n\cdot C^{\frac{n-1}{4}}_{r-1}}{C^{n}_{r}}$$

$$=\frac{\dfrac{n\cdot\frac{n-1}{4}\cdot\frac{n-1-4}{4}\cdot\frac{n-1-8}{4}\cdots\frac{n-1-4(r-2)}{4}}{(r-1)!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$$=\frac{r}{4^{r-1}}\cdot\frac{(n-1-4)(n-1-8)\cdots\cdots[n-1-4(r-2)]}{(n-2)(n-3)(n-4)\cdots(n-r+1)}$$

當 $n=4K+2 \quad K\in N$ 時

(1)自 n 個頂點中，任取一點 A，作直徑 $\overline{AD}$ 則 D 爲另一頂點，再另外在圓上取二點 B、C 使 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$ 等分圓爲四等分。



(2)令 A 爲 r 個頂點之一，則由小

$\widehat{AB}$ 上之 $\frac{n-2}{4}$ 個頂點中（A
除外）任取（r－1）個點必與
A在同一個$\frac{1}{4}$圓上，故其方法
數＝$C^{\frac{n-2}{4}}_{r-1}$種
(3)此種A共有n個
∴自n個頂點中任取相異r點皆在一個$\frac{1}{4}$圓上之方法數

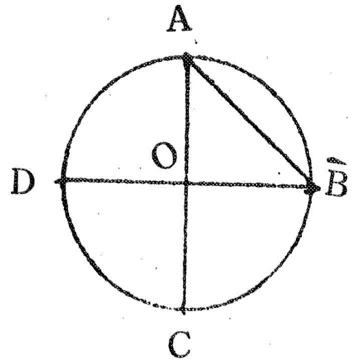
$$= n \cdot C^{\frac{n-2}{4}}_{r-1} \text{ 種}$$

$$\therefore P = \frac{n \cdot C^{\frac{n-2}{4}}_{r-1}}{C^n_r}$$

$$= \frac{r(n-2)(n-2-4)(n-2-8)\cdots\cdots[n-2-4(r-2)]}{4^{r-1}\cdot(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)}$$

$$= \frac{r}{4^{r-1}} \cdot \frac{(n-2)(n-2-4)(n-2-8)\cdots[n-2-4(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}$$

又當 $n = 4K + 3 \quad K \in N$
(1)自n個頂點中任取一點A另在
圓上取三點B、C、D，使半徑
$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$等分圓爲四
等分，則B、C、D不爲頂點。



(2)令A爲r個頂點之一，則由小
$\widehat{AB}$ 上之 $\frac{n-3}{4}$ 個頂點中（A
除外）任取（r－1）個點必與
A在同一個$\frac{1}{4}$圓上，故其方法
數＝$C^{\frac{n-3}{4}}_{r-1}$ 種
(3)此種A點共有n個
∴自n個頂點中任取相異r點皆在一個$\frac{1}{4}$圓上之方法數＝
$n \cdot C^{\frac{n-3}{4}}_{r-1}$ 種

$$\therefore P = \frac{n \cdot C^{\frac{n-3}{4}}_{r-1}}{C^n_r}$$

$$= \frac{r}{4^{r-1}} \cdot \frac{(n-3)(n-3-4)(n-3-8)\cdots[n-3-4(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}$$

命題9中圓內接正n邊形，當 $n\to\infty$ 時，即視爲圓上任取相異r點皆在一個 $\frac{1}{4}$ 圓上之機率。

當(1)　$n = 4K$，$K\in N$ 時

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{4^{r-1}} \cdot \frac{n(n-4)(n-8)\cdots[n-4(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)} = \frac{r}{4^{r-1}}$$

(2)　$n = 4K+1$，$K\in N$ 時

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{4^{r-1}} \cdot \frac{(n-1-4)(n-1-8)\cdots[n-1-4(r-2)]}{(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}$$

$$= \frac{r}{4^{r-1}}$$

(3)　$n = 4K+2$，$K\in N$ 時

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{4^{r-1}} \cdot \frac{(n-2)(n-2-4)(n-2-8)\cdots[n-2-4(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}$$

$$= \frac{r}{4^{r-1}}$$

(4)　$n = 4K+3$，$K\in N$ 時

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{4^{r-1}} \cdot \frac{(n-3)(n-3-4)(n-3-8)\cdots[n-3-4(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}$$

$$= \frac{r}{4^{r-1}}$$

∴自圓上任取相異r點皆在一個 $\frac{1}{4}$ 圓上之機率 $P = \frac{r}{4^{r-1}}$

命題10：由命題8及命題9得知

自圓上任取相異r點皆在一個 $\frac{1}{2}$ 圓上之機率 $= \frac{r}{2^{r-1}}$

自圓上任取相異 r 點皆在一個$\frac{1}{3}$圓上之機率＝$\frac{r}{3^{r-1}}$

自圓上任取相異 r 點皆在一個$\frac{1}{4}$圓上之機率＝$\frac{r}{4^{r-1}}$

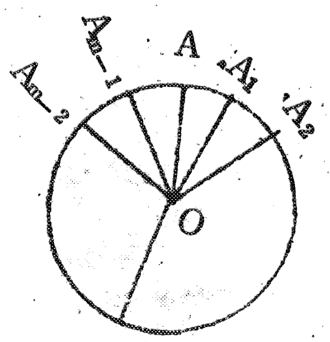
則自圓上任取相異 r 點皆在一個$\frac{1}{m}$圓（ $m\in N$ ）上之機率是否＝$\frac{r}{m^{r-1}}$呢？

經過了無數次的討論後，我們發現如下：

(1)圓內接正 n 邊形，任取 r 個頂點，則此 r 個頂點皆在一個$\frac{1}{m}$（ $m\in N$ ）圓上之機率 P＝？

我們亦先設

a。 $n=mK$ ， $m\in N$



(a)從 n 個頂點中任取m點 A ， A_1、A_2、A_3 …… A_{m-1} 使半徑$\overline{OA}$、$\overline{OA_1}$、$\overline{OA_2}$ ……… $\overline{OA_{m-1}}$ 等分圓為m等分。

(b)令A為 r 個頂點之一，則由小$\overset{\frown}{AA_1}$ 上之$\frac{n}{m}$個頂點（ A除外，包含 A_1 ）中任取（ r－1）個點必與A在同一個$\frac{1}{m}$圓上，故其方法數＝$C^{\frac{n}{m}}_{r-1}$ 種

(c)此種A點共有 n 個

∴自 n 個頂點中任取相異 r 點皆在一個$\frac{1}{m}$圓上之方法數

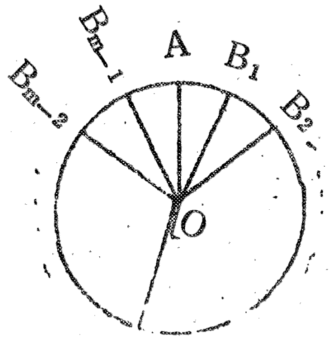
$=n\cdot C^{\frac{n}{m}}_{r-1}$

$$\therefore P=\frac{n\cdot C^{\frac{n}{m}}_{r-1}}{C^{n}_{r}}=\frac{\dfrac{n\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{n-m}{m}\cdot\frac{n-2m}{m}\cdot\frac{n-m(r-2)}{m}}{(r-1)!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$$=\frac{r}{m^{r-1}}\cdot\frac{n(n-m)(n-2m)\cdots[n-m(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}$$

b。$n=mK+1$，$m\in N$

(a)從 n 個頂點中任取一點 A，另在圓上取 $(m-1)$ 點 B_1、B_2、B_3 …… B_{m-1} 使半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}_1$、$\overline{OB}_2$ ……… $\overline{OB}_{m-1}$ 等分圓爲 m 等分，則 B_1、B_2、B_3 … B_{m-1} 不爲頂點。



(b)令 A 爲 r 個頂點之一，則由小 $\widehat{AB}_1$ 上之 $\frac{n-1}{m}$ 個頂點（A除外）中任取 $(r-1)$ 個點必與 A 同在一個 $\frac{1}{m}$ 圓上，

故其方法數 $=C^{\frac{n-1}{m}}_{r-1}$ 種

(c)此種 A 點共有 n 個

∴自 n 個頂點中任取相異 r 點皆在一個 $\frac{1}{m}$ 圓上之方法數

$=n\cdot C^{\frac{n-1}{m}}_{r-1}$ 種

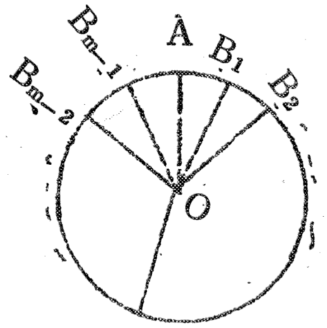
$$\therefore P=\frac{n\cdot C^{\frac{n-1}{m}}_{r-1}}{C^n_r}$$

$$=\frac{r}{m^{r-1}}\cdot\frac{(n-1-m)(n-1-2m)\cdots[n-1-m(r-2)]}{(n-2)(n-3)(n-4)\cdots(n-r+1)}$$

c。$n=mK+2$，$K\in N$

(a)從 n 個頂點中任取一點 A，另在圓上取 $(m-1)$ 點使半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}_1$、$\overline{OB}_2$ ……… $\overline{OB}_{m-1}$ 等分圓爲 m 等分。

(b) 令A爲 r 個頂點之一，則由小 $\overset{\frown}{AB}_1$ 上之 $\frac{n-2}{m}$ 個頂點（A除外）中任取 $(r-1)$ 個點必與A在同一個 $\frac{1}{m}$ 圓上，故其方法數 $= C^{\frac{n-2}{m}}_{r-1}$ 種



(c)此種A點共有 n 個

∴自 n 個頂點中任取相異 r 點皆在同一 $\frac{1}{m}$ 圓上之方法數 $= n \cdot C^{\frac{n-2}{m}}_{r-1}$

$$\therefore P = \frac{n \cdot C^{\frac{n-2}{m}}_{r-1}}{C^n_r}$$

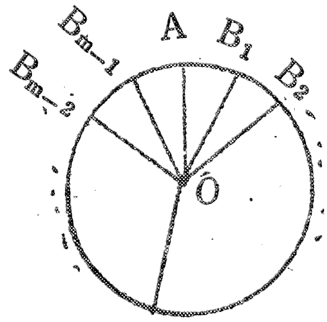
$$= \frac{r}{m^{r-1}} \cdot \frac{(n-2)(n-2-m)\cdots[n-2-m(r-2)]}{(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)}$$

d。同理　$n = mK+3$，$mK+4$，$mK+5\cdots\cdots$

$mK+(m-1)$ 亦同

當 $n = mK+g$，$m \in N$，$g \in \{0,1,2,3\cdots m-1\}$

(a)自 n 個頂點任取一點A，另在圓上取 $(m-1)$ 個點 B_1、$B_2\cdots\cdots B_{m-1}$ 使半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}_1$、$\overline{OB}_2\cdots\cdots$ OB_{m-1} 等分圓爲 m 等分



(b) 令A爲 r 個頂點之一，則由小 $\overset{\frown}{AB}_1$ 上之 $\frac{m-g}{m}$ 個頂點（A除外）中任取 $(r-1)$ 點必與A在同一 $\frac{1}{m}$ 圓上，故其方法數 $=$

$C^{\frac{n-g}{m}}_{r-1}$ 種

(c)此種A點共有 n 個

(i) 自 n 個頂點中任取相異 r 點皆在一個 $\frac{1}{m}$ 圓上之方

$$\text{法數}=n\cdot C^{\frac{n-g}{m}}_{r-1}\text{種}$$

$$\therefore P=\frac{n\cdot C^{\frac{n-g}{m}}_{r-1}}{C^{n}_{r}}$$

$$=\frac{\dfrac{n\cdot\dfrac{n-g}{m}\cdot\dfrac{n-g-m}{m}\cdots\dfrac{n-g-m(r-2)}{m}}{(r-1)!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$$=\frac{r}{m^{r-1}}\cdot\frac{(n-g)(n-g-m)\cdots[n-g-m(r-2)]}{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}$$

(ii) 圓內接正 n 邊形當 $n\to\infty$ 時可視爲一圓，則自圓上任取相異 r 點皆在一個$\frac{1}{m}$圓上之機率

當 $n=mK+g$，m、$K\in N$，$g\in\{0,1,2\cdots m-1\}$

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{m^{r-1}}\cdot\frac{(m-g)(m-g-m)(m-g-2m)\cdots[n-g-m(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}$$

$$=\frac{r}{m^{r-1}}$$

$\therefore$自圓上任取相異 r 點在一個$\frac{1}{m}$圓上之機率$=\frac{r}{m^{r-1}}$

推廣 4：在推廣 3 中只限制在$\frac{1}{m}$（$m\in N$）圓上，若是在$\frac{2}{m}$，$\frac{3}{m}$，$\frac{4}{m}$ ‥$\frac{\ell}{m}$（$\frac{\ell}{m}\leq\frac{1}{2}$）圓上時又如何呢？

我們暫且先以$\frac{2}{5}$圓、$\frac{3}{7}$圓爲例，尋求其通則。

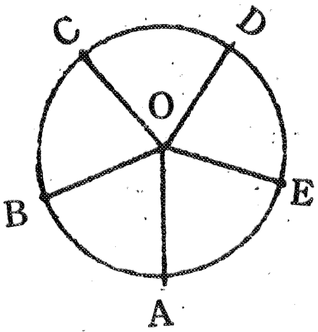
命題 10：圓內接正 n 邊形，任取 r 個頂點皆在一個$\frac{2}{5}$圓上之機率 $P=?$

我們先設 $n=5K$，$K\in N$ 時

(1)從 n 個頂點中任取五點 A、B、C、D、E 使半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、

$\overline{OD}$、$\overline{OE}$ 等分圓爲五等分。

(2)令A點爲 r 個頂點之一，則由小 $\overset{\frown}{AC}$ 上之 $\frac{2n}{5}$ 個頂點（A除外，包含C）中任取（r−1）個點必與A同在一個$\frac{2}{5}$圓上，故其方法數＝$C^{\frac{2n}{5}}_{r-1}$ 種



(3)此種A點共有n個

∴自n個頂點中任取相異r點皆在一個$\frac{2}{5}$圓上之方法數＝

$n \cdot C^{\frac{2n}{5}}_{r-1}$ 種

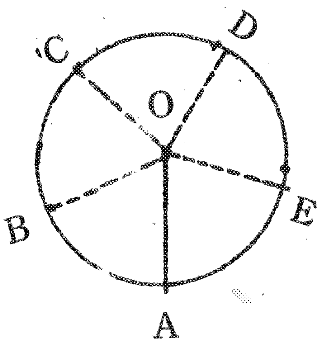
$$\therefore P = \frac{n \cdot C^{\frac{2n}{5}}_{r-1}}{C^{n}_{r}}$$

$$= \frac{\dfrac{n \cdot \frac{2n}{5} \cdot \frac{2n-5}{5} \cdot \frac{2n-10}{5} \cdots \frac{2n-5(r-2)}{5}}{(r-1)!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$$= \frac{r}{5} \cdot \frac{2n(2n-5)(2n-10)\cdots[2n-5(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}$$

又當 $n = 5K + 1$，$K \in N$ 時

(1)從n個頂點中任取一點A，另在圓上取四點B、C、D、E使半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$ 等分圓爲五等分，則B、C、D、E不爲頂點



(2)令A點爲 r 個頂點之一，則由小 $\overset{\frown}{AB}$ 上之 $\frac{2n-2}{5}$ 個頂點中（A除外）任取（r−1）個點必與A在

同一個$\frac{2}{5}$圓上，故其方法數$=C_{r-1}^{\frac{2n-2}{5}}$種

(3)此種A點共有 n 個

∴自 n 個頂點中任取相異 r 個點皆在一個$\frac{2}{5}$圓上之方法數＝

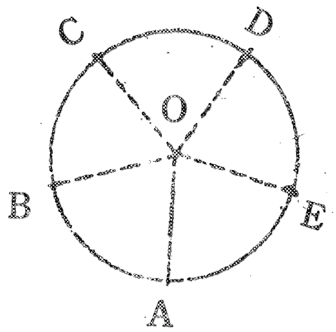
$n \cdot C_{r-1}^{\frac{2n-2}{5}}$ 種

$$\therefore P = \frac{n \cdot C_{r-1}^{\frac{2n-2}{5}}}{C_r^n}$$

$$= \frac{r}{5^{r-1}} \cdot \frac{(2n-2)(2n-2-5)\cdots[2n-2-5(r-2)]}{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}$$

又當$n = 5K+2$，$K \in N$時

(1)從 n 個頂點中任取一點A，另在圓上取四點B、C、D、E使半徑OA、OB、OC、OD、OE等分圓爲五等分，B、C、D、E不爲頂點



(2)令A爲 r 個頂點之一，則由小 AC 上之 $\frac{2n-4}{2}$ 個頂點中（A除外）任取（r－1）個點必與A在同一個$\frac{2}{5}$圓上，故其方法數$=C_{r-1}^{\frac{2n-4}{5}}$ 種

(3)此種A點有 n 個

∴自 n 個頂點中任取相異 r 點皆在同一個$\frac{2}{5}$圓上之方法數

$= n \cdot C_{r-1}^{\frac{2n-4}{5}}$ 種

$$\therefore P = \frac{n \cdot C_{r-1}^{\frac{2n-4}{5}}}{C_r^n}$$

$$= \frac{r}{5^{r-1}} \cdot \frac{(2n-4)(2n-4-5)\cdots[2n-4-5(r-2)]}{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}$$

同理當 $n=5K+3$，$K\in N$ 時

$$P=\frac{r}{5^{r-1}}\cdot\frac{(2n-1)(2n-1-5)\cdots[2n-1-5(r-2)]}{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}$$

$n=5K+4$，$K\in N$ 時

$$P=\frac{r}{5^{r-1}}\cdot\frac{(2n-3)(2n-3-5)\cdots[2n-3-5(r-2)]}{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}$$

命題10中的圓內接正 n 邊形，當 $n\to\infty$ 時，即自圓上任取相異 r 點在一個 $\frac{2}{5}$ 圓上之機率（若 $n\leq m<n+1$，$n\in N$，則 $[m]=n$，令 $S=[\frac{2q}{5}]$）。

當 $n=5K+q$，$K\in N$，$q\in\{0,1,2,3,4\}$

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{5^{r-1}}\cdot$$

$$\frac{(2n-2q+5s)(2n-2q+5s-5)\cdots[2n-2q+5s-5(r-2)]}{(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)}$$

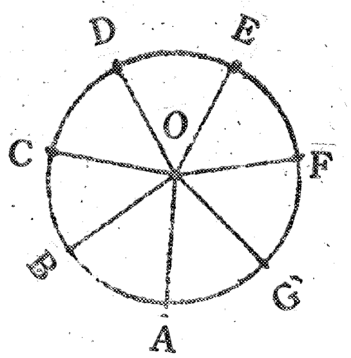
$$=(\frac{2}{5})^{r-1}\cdot r$$

∴自圓上任取相異 r 點皆在一個 $\frac{2}{5}$ 圓上之機率 $=(\frac{2}{5})^{r-1}\cdot r$

命題11：圓內接正 n 邊形，任取相異 r 個頂點，皆可在一個 $\frac{3}{7}$ 圓上之機率 $P=$？

我們可先設 $n=7K$，$K\in N$

(1)由 n 個頂點中任取七點 A、B、C、D、E、F、G 使半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$、$\overline{OF}$、$\overline{OG}$ 等分圓為七等分。



(2)令 A 為 r 個頂點之一，則由小 $\overset{\frown}{AD}$ 上之 $\frac{3n}{7}$ 個頂點（A除外，B、C、D 均包含）中任取 $(r-1)$ 點必與 A 在同一個 $\frac{3}{7}$ 圓

上，故其方法數 $= C^{\frac{3n}{7}}_{r-1}$ 種

(3)此種A點有n個

∴自n個頂點中任取相異r點皆在同一個$\frac{3}{7}$圓上之方法數

$= n \cdot C^{\frac{3n}{7}}_{r-1}$ 種

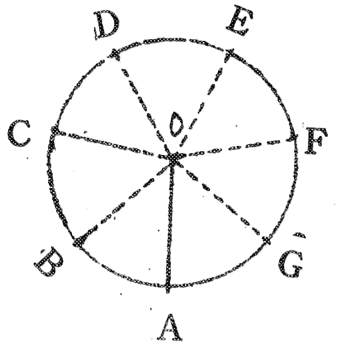
$$\therefore P = \frac{n \cdot C^{\frac{3n}{7}}_{r-1}}{C^n_r}$$

$$= \frac{\dfrac{n \cdot \frac{3n}{7} \cdot \frac{3n-7}{7} \cdot \frac{3n-14}{7} \cdots\cdots \frac{3n-7(r-2)}{7}}{(r-1)!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$$= \frac{r}{7^{r-1}} \cdot \frac{3n(3n-7)(3n-14)\cdots[3n-7(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}$$

又設 $n = 7K + 1$，$K \in N$

(1)自n個頂點中任取一點A，另在圓上取六點B、C、D、E、F、G使半徑$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$、$\overline{OF}$、$\overline{OG}$等分圓爲七等分，則B、C、D、E、F、G不爲頂點。



(2)令A爲r個頂點之一，則由小$\overset{\frown}{AD}$上之$\frac{3n-3}{7}$個頂點中（A除外）任取（r−1）個點必與A在同一個$\frac{3}{7}$圓上，故其方法數 $= C^{\frac{3n-3}{7}}_{r-1}$ 種

(3)此種A點有n個

∴自 n個頂點中任取相異r點皆在一個$\frac{3}{7}$圓上之方法數

$= n \cdot C^{\frac{3n-3}{7}}_{r-1}$ 種

$$\therefore P = \frac{n \cdot C^{\frac{3n-3}{7}}_{r-1}}{C^n_r}$$

$$= \frac{\dfrac{n \cdot \dfrac{3n-3}{7} \cdot \dfrac{3n-3-7}{7} \cdots \dfrac{3n-3-7(r-2)}{7}}{(r-1)!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$$= \frac{r}{7^{r-1}} \cdot \frac{(3n-3)(3n-3-7)\cdots[3n-3-7(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}$$

同理當 $n = 7K + q$，$K \in N$，$q \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$

$$S = [\frac{3q}{7}]$$

$$P = \frac{n \cdot C^{\frac{3n-3q+7s}{7}}_{r-1}}{C^n_r}$$

$$= \frac{\dfrac{n \cdot \dfrac{3n-3q+7s}{7} \cdot \dfrac{3n-3q+7s-7}{7} \cdot \dfrac{3n-3q+7s-7(r-2)}{7}}{(r-1)!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$$= \frac{r}{7^{r-1}} \cdot \frac{(3n-3q+7s)(3n-3q+7s-7)\cdots[3n-3q+7s-7(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}$$

命題11中之圓內接正 n 邊形，當 $n \to \infty$ 時，即視爲自圓上任取相異 r 點皆在一個$\frac{3}{7}$圓上之機率

設 $n = 7K + q$，$K \in N$，$q \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$

$$S = [\frac{3q}{7}]$$

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{7^{r-1}} \cdot \frac{(3n-3q+7s)(3n-3q+7s-7)\cdots[3n-3q+7s-7(r-2)]}{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}$$

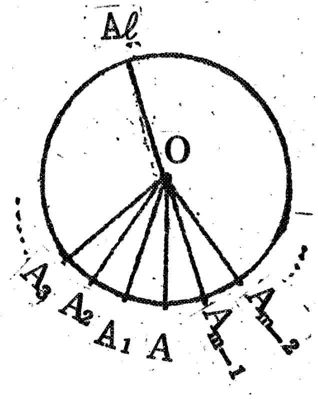
$$= (\frac{3}{7})^{r-1} \cdot r$$

∴自圓上任取相異 r 點皆在一個$\frac{3}{7}$圓上之機率＝$(\frac{3}{7})^{r-1}\cdot r$

由命題10及11得知，自圓上任取相異 r 點皆在一個$\frac{2}{5}$圓之機率＝$(\frac{2}{5})^{r-1}\cdot r$，皆在一個$\frac{3}{7}$圓上之機率＝$(\frac{3}{7})^{r-1}\cdot r$，則當 r 點皆在一個$\frac{\ell}{m}$圓上（$\frac{\ell}{m}\leq\frac{1}{2}$）時之機率是否亦等於$(\frac{\ell}{m})^{r-1}\cdot r$呢？

我們可設 $n = mK$，$K\in N$時

(1)自 n 個頂點中任取一點 A，另取（m－1）點 A_1、A_2 … A_{m-1}使$\overline{OA}$、$\overline{OA_1}$、$\overline{OA_2}$ … $\overline{OA}_{m-1}$ 等分圓爲m等分，A_1、A_2 … A_{m-1} 均爲頂點。



(2)令A爲 r 個頂點之一，則由小$\overset{\frown}{AA_l}$ 上之$\frac{\ell n}{m}$個頂點（A除外，包含A_l）中任取（r－1）個點必與A在同一個$\frac{\ell}{m}$圓上，故其方法數＝$C^{\frac{ln}{m}}_{r-1}$ 種

(3)此種 A點有 n 個

∴自 n 個頂點中任取相異 r 點皆在一個$\frac{\ell}{m}$圓上之方法數

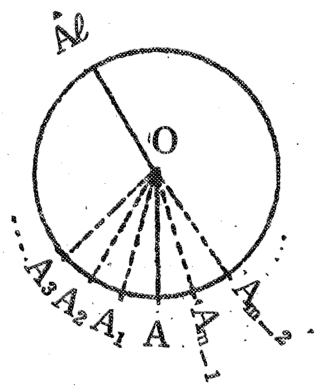
$= n\cdot C^{\frac{ln}{m}}_{r-1}$ 種

$$\therefore P=\frac{n\cdot C^{\frac{\ell n}{m}}_{r-1}}{C^{n}_{r}}$$

$$=\frac{r}{m^{r-1}}\cdot\frac{\ell n(\ell n-m)\cdots\cdots[\ell n-m(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}$$

又設 $n=mK+1$，$K\in N$時

(1)自 n 個頂點中任取一點 A，另在圓上取 $(m-1)$ 點 A_1、A_2 …… A_{m-1} 使半徑$\overline{OA}$, $\overline{OA_1}$，$\overline{OA_2}$ … $\overline{OA_{m-1}}$ 等分圓為m等分，A_1、A_2 … A_{m-1} 不為頂點。



(2)令 A 為 r 個頂點之一，則由小 $\overset{\frown}{AA_\ell}$ 上之 $\frac{\ell n-n}{m}$ 個頂點中（ A 除外）任取（ $r-1$ ）個點必與 A 在同一個$\frac{\ell}{m}$圓上，故其方法數$=C^{\frac{\ell n-n}{m}}_{q-1}$ 種

(3)此種 A點共有 n 個

∴自 n 個頂點中任取相異 r 點皆在一個$\frac{\ell}{m}$圓上之方法數

$=n\cdot C^{\frac{\ell n-n}{m}}_{r-1}$ 種

$$\therefore P=\frac{n\cdot C^{\frac{\ell n-n}{m}}_{r-1}}{C^{n}_{r}}$$

$$=\frac{r}{m^{r-1}}\cdot\frac{(\ell n-\ell)(\ell n-\ell-m)\cdots[\ell n-\ell-m(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}$$

同理當 $n=mK+q$，$K\in N$，$q\in\{0,1,2\cdots m-1\}$

$$P=\frac{n\cdot C^{\frac{\ell n-q\ell+ms}{m}}_{r-1}}{C^{n}_{r}}\qquad\left(S=\left[\frac{q\ell}{m}\right]\right)$$

$$= \frac{r}{m^{r-1}} \cdot \frac{(\ell n-q\ell+ms)(\ell n-q\ell+ms-m)\cdots[\ell n-q\ell+ms-m(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}$$

∴自圓上任取相異 r 點皆在一個$\frac{\ell}{m}$上之機率

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{m^{r-1}} \cdot \frac{(\ell n-q\ell+ms)(\ell n-q\ell+ms-m)\cdots[\ell n-q\ell+ms-m(r-2)]}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}$$

$$= \left(\frac{\ell}{m}\right)^{r-1} \cdot r$$

（設 $n = mK + q$，$q \in \{0, 1, 2, 3 \cdots m-1\}$，$S = [\frac{q\ell}{m}]$）

∴自圓上任取相異 r 點皆在一個$\frac{\ell}{m}$圓上之機率 $= \left(\frac{\ell}{m}\right)^{r-1} \cdot r$

推廣 5：於推廣 4 中，我們得到上式之規律性，當$\frac{\ell}{m} \in Q$（有理數），且$\frac{\ell}{m} \leq \frac{1}{2}$時永遠成立，但事實上，當$\frac{\ell}{m} \in Q^1$（無理數）時，仍是成立的。

我們先設$M \in N$，並取一數$\frac{b}{a} \in Q$，使 $\left|\frac{\ell}{m} - \frac{b}{a}\right| < \frac{1}{m}$成立

∵對所有$M \in N$，上不等式都成立

∴$\frac{\ell}{m} \to \frac{b}{a}$

故對所有實數，本公式仍然適用

即"自圓上任取相異 r 點皆同在一個$\frac{\ell}{m}$圓（$\frac{\ell}{m} \in R$，$\frac{\ell}{m} \leq \frac{1}{2}$）上之機率 $= \left(\frac{\ell}{m}\right)^{r-1} \cdot r$"

四、結論：

由推廣 5，我們得知：

當$\frac{\ell}{m} \in R$，$\frac{\ell}{m} \leq \frac{1}{2}$時

" 自圓上任取相異 r 點皆同在一個$\frac{\ell}{m}$圓上之機率

$$=\left(\frac{\ell}{m}\right)^{r-1}\cdot r$$

五、參考資料：

1. 整數論問題，W. Sierpinski 原著，林聰源譯，民國 65 年楓城出版社印行。
2. 機率入門，黃提源著，民國 63 年協進圖書有限公司印行。
3. Mathematics of Choice Or How To Count Without Counting，Ivon Niven 原著
   排列與組合，楊猷猷編譯，民國 59 年中央書局發行。

評語：對一已知的機率問題，用不同的方法解答，並把問題及解答加以推廣。