婆娑起舞的曲線
高中組數學第二名

私立衛理女子高級中學　　作　　者：曾元君等四名

指導老師：吳家怡

一、前　言：

在知識探索的歷程中，接觸實際的事物是增進學習的最佳方法。

高二下，我們面臨許多二次曲線上的問題，這些問題可以用空間上的概念來解釋。在以往，我們所涉及、所熟知的只限於平面上的幾何圖形。因此，我們對於空間上的概念並非十分明確，而必須借重各種模型來加以深入探討，但是我們對於所接觸到教具，感到並非理想，他們過於死板化。所以我們建立了一套活動的立體模型，希望能夠使教學兩方面進行得更順暢，同時也將一些"性質"加以研究、討論、證明。

二、目　的：

1. 爲使同學們對二次曲線更了解，我們提出一個模型，而此模型具有下列特點：

(1)便宜、美觀、堅固。

(2)容易自製且易於操作。

(3)此模型可比較不同曲面和平面交集的各種關係。

2. 由於這些曲面在空間中具有共同之性質，因此可用同一方程式將其涵蓋。

3. 根據實驗結果，將各曲面與平面之關係，依其方程式之不同，加以整理分類。

三、模型製作與操作：

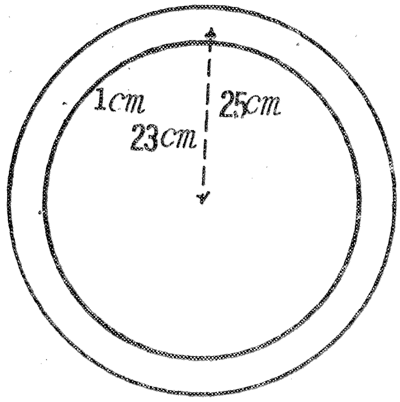
1. 曲面模型：

(1)準備兩塊半徑 25 公分之圓木板，並標出半徑 23 公分之圓。

(2)於半徑 23 公分之圓周上，每隔

一公分處穿洞（如圖）。

(3)使上下二板保持平行，將尼龍線兩端分別固定上下二板之對應洞內，使高度維持 80 公分。



2.幻燈片製作：

方法(1)：將未經曝光的幻燈片裝入幻燈夾內，定出 X 軸、Y 軸，並在由小刀劃出之刻痕上，塗以不同色彩之顏料，（此刻痕在標出各種不同角度的線段）。

方法(2)：

a. 將所須圖形畫在長寬與幻燈片成比例的黑紙上。

b. 色彩：

(a)單色——直接照相。

(b)彩色——黑紙背面貼上所須的玻璃紙。

c. 照相：

(a)將黑紙置於有白色透光玻璃的枱子上。

(b)使用單眼照相機換上顯微鏡頭。

(c)單色——加上所須顏色之濾光鏡照下即可。

(d)彩色——直接照。

(e)將幻燈底片送至照相館冲洗即可。

3.操 ：

(1)固 上板，旋轉下盤，可得不同曲面。

(2)調整幻燈機焦距。

(3)利用幻燈機將影像投射在模型上，放映時，固定在一個高度，待其影像出現後，再上下移動或旋轉，使成不同情況。

四、定　義：

1.

(1)二等圓半徑相等，分別在兩平行平面上，圓心分別在與此面垂直之直線上。

(2)使圓上的點依次 1 — 1 對應，且對應點連線與二平面垂直。

⇒ a. 當保持此狀況時，

所有直線上之點所構成集合，稱爲圓柱面。

b. 以圓心爲中心，將圓轉動 ϕ 角，

且 $0^\circ < \phi < 180^\circ$

則所有直線上的點所成集合稱爲單葉雙曲面。

c. 當 $\phi = 180^\circ$ 時，

則所有直線上的點所成集合稱圓錐面。

2.

(1)空間中方程式爲

$$\begin{cases} X^2+Y^2=23^2 \\ aX+bY+cZ=K \end{cases}$$ 之集合均爲圓

(2)空間中方程式爲

$$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \\ aX+bY+cZ=K \end{cases}$$ 之集合均爲橢圓

(3)空間中方程式爲

$$\begin{cases} X^2=2PY+K \\ aX+bY+cZ=K \end{cases}$$ 之集合均爲拋物線

(4)空間中方程式爲

$$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=K \\ aX+bY+cZ=K \end{cases}$$ 之集合均爲雙曲線

(5)其他定義均將高二課本

五、證　明：

定理 1

(1)半徑 23 公分之一圓。

(2)以 80 公分線段連接二圓上之對應點，使上下二圓上之點呈 1 — 1 對應，並且各線段垂直上下二圓所在平面。

(3)將下圓轉動 ϕ 角（以圓心爲中心）

⇒則各線段所在直線上之點所成曲面方程式

爲 $$\frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{23^2}-\frac{Z^2(1-\cos\phi)}{2K^2}=\frac{1+\cos\phi}{2}$$

註：〔坐標系取正交坐標系，以上下兩圓之圓心聯線爲Z軸，其中點爲原點，再做X、Y軸，Z軸上方及X軸前方爲正K爲上下兩盤至原點之距〕。

Pf：設P（X、Y、Z）爲曲面上任一點，

則 $\exists$ $P_1(X_1、Y_1、Z_1)$ $P_2(X_2、Y_2、Z_2)$ 分別屬於上下圓

$\therefore \overrightarrow{PP_1}=t\overrightarrow{P_2P_1}$

$$[X_1-X, Y_1-Y, Z_1-Z] = t\,[X_1-X_2, Y_1-Y_2, Z_1-Z_2]$$

$$\begin{cases} X = X_1 - t(X_1 - X_2) \cdots\cdots ① \\ Y = Y_1 - t(Y_1 - Y_2) \cdots\cdots ② \\ Z = Z_1 - t(Z_1 - Z_2) \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

而 P_1 在上圓 $\therefore \begin{cases} X_1^2 + Y_1^2 = 23^2 \\ Z_1 = K \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$

P_2 在下圓 $\therefore \begin{cases} X_2^2 + Y_2^2 = 23^2 \\ Z_2 = -K \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$

因下圓旋轉 ϕ 角 $\therefore$ 取 $O_1(O,O,K)$　$O_2(O,O,-K)$

〔註：$O_1 O_2$ 爲上下兩圓盤之圓心〕

則 $\overrightarrow{O_1P_1}$ 與 $\overrightarrow{O_2P_2}$ 夾 ϕ 角

$$\cos\phi = \frac{\overline{O_1P_1}\cdot\overline{O_2P_2}}{|\overrightarrow{O_1P_1}|\,|\overrightarrow{O_2P_2}|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\,\sqrt{X_2^2+Y_2^2}} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{23^2}$$

$$\therefore \frac{X^2}{23^2} + \frac{Y^2}{23^2}$$

$$= \frac{1}{23^2}\{[X_1 - t(X_1-X_2)]^2 + [Y_1 - t(Y_1 - Y_2)]^2\}$$

$$= \frac{1}{23^2}\{23^2 - 2t(X_1^2 - X_1X_2 + Y_1^2 - Y_1Y_2) + t^2(X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 + Y_1^2 - 2Y_1Y_2 + Y_2^2)\}$$

$$= \frac{1}{23^2}\{23^2 - 2t(23^2 - 23^2\cos\phi) + t^2(2\cdot 23^2 - 2\cdot 23^2\cos\phi)\}$$

$$= \frac{1}{23^2}\{23^2 - 2\cdot 23^2(1-\cos\phi)t + 2\cdot 23^2 t^2 (1-\cos\phi)\}$$

$$= \{1 - 2t(1-\cos\phi) + 2t^2(1-\cos\phi)\}$$

$$= 1 + (1-\cos\phi)(2t^2 - 2t)$$

$$= \frac{1}{2}(2t-1)^2(1-\cos\phi) + \frac{1+\cos\phi}{2}$$

由③知 $Z=Z_1-t(Z_1-Z_2)$

④⑤知 $Z_1=h \quad Z_2=-h$ 代入 $Z=h-t(2h)$

$$t=\frac{h-Z}{2h}$$

$$\therefore 2t-1=2\frac{h-Z}{2h}-1=\frac{-Z+h-h}{h}=-\frac{Z}{h}$$

接 $\frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{23^2}=\frac{1}{2}(-\frac{Z}{h})^2(1-\cos\phi)+\frac{1+\cos\phi}{2}$

$$\frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{23^2}=\frac{Z^2(1-\cos\phi)}{2h^2}=\frac{1+\cos\phi}{2}$$

討論：

(1) $\phi=0°$時（卽不旋轉）

$\cos\phi=1$ 其方程式爲 $\frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{23^2}=1$

模型顯出爲一圓柱面

(2) $\phi=180°$時（旋轉半周）

$\cos\phi=-1$ 其方程式爲 $\frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{23^2}-\frac{Z^2}{h^2}=0$

模型顯出爲一圓錐面

(3) $0°<\phi<180°$時 $-1<\cos\phi<1$

其方程式爲 $\frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{23^2}-\frac{Z^2(1-\cos\phi)}{2h^2}=\frac{1+\cos\phi}{2}$

模型顯出爲一單葉雙曲面

定理 2

取垂直 Y Z 平面，且法向量爲〔o.b.c.〕之平面

則其方程式爲 $bY+cZ=K$（取 b, c 均正）

〔註〕：由於圓柱面、圓錐面、單葉雙曲面對稱於中心軸之性質，我們可取特定平面作截面卽可。

Pf：設平面 E 方程式爲 $aX+bY+cZ=K$

則其法向量〔a.b.c〕

而 Y Z 平面法向量〔1.0.0〕

$\because$ 平面E $\perp$ YZ平面　$\therefore$ [a.b.c] $\perp$ [1.0.0]

[a.b.c]·[1.0.0] = 0

$\therefore$ a = 0

故平面E之方程式爲 $bY+cZ=K$　法向量 [o.b.c]

推論：平面 $bY+cZ=K$ 之法向量 [o.b.c] 與Z軸交角W，

則 $\tan W=\dfrac{b}{c}$

定理3.

(1)若 $c\neq 0$　平面E與曲面相交得曲線方程式爲

$$\begin{cases}\dfrac{X^2}{23^2}+\left[\dfrac{1}{23^2}-\dfrac{b^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}\right]Y^2+\dfrac{kb(1-\cos\phi)}{h^2c^2}Y\\ =\dfrac{1+\cos\phi}{2}+\dfrac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}\\ bY+cZ=K\end{cases}$$

(2)若 $c=0$　平面E與曲面相交得曲線方程式爲

$$\begin{cases}\dfrac{X^2}{23^2}-\dfrac{Z^2(1-\cos\phi)}{2h^2}=\dfrac{1+\cos\phi}{2}-\dfrac{k^2}{b^2 23^2}\\ bY=K\end{cases}$$

Pf：
$$\begin{cases}\dfrac{X^2}{23^2}+\dfrac{Y^2}{23^2}-\dfrac{Z^2(1-\cos\phi)}{2h^2}=\dfrac{1+\cos\phi}{2}\cdots\cdots(6)\\ bY+cZ=K\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)\end{cases}$$

a. $c\neq 0$

由(2)知 $Z=\dfrac{k-bY}{c}$ ……(3)代入(1)

$$\frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{23^2}-\frac{(k-bY)^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}=\frac{1+\cos\phi}{2}$$

$$\frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{23^2}-\frac{(k^2-2bkY+b^2Y^2)(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}=\frac{1+\cos\phi}{2}$$

$$\frac{X^2}{23^2}+\left[\frac{1}{23^2}-\frac{b^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}\right]Y^2+\frac{bk(1-\cos\phi)}{h^2c^2}\cdot Y$$

$$=\frac{1+\cos\phi}{2}+\frac{k^2(1-\cos\phi)}{2k^2c^2}$$

b. c ＝ 0 時　bY＝k　(b ≠ 0) 代入………(6)

$$\frac{X^2}{23^2}+\frac{\left(\frac{k}{b}\right)^2}{23^2}-\frac{Z^2(1-\cos\phi)}{2h^2}=\frac{1+\cos\phi}{2}$$

$$\frac{X^2}{23^2}+\frac{k^2}{23^2b^2}-\frac{Z^2(1-\cos\phi)}{2h^2}=\frac{1+\cos\phi}{2}$$

$$\frac{X^2}{23^2}-\frac{Z^2(1-\cos\phi)}{2h^2}=\frac{1+\cos\phi}{2}-\frac{k^2}{23^2b^2}$$

六、討　論：

1. c ＝ 0　平面 E (垂直 Y 軸) 與曲面相交之方程式為

b ≠ 0

$$\begin{cases}\dfrac{X^2}{23^2}-\dfrac{Z^2(1-\cos\phi)}{2h^2}=\dfrac{1+\cos\phi}{2}-\dfrac{k^2}{b^2 23^2}\\ bY=k\end{cases}$$

(1)當 $\phi=0^\circ$ (即圓柱面)

$\cos\phi=1$

$$\frac{X^2}{23^2}=1-\frac{k^2}{b^2 23^2}$$

a. 當 $1-\dfrac{k^2}{23^2b^2}>0$ 時，即 $-23b<k<23b$

則 $\dfrac{X^2}{23^2}=t^2$　(可設 $1-\dfrac{k^2}{23^2b^2}=t^2$

$$\begin{cases}\dfrac{X^2}{23^2}=t^2\\ bY=k\end{cases}$$ 為兩平行線

b. 當 $1-\dfrac{k^2}{23^2b^2}=0$ 時，即 $k=\pm 23b$ 時

$$\frac{X^2}{23^2}=0\qquad X=0\quad Y=\pm 23$$

則 $\begin{cases}X=0\\ Y=23\end{cases}$　or　$\begin{cases}X=0\\ Y=-23\end{cases}$ 即為一直線

c. 當 $1-\dfrac{k^2}{23^2b^2}<0$ 爲空集合

即相交無圖形呈現

(2)當 $\phi \neq 0°$ 時

方程式爲 $\begin{cases}\dfrac{X^2}{23^2}-\dfrac{Z^2(1-\cos\phi)}{2n^2}=\dfrac{1+\cos\phi}{2}-\dfrac{k^2}{23^2b^2}\\ bY=k\end{cases}$

a. 當 $\dfrac{1+\cos\phi}{2}-\dfrac{k^2}{23^2b^2}=0$ 時，

即 $k=\pm 23b\sqrt{\dfrac{1+\cos\phi}{2}}$

則 $\begin{cases}\dfrac{X^2}{23^2}-\dfrac{Z^2(1-\cos\phi)}{2h^2}=0\\ bY=k\end{cases}$ 爲二相交直線

b. 其他 k 值時

則 $\begin{cases}\dfrac{X^2}{23^2}-\dfrac{Z^2(1-\cos\phi)}{2h^2}=\dfrac{1+\cos\phi}{2}-\dfrac{k^2}{23^2b^2}\\ Y=\dfrac{k}{b}\end{cases}$ 爲雙曲線

2. $c\neq 0$ 時　平面 E 垂直 Z 軸與曲面相交之方程式爲

$b=0$

$\begin{cases}\dfrac{X^2}{23^2}+\dfrac{Y^2}{23^2}=\dfrac{1+\cos\phi}{2}+\dfrac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}\\ cZ=k\end{cases}$

(1)當 $\dfrac{1+\cos\phi}{2}+\dfrac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}=0$ 時

即 $\dfrac{1+\cos\phi}{2}=\dfrac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}=0$

$\left(\because \dfrac{1+\cos\phi}{2}\geq 0 \wedge \dfrac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}\geq 0\right)$

$$\frac{1+\cos\phi}{2}=0 \text{ 時 } \cos\phi=-1 \quad \phi=180°$$

$$\therefore \frac{h^2(1+1)}{2h^2c^2}=0 \quad k=0$$

即當 $\begin{cases}\phi=180° \\ k=0\end{cases}$ 時 $\begin{cases}\frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{23^2}=0 \\ cZ=0\end{cases}$ 爲一點（0,0,0）

(2)其他k值

$$\frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{23^2}=\frac{1+\cos\phi}{2}+\frac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}$$

設 $\frac{1+\cos\phi}{2}+\frac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}=t^2$

則 $\begin{cases}\frac{X^2}{(23t)^2}+\frac{Y^2}{(23t)^2}=1 \\ cZ=k\end{cases}$ 爲一圓

3. $\begin{matrix}c\neq 0 \\ b\neq 0\end{matrix}$ 時

平面E與曲面相交爲

$$\begin{cases}\frac{X^2}{23^2}+\left[\frac{1}{23^2}-\frac{b^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}\right]Y^2+\frac{bk(1-\cos\phi)}{h^2c^2}Y \\ =\frac{1+\cos\phi}{2}+\frac{h^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2} \\ bY+cZ=k\end{cases}$$

(1) $\frac{1}{23^2}-\frac{b^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}=0$（即 Y^2 項係數爲0）

$\therefore$平面E之法向量與Z軸正向夾角W

有 $\tan W=\frac{b}{c}=\frac{h}{23}\sqrt{\frac{2}{1-\cos\phi}}$ ……(8)

a. $k=0$　交集爲 $\begin{cases} \dfrac{X^2}{23^2} = \dfrac{1+\cos\phi}{2} \\ bY+cZ=0 \end{cases}$

(a)當 $\phi=0$　（不可能）

（因 $\dfrac{1}{23^2} - \dfrac{b-(1-1)}{2h^2c^2}=0$ 不成立）

(b)當 $0° < \phi < 180°$

交集爲 $\begin{cases} \dfrac{X^2}{23^2} = t^2 \\ bY+cZ=0 \end{cases}$ 爲二平行直線

(c)當 $\phi=180°$　由(8)知 $\tan W = \dfrac{h}{23}$

交集爲 $\begin{cases} \dfrac{X^2}{23^2} = 0 \\ bY+cZ=0 \end{cases}$ 爲一直線

b. $k \neq 0$　交集爲

$$\begin{cases} \dfrac{X^2}{23^2} + \dfrac{bk(1-\cos\phi)}{h^2c^2} Y = \dfrac{1+\cos\phi}{2} + \dfrac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2} \\ bY+cZ=k \end{cases}$$

(a)當 $\phi=0°$時　無圖形呈現

$\because \dfrac{1}{23^2} - \dfrac{b^2(1-1)}{2h^2c^2} > 0$ 與條件矛盾

(b)當 $0° < \phi \leq 180°$時

其交集曲線爲 $\begin{cases} \dfrac{X^2}{23^2} + \dfrac{bk(1-\cos\phi)}{h^2c^2} Y = \dfrac{1+\cos\phi}{2} \\ \quad + \dfrac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2} \\ bY+cZ=k \end{cases}$

爲拋物線

(2) $\frac{1}{23^2}-\frac{b^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}>0$ (卽 Y^2 項係數爲正)

平面E法向量與Z 軸正向夾角W

有 $\tan W<\frac{h}{23}\sqrt{\frac{2}{1-\cos\phi}}$ 之性質

可設 $\frac{1}{23^2}-\frac{b^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}=\frac{1}{t^2}$ (註：$t^2\neq 23^2$)

則曲線爲

$$\frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{X^2}+\frac{bk(1-\cos\phi)}{h^2c^2}Y=\frac{1+\cos\phi}{2}+\frac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}$$

a. 當 $k=0$ 時

其交集曲線爲 $\begin{cases} bY+cZ=0 \\ \frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{t^2}=\frac{1+\cos\phi}{2} \end{cases}$

(a)當 $0°\leq\phi<180°$時 $\frac{1+\cos\phi}{2}>0$

則交集爲 $\begin{cases} \frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{t^2}=\frac{1+\cos\phi}{2} \\ bY+cZ=0 \end{cases}$ 爲橢圓

(b)當 $\phi=180°$ $\frac{1+\cos\phi}{2}=0$ $\tan W<\frac{k}{23}$

則交集爲 $\begin{cases} \frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{t^2}=0 \\ bY+cZ=0 \end{cases}$ 爲一點(0 0,0)

b. $k\neq 0$ 其交集曲線爲

$$\begin{cases} \frac{X^2}{23^2}+\frac{Y^2}{t^2}+\frac{bk(1-\cos\phi)}{h^2c^2}Y=\frac{1+\cos\phi}{2}+\frac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2} \\ bY+cZ=k \end{cases}$$

∵其右式恆正 ∴恆爲橢圓

(3) $\dfrac{1}{23^2} - \dfrac{b^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2} < 0$（即 Y^2 項係數爲負）

平面E法向量與Z軸正向夾角W

有 $\tan W > \dfrac{h}{23} \sqrt{\dfrac{2}{1-\cos\phi}}$ 之性質

可設 $\dfrac{1}{23^2} - \dfrac{b^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2} = -\dfrac{1}{t^2} \quad t \in R$

故其交集曲線爲

$$\begin{cases} \dfrac{X^2}{23^2} - \dfrac{Y^2}{t^2} + \dfrac{bk(1-\cos\phi)}{h^2c^2} = \dfrac{1+\cos\phi}{2} + \dfrac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2} \\ bY + cZ = k \end{cases}$$

a. $k = 0$ 時

其交集爲 $\begin{cases} \dfrac{X^2}{23^2} - \dfrac{Y^2}{t^2} = \dfrac{1+\cos\phi}{2} \\ bY + cZ = 0 \end{cases}$

(a)當 $\phi = 0$ 時

$\cos\phi = 1$

則 $\dfrac{1}{23^2} - \dfrac{b^2(1-1)}{2h^2c^2} > 0$ 與條件c不合

故無此情況產生

(b)當 $0^\circ < \phi < 180^\circ$ 時 $\dfrac{1+\cos\phi}{2} > 0$

故其相交爲 $\begin{cases} \dfrac{X^2}{23^2} - \dfrac{Y^2}{t^2} = \dfrac{1+\cos\phi}{2} \\ bY + cZ = 0 \end{cases}$

爲雙曲線

(c)當 $\phi = 180^\circ$ 時

$\cos\phi = -1 \qquad \dfrac{1+\cos\phi}{2} = 0$

故其交集爲 $\begin{cases} \dfrac{X^2}{23^2} - \dfrac{Y^2}{t^2} = 0 \\ bY + cZ = 0 \end{cases}$

為相交二直線

b. $k \neq 0$ 時

方程式為

$$\begin{cases} \dfrac{X^2}{23^2}-\dfrac{Y^2}{t^2}+\dfrac{bk(1-\cos\phi)}{h^2c^2}Y=\dfrac{1+\cos\phi}{2}+\dfrac{k^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2} \\ bY+cZ=k \end{cases}$$

（利用配方法，配成Y之平方項）

$$\begin{cases} \dfrac{X^2}{23^2}-\dfrac{(Y-r)^2}{t^2}=R \\ bY+cZ=k \end{cases}$$

為雙曲線

七、結　論：

1. 經研究證明

方程式 $\dfrac{X^2}{23^2}+\dfrac{Y^2}{23^2}-\dfrac{Z^2(1-\cos\phi)}{2h^2}=\dfrac{1+\cos\phi}{2}$

隨著 ϕ 之變動（即模型旋轉之角度）可表出我們一般觀念中的圓柱面、單葉雙曲面、圓錐面

模型不旋轉 $\phi=0°$ 時表圓柱面

模型轉 $0°<\phi<180°$　單葉雙曲面

模型旋轉 $180°$ 角　$\phi=180°$　為一圓錐面

2. 由上列公式導證，可歸納成下列各結果，玆為圖表以示之：

(1)

$c=0$　$b\neq 0$　令 $A=23b\sqrt{\dfrac{1+\cos\phi}{2}}$		
	k　值	相　交　之　圖　形
$P=0$	$-23b<k<23b$ $k=\pm 23b$ 其他 k 值	兩平行直線 一直線 空集合
$\phi\neq 0$	$k=\pm A$ 其他 k 值	兩相交直線 雙曲線

(2)

$c \neq 0$　$b = 0$		
$\phi = 180°$	$k = 0$	一點 (0 , 0 , 0)
$\phi \neq 180°$	$k \neq 0$	一圓

(3)

$c \neq 0$　$b \neq 0$　令 $B = \dfrac{1}{23^2} - \dfrac{b^2(1-\cos\phi)}{2h^2c^2}$				
		$\phi = 0°$	$0° < \phi < 180°$	$\phi = 180°$
$B > 0$	$k = 0$	橢圓	橢圓	一點 (0 , 0 , 0)
	$k \neq 0$			橢圓
$B = 0$	$k = 0$	無此情況	兩平行直線	一直線
	$k \neq 0$		拋物線	拋物線
$B < 0$	$k = 0$		雙曲線	兩相交直線
	$k \neq 0$			雙曲線

3. 本證明中所用觀念，均根據高二上教材。

八、參考資料：

1. 高中數學第三册課本　數理出版公司　黃敏晃編輯
2. 數學百科全書　九章出版社　陳碧眞編輯

評語：本件作品爲一良好的教具，能清晰明確地表現二次錐線及二次曲面的各種圖形，較一般掛圖及模型生動，且更具創意。