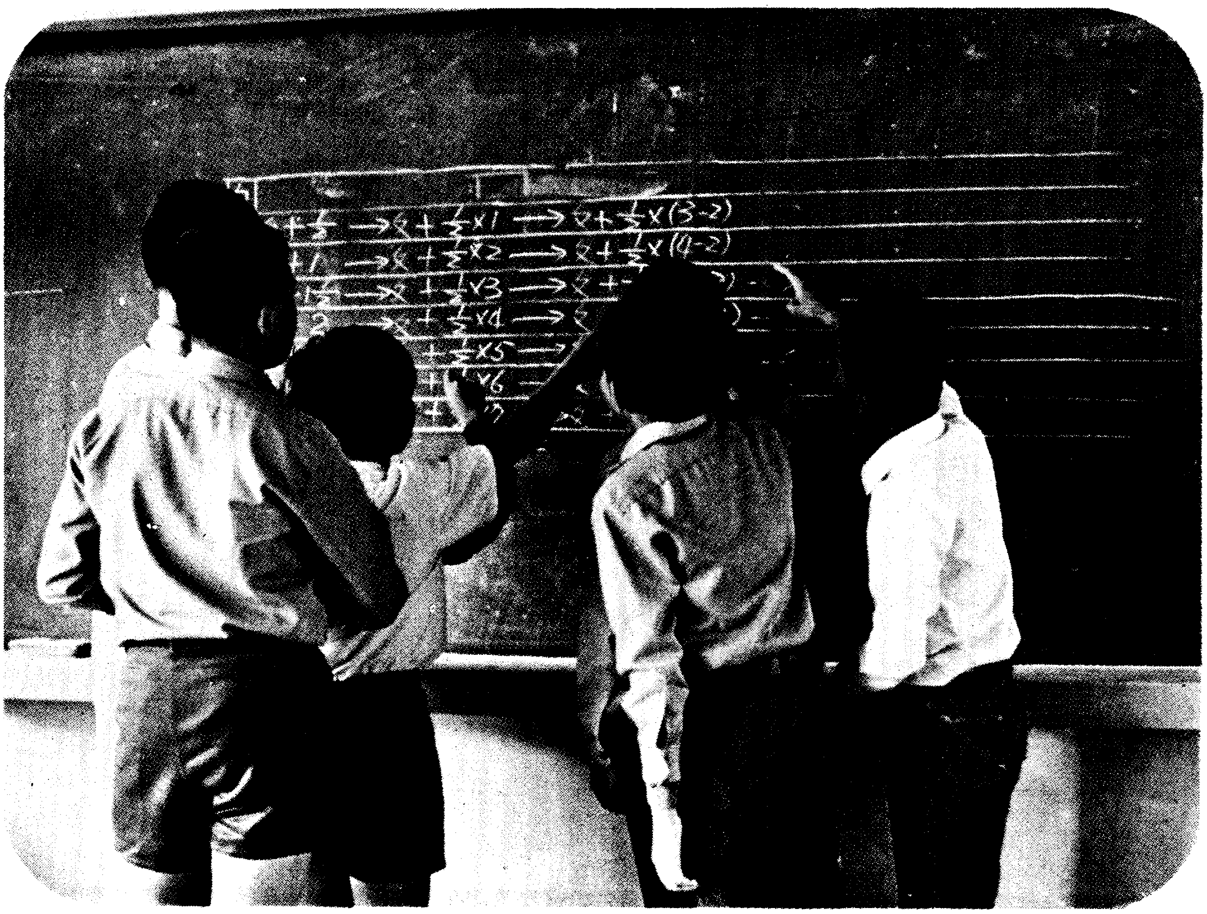
# 釘板上的圖形面積「速算」研究

## 高小組數學第二名

屏東師專附屬國民小學

作　　者：林珩之等十二人

指導老師：林燈茂‧梁睦祥



### 壹、研究動機：

有一次數學遊戲課的時候（團體活動時間才上課），老師拿來一個大釘板，當場用一條橡皮筋在釘板上造了一個「八角星」，要我們算一算它的面積是多少「單位方格」。雖然我們以前學過了計算正方形、長方形、直角三角形、梯形、平行四邊形等圖

形面積的方法，但是面對這種不規則的圖形，却都派不上用場，只好用拼成單位方格的方法慢慢的點算。可是這種老牛拉車的作法，實在太辛苦了（眼睛吃不消），因此，我們想，對於不規則的圖形，假如也能夠找出一個簡便的公式來計算它的面積，那不是很好嗎？於是就在老師的指導下，開始了我們的研究。

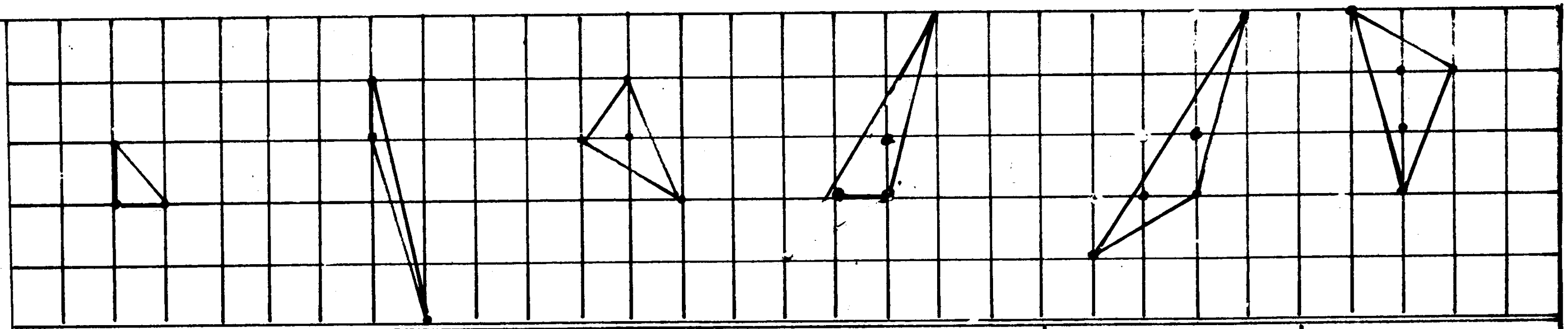
貳、研究方法：

利用橡皮筋在鋼釘板上，排出許多圖形，然後記在實驗記錄表上，再用自然課程所學的方法去研究。我們把它分成三個階段：㈸觀察和實驗。㈹歸納和假設。㈺預測和驗證。詳細研究過程請看下面。

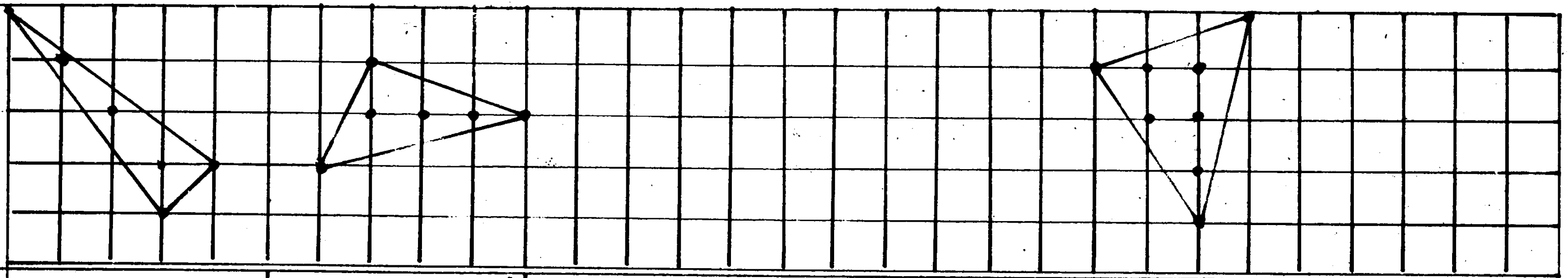
叁、研究過程：

甲、實驗和觀察

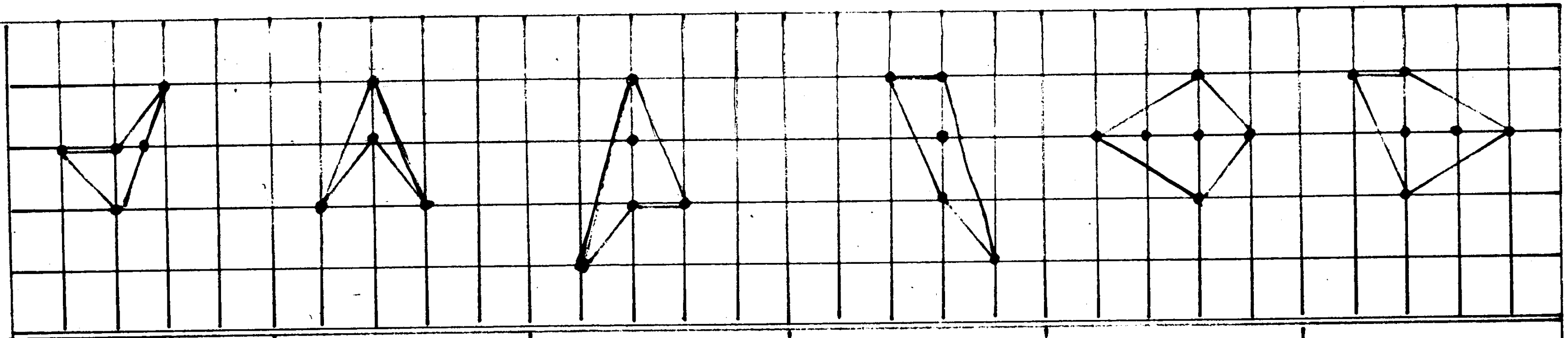
## 實驗一簡介

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 圖形 |  | | | | | |
| 和橡皮筋相連的釘子數 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 在圖形中的釘子數 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 圖形面積（方格數） | ½ | ½ | 1 ½ | 1 ½ | 2 ½ | 2 ½ |

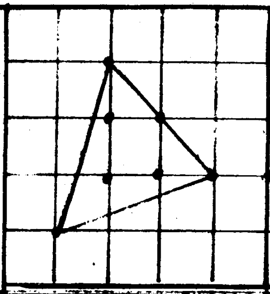
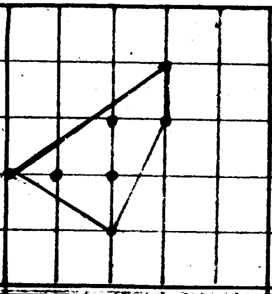
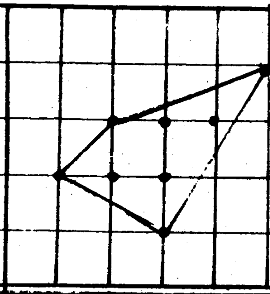
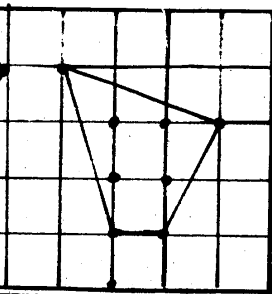
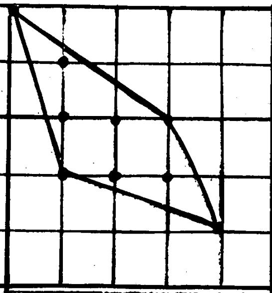
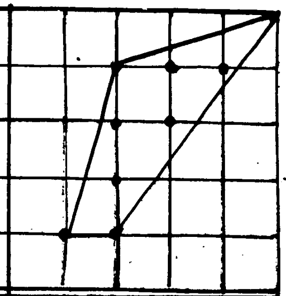
## 實　　驗　　一　　簡　　介

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 圖形 |  | | | | | |
| 和橡皮筋相連的釘子數 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 在圖形中的釘子數 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 圖形面積（方格數） | 3 ½ | 3 ½ | | | 5 ½ | |
| 發現事項 | 1. ㄅ和ㄆ固定，不管圖形怎樣變化，面積還是一樣。<br>2. ㄅ＝3，ㄇ＝ㄆ＋½<br>3. ㄅ＝3，ㄆ＝4的時候，在釘板上無法排出，但在方眼紙上一樣可以做的出來。 | | | | | |

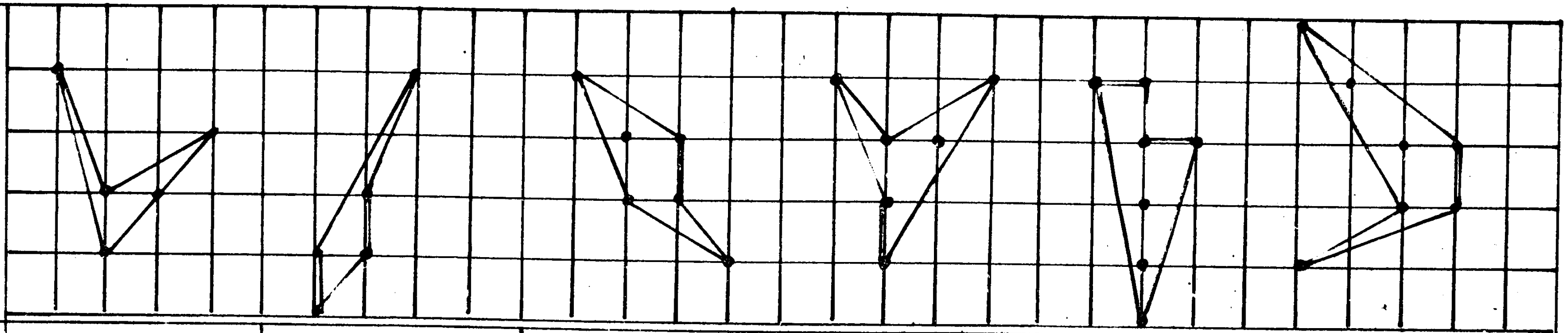
## 實　驗　二　簡　介

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 圖　形 |  | | | | | |
| 和橡皮筋相連的釘子數 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 在圖形中的釘子數 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 圖形面積（方格數） | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |

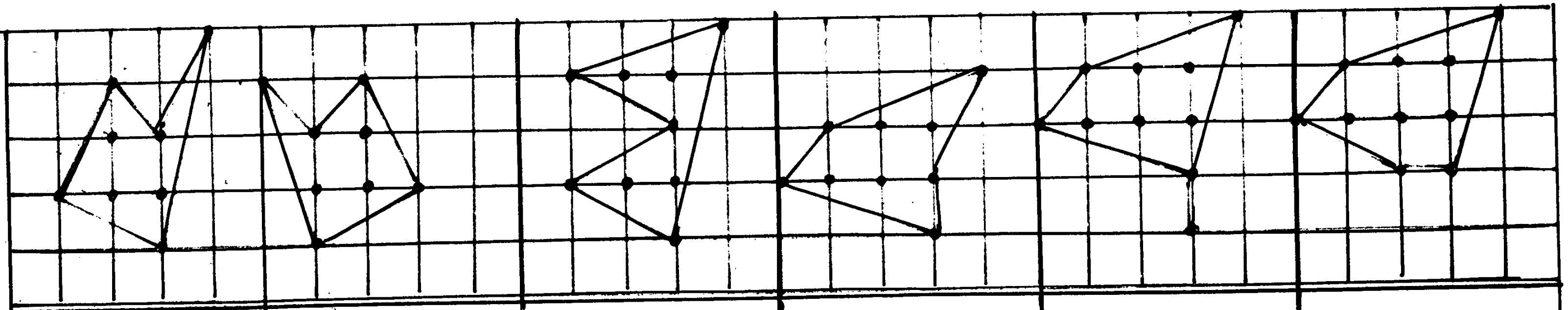
## 實　驗　二　簡　介

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 圖　形 |  |  |  |  |  |  |
| 和橡皮筋相連的釘子數（ㄅ） | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 在圖形中的釘子數（ㄆ） | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 圖形面積（方格數）（ㄇ） | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| 發現事項 | 1 ㄅ和ㄆ固定，不管圖形怎樣變化，ㄇ還是一樣。<br>2 ㄅ＝4，ㄇ＝ㄆ＋1 | | | | | |

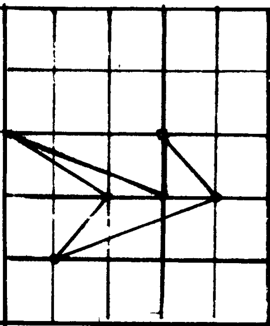
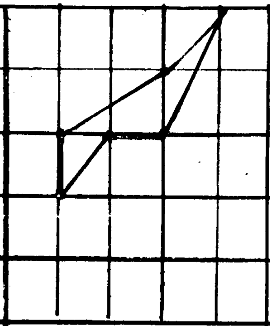
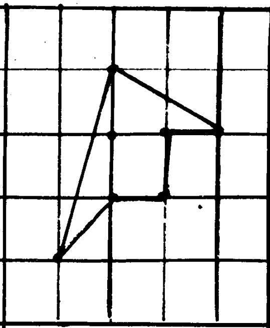
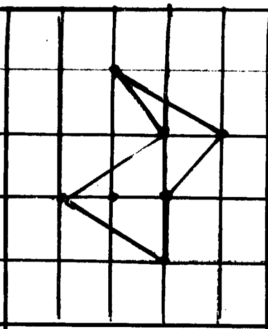
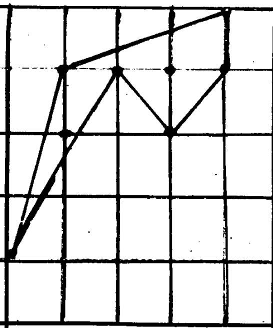
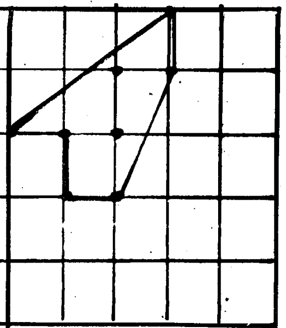
## 實　驗　三　簡　介

| 圖　　形 |  | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 和橡皮筋相連的釘子數 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 在圖形中的釘　子　數 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 圖形面積（方格數） | $1\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{2}$ | $2\frac{1}{2}$ | $2\frac{1}{2}$ | $3\frac{1}{2}$ | $3\frac{1}{2}$ |

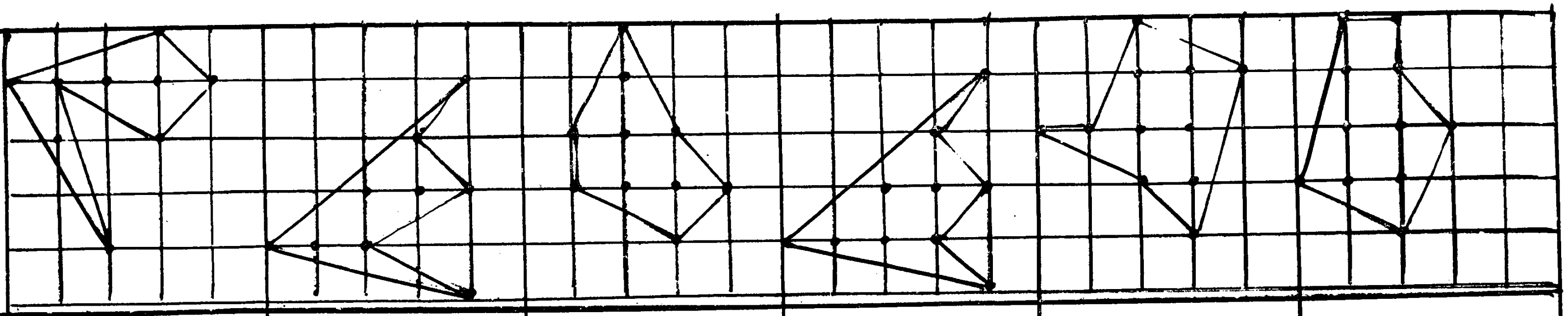
## 實驗三簡介

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 圖形 |  | | | | | |
| 和橡皮筋相連的釘子數（ㄅ） | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 在圖形中的釘子數（ㄆ） | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 圖形面積（方格數）（ㄇ） | $4\frac{1}{2}$ | $4\frac{1}{2}$ | $5\frac{1}{2}$ | $5\frac{1}{2}$ | $6\frac{1}{2}$ | $6\frac{1}{2}$ |
| 發現事項 | 1.ㄅ和ㄆ固定，不管圖形怎樣變化，ㄇ還是一樣。<br>2.ㄅ＝5，ㄇ＝ㄆ＋$1\frac{1}{2}$ | | | | | |

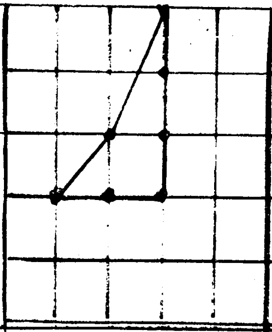
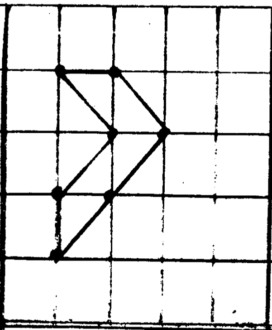
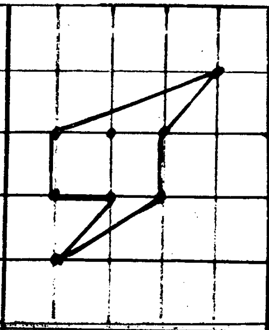
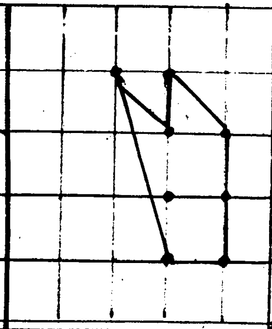
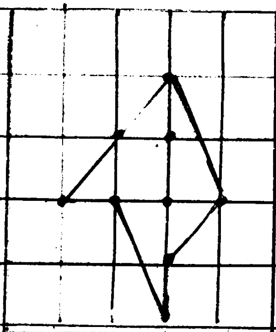
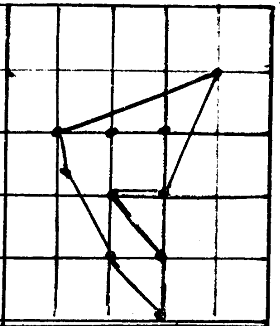
## 實　　驗　　四　　簡　　介

| 圖　形 |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 和橡皮筋相連的釘子板 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 在圖形中的釘子數 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 圖形面積（方格數） | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |

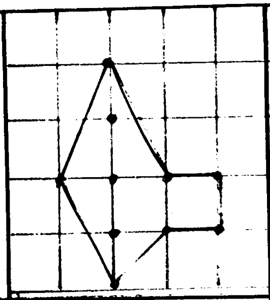
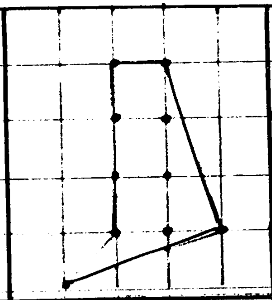
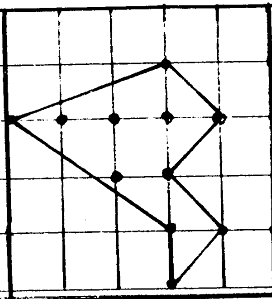
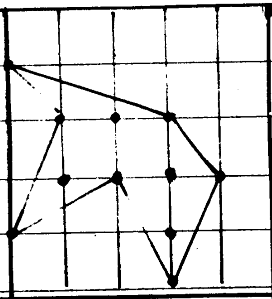
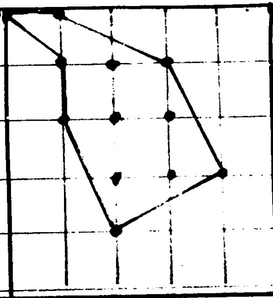
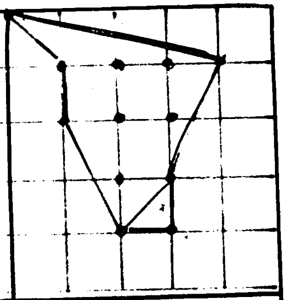
# 實　驗　四　簡　介

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 圖　形 |  | | | | | |
| 和橡皮筋相連的釘子數（ㄅ） | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 在圖形中的釘子數（ㄆ） | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 圖形面積（方格數）（ㄇ） | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| 發現事項 | 1. ㄅ和ㄆ固定，不管圖形怎樣變化，ㄇ還是一樣。<br>2. ㄅ＝6，ㄇ＝ㄆ＋2 | | | | | |

# 實驗五簡介

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 圖形 |  |  |  |  |  |  |
| 和橡皮筋相連的釘子數 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 在圖形中的釘子數 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 圖形面積（方格數） | 2½ | 2½ | 3½ | 3½ | 4½ | 4½ |

## 實　驗　五　簡　介

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 圖　形 |  |  |  |  |  |  |
| 和橡皮筋相連的釘子數（ㄅ） | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 在圖形中的釘子數（ㄆ） | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 圖形面積（方格數）（ㄇ） | 5½ | 5½ | 6½ | 6½ | 7½ | 7½ |
| 發現事項 | 1 ㄅ和ㄆ固定，不管圖形怎樣變化，ㄇ還是一樣。<br>2 ㄅ＝7，ㄇ＝ㄆ＋2½。 | | | | | |

※由前面五個實驗。我們發現一個相同的地方——「（ㄅ）和（ㄆ）固定，不管圖形怎樣變化，ㄇ還是一樣」。（請參看實驗記錄簿，實驗記錄簿在展覽會現場）

疑問：

上面的實驗結果，每一個實驗雖然都得到一個簡便的公式，但對每種公式都不一樣，太複雜了！是不是能再找出一種更簡便的公式，對每一個實驗都能用呢？

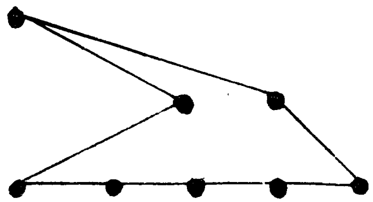
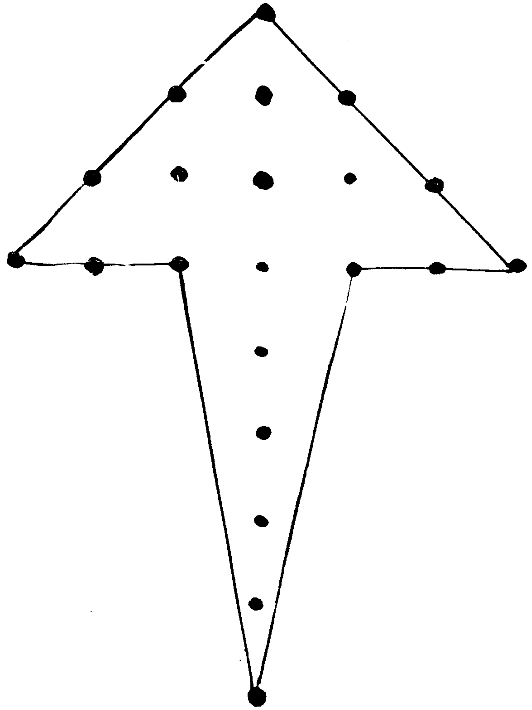
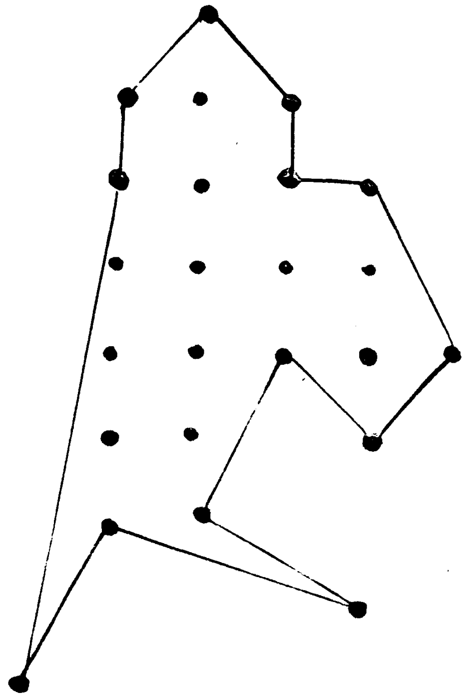
乙、歸納和假設：ㄇ＝ㄅ÷2＋ㄆ－1

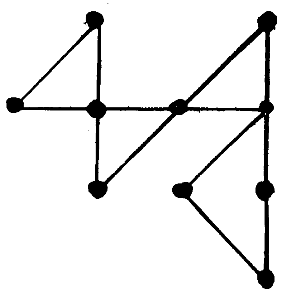
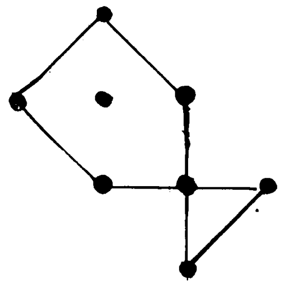
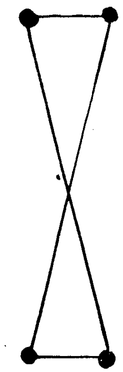
| ㄅ | ㄇ | |
|---|---|---|
| 3 | ㄆ＋$\frac{1}{2}$ → ㄆ＋$\frac{1}{2}$ × 1 | |
| 4 | ㄆ＋1 → ㄆ＋$\frac{1}{2}$ × 2 | |
| 5 | ㄆ＋1 $\frac{1}{2}$ → ㄆ＋$\frac{1}{2}$ × 3 | → |
| 6 | ㄆ＋2 → ㄆ＋$\frac{1}{2}$ × 4 | |
| 7 | ㄆ＋2 $\frac{1}{2}$ → ㄆ＋$\frac{1}{2}$ × 5 | |
| 發現事項 | ①ㄅ每增加1，ㄇ就會增加一個$\frac{1}{2}$。<br>②因為一個$\frac{1}{2}$是$\frac{1}{2}$，2個$\frac{1}{2}$是1，3個$\frac{1}{2}$是1 $\frac{1}{2}$，4個$\frac{1}{2}$是2，5個$\frac{1}{2}$是2 $\frac{1}{2}$。所以ㄇ可以改寫為箭頭所指右下頁的式子。 | |

| ㄅ | ㄇ | | ㄅ | ㄇ | 備　註 |
|---|---|---|---|---|---|
| △3 | ㄆ＋$\frac{1}{2}\times\boxed{1}$→ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$（3－2） | | ③ | ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$（$\boxed{3}$－2） | ㄇ表示「圖形面積（方格數）」。<br>ㄆ表示「在圖形中的釘子數」。<br>ㄅ表示「和橡皮筋相連的釘子數」。 |
| △4 | ㄆ＋$\frac{1}{2}\times\boxed{2}$→ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$（4－2） | | ④ | ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$（$\boxed{4}$－2） | |
| △5 | ㄆ＋$\frac{1}{2}\times\boxed{3}$→ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$（5－2） | → | ⑤ | ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$（$\boxed{5}$－2） | |
| △6 | ㄆ＋$\frac{1}{2}\times\boxed{4}$→ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$（6－2） | | ⑥ | ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$（$\boxed{6}$－2） | |
| △7 | ㄆ＋$\frac{1}{2}\times\boxed{5}$→ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$（7－2） | | ⑦ | ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$（$\boxed{7}$－2） | |
| 發現事項 | ①比較每一組相對的△和□，我們發現了每一個△都比□多2，也就是□＝△－2，因此，我們又可以將ㄇ改寫爲箭頭所指右邊的式子，這樣好像比較有規則了。 | | 發現事項 | ①比較每一組相對的○、□，因爲○＝□，因此我們又發現「每個ㄇ都等於ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$（ㄅ－2）」。<br>②又ㄇ＝ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$（ㄅ－2）。<br>＝ㄆ＋$\frac{1}{2}\times$ㄅ－$\frac{1}{2}\times$2。<br>＝$\frac{1}{2}\times$ㄅ＋ㄆ－$\frac{1}{2}\times$2<br>＝ㄅ÷2＋ㄆ－1，所以不管ㄅ和ㄆ是多少，好像都可以用ㄇ＝ㄅ÷2＋ㄆ－1這個公式去求它的面積（方格數） | |

疑問：我們發現的公式：「ㄅ÷2＋ㄆ－1」是不是對於沒有做過的實驗的都能用呢？

(丙)預測和驗證

| 舉例 | 成功的 | | |
|---|---|---|---|
| 圖形 |  |  |  |
| 和橡皮筋相連的釘子數（ㄅ） | 8 | 12 | 13 |
| 在圖形中的釘子數（ㄆ） | 0 | 9 | 11 |
| 預測面積（ㄇ）（方格數） | $8 \div 2 + 0 - 1 = 3$ | $12 \div 2 + 9 - 1 = 14$ | $13 \div 2 + 11 - 1 = 16\frac{1}{2}$ |
| 實際面積 | 3 | 14 | $16\frac{1}{2}$ |
| 發現事項 | 這個公式ㄇ＝ㄅ÷2＋ㄆ－1，對於ㄅ＞7，ㄆ≥0的圖形，仍然可以用。 | | |

| 舉例 | 失敗的 | | |
|---|---|---|---|
| 圖形 |  |  |  |
| 和橡皮筋相連的釘子數（ㄅ） | 10 | 7 | 4 |
| 在圖形中的釘子數（ㄆ） | 0 | 1 | 0 |
| 預測面積（ㄇ）（方格數） | 10 ÷ 2 + 0 − 1 = 4 | 7 ÷ 2 + 1 − 1 = 3½ | 4 ÷ 2 + 0 − 1 = 1 |
| 實際面積 | 2½ | 3 | 2 |
| 發現事項 | 對於計算有「交叉線」的圖形面積，這個公式就失敗了。 | | |

※由預測和驗證，我們知道「ㄇ＝ㄅ÷２＋ㄆ－１」這個公式並不能像最初猜想的那樣可靠。不過如果把那種「有交叉線」的圖形除外，那麼它就可以用來計算釘板或是方眼紙上的圖形面積了。

## 肆、結　　論：

綜合我們對於釘板或方眼紙上的圖形面積實驗，我們有下面三點發現：

(一)不管圖形的形狀怎樣變化，只要它的「和橡皮筋相連的釘子數（ㄅ）」與在圖形中的釘子數（ㄆ）固定一樣，它的面積（ㄇ）仍然不會改變。

(二)圖形的面積＝「和橡皮筋相連的釘子數的一半」＋「圖形中的釘子數」－１，也就是：ㄇ＝ㄅ÷２＋ㄆ－１。這個公式，可以稱得上是計算釘板或方眼紙上，沒有規則的圖形面積之一種奇妙的速算法。

(三)但是ㄇ＝ㄅ÷２＋ㄆ－１這個公式，對於計算「有交叉線」的圖形（例如預測和驗證中的那些失敗的圖形）還是不夠靈光。