

# 一個由循環小數引出有趣的整除問題 及應用：循環節的位數與因數分解的關係

## 國中教師組數學第三名

國光代用國中

作 者：吳 建 生

### 一、定理：

若  $a \in N$  且  $\frac{2+a}{5+a}$  且  $a \neq 1$  ( 即  $a$  之個位數字只能為  $1, 3, 7, 9$  ) 且  $b$  為阿拉伯數字之一 ( $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$  )

則  $\exists n \in N$  且  $n < a$   $a | bbb \dots b$  ( $bbb \dots b$  為十進法中之  $n$  位數)

例： $3 | 111$  ( $n=3$ )       $7 | 222222$  ( $n=6$ )

$9 | 333333333$  ( $n=9$ )       $11 | 44$  ( $n=2$ )

$13 | 555555$  ( $n=6$ )

$17 | 666666666666666$  ( $n=16$ )

$19 | 7777777777777777$  ( $n=18$ )

$21 | 888888$  ( $n=6$ )

$23 | 99999999999999999999$  ( $n=22$ )

證明如下：

(一) 預備定理

凡  $\frac{1}{a}$  必可化爲純循環小數 (循環節不爲 0)

$1 \frac{1}{a}$  必不是有限小數 (即  $1$  被  $a$  除必除不盡)

假設  $\frac{1}{a} = c$  ( $c$  為有  $m$  個小數位之純小數)

則  $a \cdot c = 1$ ，即  $a \cdot 10^m \cdot c = 10^m$  ( $10^m \cdot c \in N$ )

即  $a \cdot 10^m \cdot c = 2^m \times 5^m$

上式右邊質因數只有 2 與 5

而左邊  $a$  至少有一個不為 2 或 5 之質因數兩者不相等，故矛盾。

2.  $\frac{1}{a}$  是無限的循環小數

今拿  $a$  除 1 每次餘數都不為 0 (由 1) 且比除數  $a$  小，故頂多除  $a$  次必得兩個相同的餘數即造成了循環小數。

3.  $\frac{1}{a}$  是純循環小數

$$\text{設 } \frac{1}{a} = 0.x_1 x_2 \dots x_n \overline{y_1 y_2 \dots y_m}$$

( $x_i, y_i$  為阿拉伯數字  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ )

$$\text{則 } 1 = a \times 0.x_1 x_2 \dots x_n \overline{y_1 y_2 \dots y_m}$$

$$\text{又 } 1 = 0.\bar{9}$$

$$\therefore 0.\bar{9} = a \times 0.x_1 x_2 \dots x_n \overline{y_1 y_2 \dots y_m}$$

$$\text{又可設 } a \times 0.x_1 x_2 \dots x_n = 0.X_1 X_2 \dots X_n$$

( $X_i$  亦為阿拉伯數字，位數與  $x_i$  同，否則一旦進位得  $a \times 0.x_1 x_2 \dots x_n > 1$  不可能)

$$\text{又可設 } a \times 0.\overbrace{0000 \dots 0}^{n \text{ 個}} \overline{y_1 y_2 \dots y_m}$$

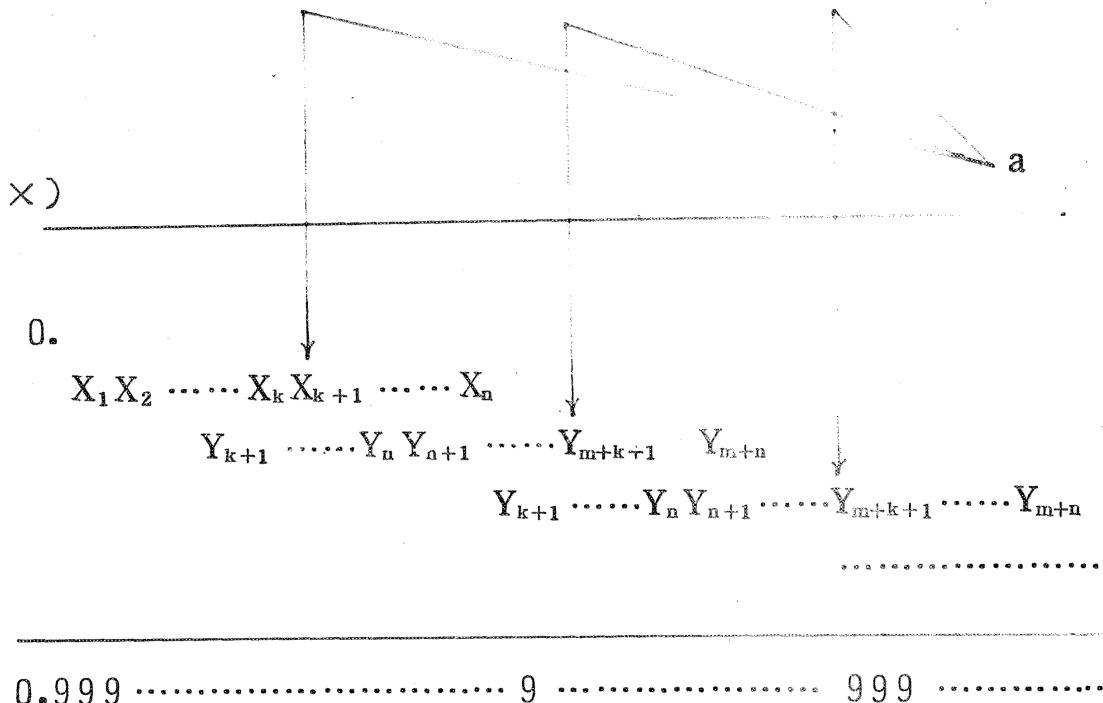
$$= 0.\overbrace{000 \dots 0}^{k \text{ 個}} \overline{Y_{k+1} Y_{k+2} \dots Y_n Y_{n+1} \dots Y_{n+m}}$$

( $Y_i$  亦為阿拉伯數字)

$$\text{則依乘法 } 0.\bar{9} = a \times 0.x_1 x_2 \dots x_n \overline{y_1 y_2 \dots y_m}$$

如下圖：

$0.x_1x_2 \dots x_n y_1y_2 \dots y_m y_1y_2 \dots y_m \dots$



$0.999 \dots \quad 9 \dots \quad 999 \dots$

$\because Y_{n+1}$  不進位

$\therefore X_n + Y_n = 9$ ，故  $X_n + Y_n$  後亦不進位再推出  $X_{n-1} + Y_{n-1} = 9$

同理  $\dots \dots X_{k+1} + Y_{k+1} = 9$ ，再推出  $X_k = 9 \dots \dots X_1 = 9$ ，其他位亦同理。

今觀察  $Y_{n+1}$  位以左之位數可得如下：

$$X_1 = 9 \quad X_{k+1} + Y_{k+1} = 9 = Y_{m+k+1} + Y_{k+1}$$

$$X_2 = 9 \quad \dots \dots \quad \dots \dots$$

$$\begin{matrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_k = 9 & \dots & & \dots & & \dots \end{matrix}$$

$$Y_{n+1} = 9 \quad X_n + Y_n = 9 = Y_{m+n} + Y_n$$

$$\begin{matrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_{m+k} = 9 & \dots & & \dots & & \dots \end{matrix}$$

故得 
$$\begin{cases} X_{k+1} = Y_{m+k+1} \\ \dots \\ \dots \\ X_n = Y_{m+n} \end{cases}$$

再設  $a$  之個位數字爲  $d$ ， $d \in \{1, 3, 7, 9\}$

由上表知  $d \cdot x_n$  之個位數字爲  $X_n$   
 $d \cdot y_m$  之個位數字爲  $Y_{m+n}$  (· 代表相乘)

可知  $d \cdot x_n$  與  $d \cdot y_m$  之個位數字同，但以  $d = 3, 7$  為例

$3 \times 0 = 0$	$7 \times 0 = 0$
$3 \times 1 = 3$	$7 \times 1 = 7$
$3 \times 2 = 6$	$7 \times 2 = 14$
$3 \times 3 = 9$	$7 \times 3 = 21$
$3 \times 4 = 12$	$7 \times 4 = 28$
$3 \times 5 = 15$	$7 \times 5 = 35$
$3 \times 6 = 18$	$7 \times 6 = 42$
$3 \times 7 = 21$	$7 \times 7 = 49$
$3 \times 8 = 24$	$7 \times 8 = 56$
$3 \times 9 = 27$	$7 \times 9 = 63$

知若  $A, B$  各代表兩個不同個位數字，則  $d \cdot A$  與  $d \cdot B$  之個位數字亦不同

故  $x_n = y_m$

今由  $X_{n-1} = Y_{m+n-1}$  且  $x_n = y_m$  又  $d \cdot x_n$  與  $d \cdot y_m$  之進位數同，而十位數之得數亦同，故同理

$$x_{n-1} = y_{m-1}$$

依此類推

$$X_{k+1} = Y_{m-n+k+1}$$

.....

得 .....

$$x_{n-1} = y_{m-1}$$

$$x_n = y_m$$

再同理

$$x_k = y_{m-n-k}$$

$$x_{k-1} = y_{m-n+k-2}$$

得

現在  $m, n$  分三種情況

(1) 若  $m = n$ , 則  $x_i = y_i \forall i$

得  $\frac{1}{a} = 0.\overline{x_1 x_2 \dots \dots \dots x_n}$  即  $\frac{1}{a}$  為純循環小數

(2) 若  $n < m$

則  $\frac{1}{a} = 0.x_1 x_2 \dots \dots x_n y_1 y_2 \dots \dots y_{m-n} x_1 x_2 \dots \dots x_n y_1 \dots$

$\dots \dots y_{m-n} \dots \dots \dots$

$$= 0.\overline{x_1 x_2 \dots \dots x_n y_1 y_2 \dots \dots y_{m-n}}$$

得  $\frac{1}{a}$  為純循環小數

(3) 若  $n > m$

則  $\frac{1}{a}$  (化成)  $= 0.x_1 x_2 \dots \dots x_{n-m} \overline{x_{n-m+1} \dots \dots x_n}$

再照上述方法，如法泡製一直減少循環節前小數位之個數而循環節小數位個數並不改變。

故終究前者個數會小於或等於後者的且一個個對應相等即符合(1)或(2)(若  $a \cdot X_{n-m+1} \dots \dots X_n$  已不進位則依上表乘開數字都是 9, 亦可推出  $X_n = X_{n-m} = X_{n-1} = X_{n-m-1} \dots \dots$ )

則  $\frac{1}{a}$  也是純循環小數

故本預備定理得證

(2) 由(1)得  $\frac{1}{a} = 0.\bar{z}_1 z_2 \dots \dots z_m$  ( $z_i$  為阿拉伯數字)

即  $1 = 0.\overline{9} = a \times 0.\overline{z_1 z_2 \dots z_m}$

可設  $a \times z_1 z_2 \dots z_m = w_1 w_2 \dots w_p$  ( $w_j$  為阿拉伯數字  
( $z_1 z_2 \dots z_m$  表  $m$  位數,  $w_1 w_2 \dots w_p$  表  $P$  位數)

$$\because a > 1 \quad \therefore P \geq m$$

若  $P > m$

$$\begin{aligned} \text{則 } 1 &= a \times 0.\overline{z_1 z_2 \dots z_m} > a \times 0.z_1 z_2 \dots z_m \\ &= 10^{-m} (a \times z_1 z_2 \dots z_m) = 10^{-m} (w_1 w_2 \dots w_p) \\ &\geq 1, \text{ 即 } 1 > 1 \text{ 矛盾} \end{aligned}$$

故  $P = m$

$$\text{即 } a \times z_1 z_2 \dots z_m = w_1 w_2 \dots w_m$$

$$\therefore 0.\overline{9} = a \times 0.\overline{z_1 z_2 \dots z_m} = 0.\overline{w_1 w_2 \dots w_m}$$

$$\therefore w_1 = w_2 = \dots = w_m = 9$$

$$\begin{aligned} \text{故 } a \times z_1 z_2 \dots z_m &= 999 \dots 99 \\ &\quad (\text{m 位數}) \end{aligned}$$

$$\therefore z_1 z_2 \dots z_m \in N$$

$$\therefore a \mid 999 \dots 99$$

( $\exists$  今已證出任給  $a$  則  $\exists n = a \mid 99 \dots 99$

再繼續推展下去  $\quad (\text{n 位數})$

1 若  $3 \nmid a$  則  $a \mid 99 \dots 9 \rightarrow a \mid 9 \times 111 \dots 1$

又  $a, 9$  互質  $\therefore a \mid 111 \dots 1$

故  $a \mid 111 \dots 1 \times b \quad \text{即 } a \mid bbb \dots b$   
 $\quad (\text{b 即如前述})$

2 若  $3 \mid a$  且  $9 \nmid a$

則可令  $a = 3a'$  而  $3 \nmid a'$

由  $a \mid 99 \dots 9 \rightarrow 3a' \mid 99 \dots 9 \rightarrow a' \mid 33333 \dots 3$   
 $\quad (\text{n 位數})$

$\rightarrow a' \mid 111 \dots 1 \rightarrow a' \mid bbb \dots b$   
 $\quad (\text{n 位數})$

又  $bbb \dots b = bb \dots b \times 10^{2n} + bb \dots b \times 10^n + bb \dots b$   
 $\quad (\text{3n 位數}) \quad (\text{n 位數}) \quad (\text{n 位數}) \quad (\text{n 位數})$

$$= bb \cdots \cdots b (10^{2n} + 10^n + 1)$$

(n位數)

$$\text{但 } 10^{2n} + 10^n + 1 = (3^2 + 1)^{2n} + (3^2 + 1)^n + 1$$

$$= 3M + 1^{2n} + 3M' + 1^n + 1 \quad (M, M' \in N)$$

$$= 3(M + M' + 1)$$

$$\therefore 3 \cdot bb \cdots \cdots b \mid bb \cdots \cdots b$$

(n位數) (3n位數)

$$\therefore 3a' \mid 3 \cdot bb \cdots \cdots b \rightarrow 3a' \mid bb \cdots \cdots b \rightarrow a \mid bb \cdots \cdots b$$

(n位數) (3n位數) (3n位數)

3. 若  $9 \mid a$  則令  $a = 9a'$

$$\text{由 } a \mid 99 \cdots \cdots 9 \rightarrow 9a' \mid 999 \cdots \cdots 9 \rightarrow a' \mid 111 \cdots \cdots 1$$

$$\rightarrow a' \mid bbb \cdots \cdots b \rightarrow 9a' \mid 9 \cdot bb \cdots \cdots b$$

(n位數) (n位數)

同理可知  $9 \cdot bb \cdots \cdots b \mid bbb \cdots \cdots b$

(n位數) (9n位數)

故  $9a' \mid bb \cdots \cdots b$  即  $a \mid bbb \cdots \cdots b$

(9n位數) (9n位數)

(四) 由  $\frac{1}{a} = 0.\overline{Z_1 Z_2 \cdots \cdots Z_m}$  中

$\because$  餘數必小於除數  $\therefore m < a$

$\therefore$  故  $a \mid 999 \cdots \cdots 9$  (m位) 中,  $m < a$

$\exists K \in N \cup \{0\} \ni a = 3^k a'$  且  $3 \mid a'$

又  $m' \in N \quad a' \mid 999 \cdots \cdots 9$  (m'位) ( $m' < a'$ )

$\rightarrow a' \mid 111 \cdots \cdots 1$  (m'位)  $\rightarrow 3^k a' \mid 111 \cdots \cdots 1$  (

$3^k m'$ 位) (依(三)之方法再應用數學歸納法)

$\rightarrow 3^k a' \mid bbb \cdots \cdots b$  ( $3^k m'$ 位)  $\rightarrow a \mid bbb \cdots \cdots b$  (

$3^k m'$ 位)  $\rightarrow a \mid bbb \cdots \cdots b$  (m位)

此處  $m = 3^k m'$ ,  $a = 3^k a'$

$\therefore m' < a' \quad \therefore m < a$

(五) 由(一)(二)(三)(四)知 “ $\sim$ ” 定理得證

## 二、定理：定理一又可等值於下列形式

若  $a \in N$  且  $\{ \frac{2+a}{5+a} \text{ 則 } \exists^n \in N \text{ 且 } n < a \Rightarrow a \mid 111 \dots \dots 1 \}$

$n$  位) 且  $\frac{1}{a}$  必可化成循環節有  $n$  位之純循環小數。

## 三、推廣及應用：

(六)今定義： $\phi(a)$  為使得  $a \mid 111 \dots \dots 1$  中  $111 \dots \dots 1$  的最少位數

$\theta(a)$  為  $\frac{1}{a}$  化成純循環小數其循環節最少的位數

(七)由(二)， $0.\overline{9} = a \times 0.\overline{Z_1 Z_2 \dots \dots Z_m} = 0.\overline{w_1 w_2 \dots \dots w_m}$  中知

$Z_1 = Z_2 = \dots \dots = Z_m$  則循環節位數減少

$$\text{即 } 0.\overline{9} = a \times 0.Z_1 = a \times Z_1 \times 0.\overline{1}$$

$$\text{故 } 9 = a \times Z_1$$

若  $Z_1 = 3$  則  $a = 3$ ，若  $Z_1 = 9$  則  $a = 1$  (不合)

若  $Z_1 = 1$  則  $a = 9$ ，若  $Z_1 = \text{其他}$  (不合)

(八)由(七)可知若  $3 \nmid a$  則  $\phi(a) = \theta(a)$ ，且知  $\phi(a) \neq \theta(a)$  當  $a = 3$  或  $9$

(九)由前例及(八)知  $\{ \begin{array}{l} \phi(3) = 3 \\ \theta(3) = 1 \end{array}, \{ \begin{array}{l} \phi(7) = 6 \\ \theta(7) = 6 \end{array}, \{ \begin{array}{l} \phi(9) = 9 \\ \theta(9) = 1 \end{array}$

$\{ \begin{array}{l} \phi(11) = 2 \\ \theta(11) = 2 \end{array}, \{ \begin{array}{l} \phi(13) = 6 \\ \theta(13) = 6 \end{array}, \{ \begin{array}{l} \phi(17) = 16 \\ \theta(17) = 16 \end{array}, \{ \begin{array}{l} \phi(19) = 18 \\ \theta(19) = 18 \end{array}$

$\{ \begin{array}{l} \phi(21) = 6 \\ \theta(21) = 6 \end{array}, \{ \begin{array}{l} \phi(23) = 22 \\ \theta(23) = 22 \end{array}$

(十) 1.  $\theta(9) = 1$

$2. K \geq 3$  且  $K \in N$  令  $H = 3^{k-1}$

則  $\frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{k-1}} = 0.C_1 C_2 \dots \dots C_{\theta(H)} = 0.a_1 a_2 \dots \dots a_{\theta(H)}$

(其中  $3 \mid C_1 C_2 \dots \dots C_{\theta(H)}$  且  $3 \nmid C_1 C_2 \dots \dots C_{\theta(H)} C_1$   
 $C_2 \dots \dots C_{\theta(H)} C_1 C_2 \dots \dots C_{\theta(H)}$  限於篇幅不再詳證)

由(1), (2)歸納出

$$\theta(3^k) = 3^{k-2} \theta(3^2) = 3^{k-2} \theta(9) = 3^{k-2}$$

(+) 若  $P$  為質數且  $P \neq 3$  則  $\phi(P) = \theta(P)$

$$\text{而 } \phi(3) = 3 - 1 = \theta(3)$$

$$\phi(9) = 9 - 1 = \theta(9)$$

以下限於篇幅時間不再證明舉幾個例證

(+) 若  $p, q$  為非 5 之相異質數則  $\phi(pq) = [\phi(p), \phi(q)]$

[ ] 為 lcm 記號 (由  $p, q$  互質及  $\phi$  之定義易證之)

推廣：若  $p_1, p_2, \dots, p_e$  都是非 5 相異質數

$$\begin{aligned} \text{則 } \{ \phi(p_1 p_2 \dots p_e) &= [\phi(p_1), \phi(p_2), \dots, \phi(p_e)] \\ \theta(p_1 p_2 \dots p_e) &= [\theta(p_1), \theta(p_2), \dots, \theta(p_e)] \end{aligned}$$

※例證如下

$$\phi(21) = \phi(3 \times 7) \quad \text{又 } \phi(3) = 3, \phi(7) = 6$$

$3 = \phi(3)$  表示 111 被 3 整除

$6 = \phi(7)$  表示 111111 被 7 整除

今 3, 7 互質至少要幾個 1 被 21 整除即找 3 與 6 的最小公倍數，故  $\phi(21) = [\phi(3), \phi(7)]$

(+) 若  $P \neq 5$ ,  $P$  是質數

$$\phi(P^2) = P \cdot \phi(P)$$

$$\text{則 } \{ \theta(P^2) = \begin{cases} P \cdot \theta(P) & \text{若 } P \neq 3 \\ \theta(P) & \text{若 } P = 3 \end{cases}$$

$$\phi(P^k) = P^{k-1} \phi(P)$$

$$\text{推廣 } \{ \theta(P^k) = \begin{cases} P^{k-1} \theta(P) & \text{若 } P \neq 3 \\ P^{k-2} \theta(P) & \text{若 } P = 3 \end{cases}$$

※例證如下：

已知  $\phi(7) = 6$  欲證明  $\phi(7^2) = 7 \cdot \phi(7) = 42$

$$\phi(7) = 6 \quad \text{即 } 7 \mid 111111$$

易證出下面一件事

$7 \mid 1111 \dots 1$  (n位) 若且唯若  $\phi(7) \mid n$  (即  $6 \mid n$ )  
 又  $\phi(7^2) < 7^2 = 49$

故  $\phi(7^2) \in \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$

可設  $\phi(7^2) = 6K$  ( $K \in N, 1 \leq K \leq 8$ )

則  $7^2 \mid 1111 \dots 1$  (6K位)

$$\begin{aligned} 111 \dots 1 \text{ (6K位)} &= 111111 + 111111 \times 10^6 + \\ &\quad 111111 \times 10^{12} + \dots + \\ &\quad 111111 \times 10^{6(k-1)} \end{aligned}$$

$$= 111111(1 + 10^6 + 10^{12} + \dots + 10^{6(k-1)})$$

但  $7 \mid 111111$  而  $7^2 \nmid 111111$

$$\text{故 } 7 \mid 1 + 10^6 + (10^6)^2 + \dots + (10^6)^{k-1}$$

$$\text{即 } 1 + 10^6 + (10^6)^2 + \dots + (10^6)^{k-1} \equiv 0$$

(mod 7) (同餘)

又  $10 \equiv 3 \pmod{7}$

$$10^6 \equiv 3^6 \pmod{7}$$

$$3^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

代回上式得

$$1 + 1 + (1)^2 + \dots + (1)^{k-1} \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\because 1 \leq K \leq 8, K \in N \text{ 且 } 7 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\therefore K - 1 = 6 \text{ 即 } K = 7$$

$$\text{得 } \phi(7^2) = 6 \cdot 7 = 7 \cdot \phi(7) = 42$$

若  $P_1, P_2, \dots, P_e$  是相異不爲 5 之質數，且  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_e \in N$ ，則

$$\begin{aligned} 1 \phi(P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_e^{\alpha_e}) &= [\phi(P_1^{\alpha_1}), \phi(P_2^{\alpha_2}) \dots \\ &\quad \dots, \phi(P_e^{\alpha_e})] = P_1^{\alpha_1-1} P_2^{\alpha_2-1} \dots P_e^{\alpha_e-1} [\phi(P_1), \phi(P_2) \dots, \phi(P_e)] \end{aligned}$$

2 若  $P_i \neq 3 \forall i, 1 \leq i \leq e$

$$\text{則 } \theta(P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_e^{\alpha_e})$$

$$= P_1^{\alpha_1-1} P_2^{\alpha_2-1} \dots P_e^{\alpha_e-1} [\theta(P_1), \theta(P_2) \dots, \theta(P_e)]$$

3. 若  $P_1 = 3$

$$\begin{aligned} \text{則 } \theta(P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots \cdots P_e^{\alpha_e}) \\ = P_1^{\alpha_1-2} P_2^{\alpha_2-1} \cdots \cdots P_e^{\alpha_e-1} [\theta(P_1), \theta(P_2) \cdots \cdots \\ \theta(P_e)] \end{aligned}$$

(三) 例證十二題

$$\begin{aligned} 1 \phi(693) &= \phi(3^2 \times 7 \times 11) \\ &= 3 [\phi(3), \phi(7), (11)] \\ &= 3 [3, 6, 2] \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 160333493666827 \\ 693 \\ \hline 4181 \\ 4158 \\ \hline 2311 \\ 2079 \\ 2321 \\ 2079 \\ 2421 \\ 2079 \\ 3421 \\ 2772 \\ 6491 \\ 6237 \\ 2541 \\ 2079 \\ 4521 \\ 4158 \\ 4631 \\ 4158 \\ 4731 \\ 4158 \\ 5731 \\ 5544 \\ 1871 \\ 1386 \\ 4851 \\ 4851 \\ 0 \end{array}$$

$$2 \quad \theta(693) = \theta(3^2 \times 7 \times 11) = [\theta(3), \theta(7), \theta(11)] = 6$$

$$\begin{array}{r} 0.001443 \\ 693 \sqrt{1.0000000} \\ 693 \\ \hline 3070 \\ 2772 \\ \hline 2980 \\ 2772 \\ \hline 2080 \\ 2079 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$3. \phi(121) = \phi(11^2) = 11\phi(11) = 22 (\phi(11)=2)$$

$$\begin{array}{r}
 & 9 & 1 & 8 & 2 & 7 & 3 & 6 & 4 & 5 & 5 & 4 & 6 & 3 & 7 & 2 & 8 & 1 & 9 & 1 \\
 121 & \underline{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1089 & \hline
 & 221 & \\
 & 121 & \hline
 & 1001 & \\
 & 968 & \hline
 & 331 & \\
 & 242 & \hline
 & 891 & \\
 & 847 & \hline
 & 441 & \\
 & 363 & \hline
 & 781 & \\
 & 726 & \hline
 & 551 & \\
 & 484 & \hline
 & 671 & \\
 & 605 & \hline
 & 661 & \\
 & 605 & \hline
 & 561 & \\
 & 484 & \hline
 & 771 & \\
 & 726 & \hline
 & 451 & \\
 & 363 & \hline
 & 881 & \\
 & 847 & \hline
 & 341 & \\
 & 242 & \hline
 & 991 & \\
 & 968 & \hline
 & 231 & \\
 & 121 & \hline
 & 1101 & \\
 & 1089 & \hline
 & 121 & \\
 & 121 & \hline
 & 0 &
 \end{array}$$

$$4. \theta(121) = 11 \cdot \theta(11) = 22$$

$$\begin{array}{r} 0.0082644628099173553719 \\ \hline 121 \quad 1.0000000000000000000000000000 \\ 968 \\ \hline 320 \\ 242 \\ \hline 780 \\ 726 \\ \hline 540 \\ 484 \\ \hline 560 \\ 484 \\ \hline 760 \\ 726 \\ \hline 340 \\ 242 \\ \hline 980 \\ 968 \\ \hline 1200 \\ 1089 \\ \hline 1110 \\ 1089 \\ \hline 210 \\ 121 \\ \hline 890 \\ 847 \\ \hline 430 \\ 363 \\ \hline 670 \\ 605 \\ \hline 650 \\ 605 \\ \hline 450 \\ 363 \\ \hline 870 \\ 847 \\ \hline 230 \\ 121 \\ \hline 1090 \\ 1089 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$5. \phi(27) = \phi(3^3) = 3^2 \cdot \phi(3) = 27$$

$$\begin{array}{r}
4115226337448559670781893 \\
27 \sqrt{111111111111111111111111} \\
\hline
108 \\
31 \\
27 \\
\hline
41 \\
27 \\
\hline
141 \\
135 \\
\hline
61 \\
54 \\
\hline
71 \\
54 \\
\hline
171 \\
162 \\
\hline
91 \\
81 \\
\hline
101 \\
81 \\
\hline
201 \\
189 \\
\hline
121 \\
108 \\
\hline
131 \\
108 \\
\hline
231 \\
216 \\
\hline
151 \\
135 \\
\hline
161 \\
135 \\
\hline
261 \\
243 \\
\hline
181 \\
162 \\
\hline
191 \\
189 \\
\hline
211 \\
189 \\
\hline
221 \\
216 \\
\hline
51 \\
27 \\
\hline
241 \\
216 \\
\hline
251 \\
243 \\
\hline
81 \\
81 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$6. \theta(27) = \theta(3^3) = 3\theta(9) = 3$$

$$\begin{array}{r} 0.037 \\ 27 \sqrt{1.0000} \\ \underline{81} \\ 190 \\ \underline{189} \\ 1 \end{array}$$

$$7. \phi(143) = \phi(11 \times 13) = [\phi(11), \phi(13)] \\ = [2, 6] = 6$$

$$\begin{array}{r} 777 \\ 143 \sqrt{111111} \\ \underline{1001} \\ 1101 \\ \underline{1001} \\ \underline{1001} \\ 0 \end{array}$$

$$8. \theta(143) = \theta(11 \times 13) = [\theta(11), \theta(13)] \\ = [2, 6] = 6$$

$$\begin{array}{r} 0.006993 \\ 143 \sqrt{1.0000000} \\ \underline{858} \\ 1420 \\ 1287 \\ 1330 \\ 1287 \\ 430 \\ 429 \\ 1 \end{array}$$

$$9. \phi(33) = \phi(3 \times 11) = [\phi(3), \phi(11)] \\ = [3, 2] = 6$$

$$\begin{array}{r} 3367 \\ \sqrt{111111} \\ \underline{-99} \\ 121 \\ \underline{-99} \\ 221 \\ \underline{-198} \\ 231 \\ \underline{-231} \\ 0 \end{array}$$

$$10. \theta(33) = \theta(3 \times 11) = [\theta(3), \theta(11)] \\ = [1, 2] = 2$$

$$\begin{array}{r} 0.\overline{03} \\ \sqrt{1.00} \\ \underline{-99} \\ 1 \end{array}$$

$$11. \phi(5738733) \\ = \phi(3^2 \times 7^3 \times 11 \times 13^2) \\ = 3 \times 7^2 \times 13 [\phi(3), \phi(7), \phi(11), \phi(13)] \\ = 1911 [3, 6, 2, 6] \\ = 1911 \times 6 \\ = 11466 \\ 57387331111 \dots 1 \text{ (11466位)}$$

$$12. \theta(117649) \\ = \theta(7^6) \\ = 7^5 \cdot \theta(7) \\ = 7^5 \cdot 6$$

= 100842

$$\text{即 } \frac{1}{117649} = 0.\overline{a_1 a_2 a_3 \dots \dots \dots a_{100842}}$$