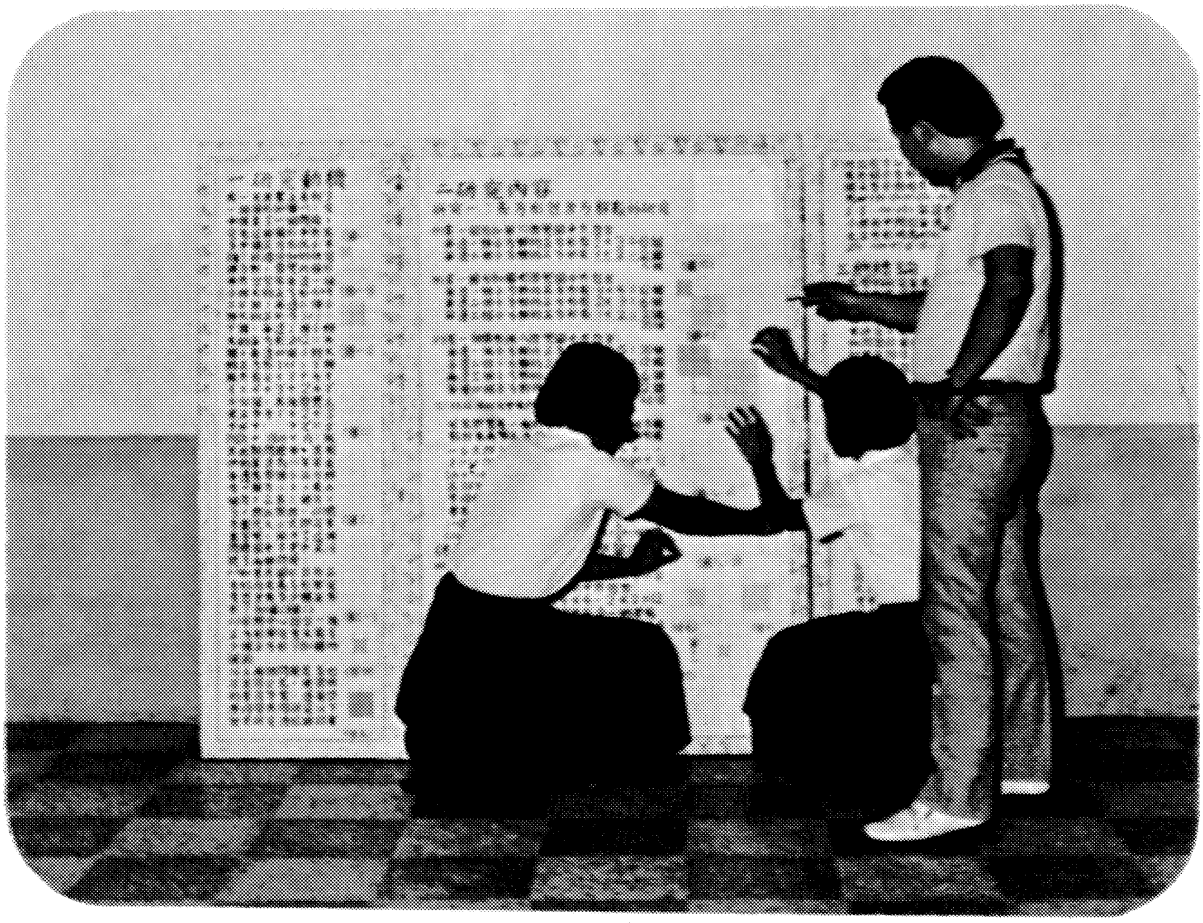
重疊方格的速算法

國中組數學第三名

屏東縣鶴聲國中

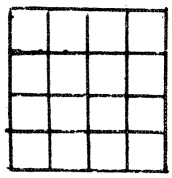
作　　者：洪麗珠・陳瑞靜

指導老師：李　順　興

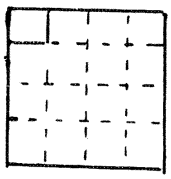


壹、研究動機：

有一天在書上看到了一個圖形（如圖一）書上提出了一個問題，究竟這個圖形共有多少個正方形（大小不同）？於是拿出筆來仔細的研究一番，發覺此圖形中每邊一格大的正方形有（如圖二）4 × 4 = 16 個；每邊兩格大的正方形（如圖三）有 3 × 3 = 9 個；每邊三格大的正方形（如圖四）有 2 × 2 = 4 個；每邊四格大的正方形（如圖一）有 1 × 1 = 1 個；



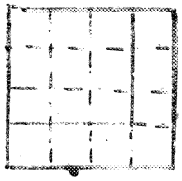
（圖一）



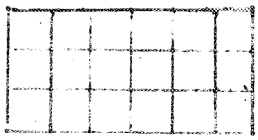
（圖二）

故此圖形中共有正方形 $4\times4+3\times3+2\times2+1\times1=4^2+3^2+2^2+1^2=30$個；此恰合 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2$ 之形式，經請教老師的結果得知 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，

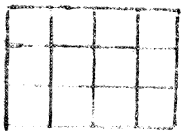

（圖三）


（圖四）

因此若欲解決有如上式形式的問題最簡捷的方法是①算看看每邊有幾格小正方格②若每邊有2個，則 $n=2$；每邊有5個 $n=5$……再將n值代入 $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 很快即能求得答案。解決了上述問題腦中突然浮現了三個問題：

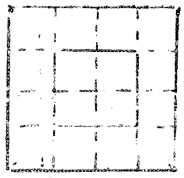

（圖五）

㈠假如原圖是個長方形則究竟（如圖五、圖六）$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 是否管用？若不能用究竟又要如何才能很快的求得答案。

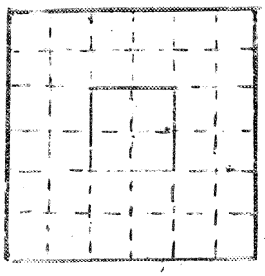

（圖六）

㈡如在每邊n個小格的正方形中間挖掘小正方形（如圖七、八）則在此圖中，究竟含有多少個實心正方形？（正方形面積完整）

㈢如在每邊n個小格的正方形中間挖掘小正方形（如圖七、圖八）則若單以所劃正方形（空心）爲準，究竟又有多少個呢？


（圖七）

爲解決心中疑竇遂邀了陳瑞靜來共同研究，皇天不負苦心人，終於解決了這三個問題，以下就是我們兩人的研究過程與結果。


（圖八）

貳、研究內容：

研究一：在一個長爲n格小格而寬爲m個小格的長方形中究竟有多少個正方形？

㈠畫一圖（如圖九）研究結果此圖中有：

(1)每邊一個小格的正方形 2 × 3 = 6 個

(2)每邊二個小格的正方形 1 × 2 = 2 個

共 8 個

（圖九）

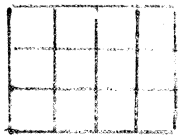
㈡畫一圖形（如圖十）研究結果發覺此圖形中有：

(1)每邊一小格的正方形 3 × 4 = 12 個

(2)每邊二小格的正方形 2 × 3 = 6 個

(3)每邊三小格的正方形 1 × 2 = 2 個

共 20 個



（圖十）

㈢畫一圖形（如圖十一）研究結果發覺此圖形中有：

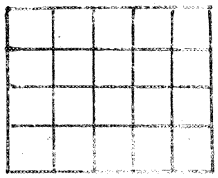
(1)每邊一小格的正方形有 4 × 5 = 20 個

(2)每邊二小格的正方形有 3 × 4 = 12 個

(3)每邊三小格的正方形有 2 × 3 = 6 個

(4)每邊四小格的正方形有 1 × 2 = 2 個

共 40 個



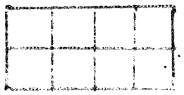
（圖十一）

㈣畫一圖形（如圖十二）研究結果發覺此圖形中有：

(1)每邊一小格的正方形有 2 × 4 = 8 個

(2)每邊二小格的正方形有 1 × 3 = 3 個

共 11 個



（圖十二）

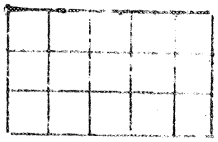
㈤畫一圖形（如圖十三）研究結果發覺此圖形中有：

(1)每邊一小格的正方形有 3 × 5 = 15 個

(2)每邊二小格的正方形有 2 × 4 = 8 個

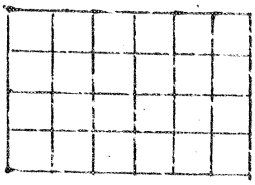
(3)每邊三小格的正方形有 1 × 3 = 3 個

共 26 個



（圖十三）

㈥畫一圖形（如圖十四）研究結果發覺此圖形中有：



（圖十四）

(1)每邊一小格的正方形有 $4 \times 6 = 24$ 個

(2)每邊二小格的正方形有 $3 \times 5 = 15$ 個

(3)每邊三小格的正方形有 $2 \times 4 = 8$ 個

(4)每邊四小格的正方形有 $1 \times 3 = 3$ 個

共　50 個

(七)畫一圖形（如圖十五）研究結果發覺此圖中有：

(1)每邊一格的正方形 $2 \times 5 = 10$ 個

(2)每邊二格的正方形 $1 \times 4 = 4$ 個

共　14 個

（圖十五）

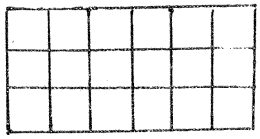
(八)畫一圖形（如圖十六）研究結果發覺此圖中有：

(1)每邊一格的正方形有 $3 \times 6 = 18$ 個

(2)每邊二格的正方形有 $2 \times 5 = 10$ 個

(3)每邊三格的正方形有 $1 \times 4 = 4$ 個

共　32 個



（圖十六）

(二)研究結果：

綜合以上結果，我們發覺在長方形中，若長與寬之方格差爲 1 格，2 格或 3 格時其結果之變化不同。計

(1)長與寬之差爲 1 格時呈 $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots\cdots + n(n+1)$ 之形式出現，此正合 $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots\cdots + n(n+1) = \Sigma n(n+1) = \Sigma n^2 + \Sigma n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}(n)(n+1) = \frac{1}{6}(n)(n+1)[2n+1+3] = \frac{1}{2}(n)(n+1)(2)(n+2) = \frac{1}{2} \times 2(n)(n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(n)(n+1)(n+2)$ 故長與寬差一格時祇要將長與寬中較小者

代入公式$\frac{1}{3}(n)(n+1)(n+2)$答案即可求出。

(2)長與寬之差爲2格時呈$1\times3+2\times4+\cdots\cdots+n(n+2)=\Sigma n^2+\Sigma 2n=\frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}(n)(n+1)=\frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1+6)=\frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+7)$

(3)長與寬之差爲3格時呈$1\times4+2\times5+3\times6+\cdots\cdots+(n)(n+3)=(n^2+3n)=n^2+3n=\frac{1}{6}(n)(n+1)+\frac{3}{2}(n)(n+1)=\frac{1}{3}(n)(n+1)(n+5)$（n同上）

(4)餘此類推。

研究二：如在每邊爲n格的正方格中間挖洞。究竟含有多少個實心正方形（面積完整無缺）

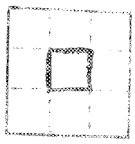
(一)研究過程：

1. 畫一圖（如圖十七）研究結果發覺此圖中有：

(1)每邊一格大的實心正方形$3\times3-1\times1=8$個

$=3^2-1^2=8$

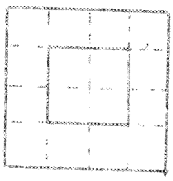
(2)每邊二格大的實心正方形$2\times2-2\times2=0$個$=2^2-2^2=0$　共　8個



（圖十七）

2. 畫一圖形（如圖十八）研究結果此圖形中有：

(1)每邊一格大的實心正方形$4\times4-2\times2=12$個



（圖十八）

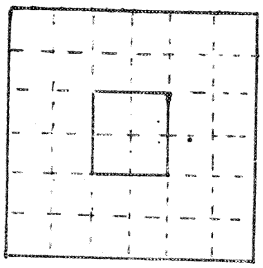
(2)每邊二格大的實心正方形 $3 \times 3 - 3 \times 3 = 0$ 個　　共 12 個

3. 畫一圖形（如圖十九）研究結果此圖形中有：

(1)每邊一格大的實心正方形 $6 \times 6 - 2 \times 2 = 32$ 個

(2)每邊二格大的實心正方形 $5 \times 5 - 3 \times 3 = 16$ 個

(3)每邊三格大的實心正方形 $4 \times 4 - 4 \times 4 = 0$ 個　　共 48 個



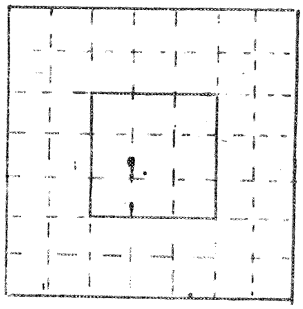
（圖十九）

4. 畫一圖形（如圖二十）研究結果發覺此圖形中有：

(1)每邊一格大的實心正方形 $7 \times 7 - 3 \times 3 = 40$ 個

(2)每邊二格大的實心正方形 $6 \times 6 - 4 \times 4 = 20$ 個

(3)每邊三格大的實心正方形 $5 \times 5 - 5 \times 5 = 0$ 個　　共 60 個



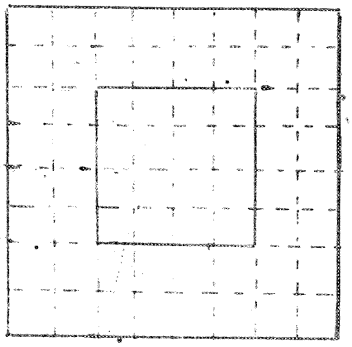
（圖二十）

5. 畫一圖形（如圖二十一）研究結果發覺此圖形中有：

(1)每邊一格大的實心正方形 $8 \times 8 - 4 \times 4 = 48$ 個 $= 8^2 - 4^2 = 48$

(2)每邊二格大的實心正方形 $7 \times 7 - 5 \times 5 = 24$ 個 $= 7^2 - 5^2 = 24$

(3)每邊三格大的實心正方形 $6 \times 6 - 6 \times 6 = 0$ 個 $= 6^2 - 6^2 = 0$　　共 72 個



（圖廿一）

㈡研究結果：

綜合以上討論，我們發覺

(1)若在每邊爲 n 邊小格的正方形中心挖空一個小方格的正方形，則含實心正方形共有 $n^2 + (n-1) + (n-2)^2 +$

$\cdots\cdots+(n-P)^2-1^2-2^2-3^2-\cdots\cdots-(n-P)^2$

如在每邊爲7格大的正方形中心挖一個小格大的正方形則所含實心正方形共有：

$7^2+6^2+5^2-1^2-2^2-3^2=96$ 個

(2)若在每邊爲n邊小格的正方形中心挖空二個小格大的正方形則含實心正方形共：

$n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots\cdots+(n-P)^2-2^2-3^2-4^2-\cdots\cdots-(n-P)^2$

(3)若在每邊爲n邊小格的正方形中心挖空三個小格大的正方形則含實心正方形共有：

$n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots\cdots+(n-P)-2^2-3^2-4^2-\cdots\cdots-(n-P)^2$

（P代表下降數與上升數所相碰的值）

(4)餘此類推。……。

研究三：在每邊爲n格的正方形中間挖掘正方形洞則究竟含有多少個正方形圖形？

(一)研究過程：

1. 畫一圖（如圖二十二）研究結果發覺此圖中有：

(1)所含正方形爲實心正方形有 $4^2-2^2=12$ 個

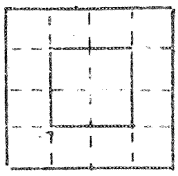
(2)所含正方形不爲實心正方形有：

(a)每邊四格者　$1\times1=1=1^2$

(b)每邊三格者　$2\times2=4=2^2$ 共6個

(c)每邊二格者　$1\times1=1=1^2$

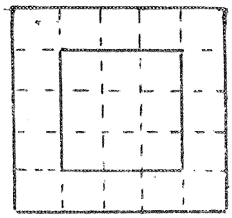
(3)故此圖中共有 $12+6=18$ 個正方形



（圖廿二）

2. 畫一圖（如圖二十三）研究結果發覺此圖形中有：

(1)所含正方形爲實心正方形有 $5^2-3^2=16$ 個



（圖廿三）

(2)所含正方形不爲實心的正方形有：

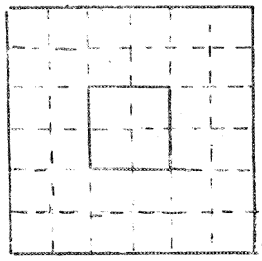
(a)每邊 5 格者　$1\times1=1$

(b)每邊 4 格者　$2\times2=4$　共 6 個

(c)每邊 3 格者　$1\times1=1$

(3)故此圖中共有 $16+6=22$ 個

3. 畫一圖（如圖二十四）研究結果發覺此圖形中有：



（圖廿四）

(1)所含正方形爲實心正方形者有：

$(6^2-2^2)+(5^2-3^2)=48$

(2)所含正方形不爲實心正方形者有：

(a)每邊 6 格大的正方形　$1\times1=1$ 個

(b)每邊 5 格大的正方形　$2\times2=4$ 個

(c)每邊 4 格大的正方形　$3\times3=9$ 個

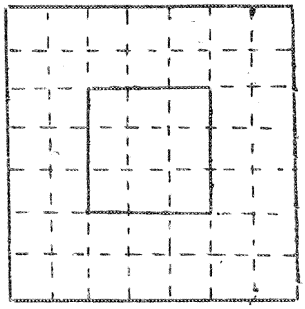
(d)每邊 3 格大的正方形　$2\times2=4$ 個

(e)每邊 2 格大的正方形　$1\times1=1$ 個

共　19 個

(3)此圖形中共有 $48+19=67$ 個

4. 畫一圖形（如圖二十五）研究結果此圖形中有：



（圖廿五）

(1)所含正方形爲實心正方形者有：

$(7^2-3^2)+(6^2-4^2)+(5^2-5^2)$

$=60$ 個

(2)所含正方形不爲實心正方形者

(a)每邊 7 格大的正方形爲　$1\times1=1$ 個

(b)每邊 6 格大的正方形爲　$2\times2=4$ 個

(c)每邊 5 格大的正方形爲　$3\times3=9$ 個

(d)每邊 4 格大的正方形爲　$2\times2=4$ 個

(e)每邊 3 格大的正方形爲　$1\times1=1$ 個

共　19 個

(3)此圖中共有 $60+19=79$ 個

㈡研究結果：

綜合以上研究，欲求所有正方形之個數時，有實心正方形與非實心正方形兩種，而實心正方形之求法已在前已論及。非實心正方形之求法由研究得知亦有規則其求法爲：

(1)查看每邊有幾個正方格，設有n格

(2)看中間挖空的正方形爲每邊幾格者設每邊爲m格者

(3)n格對m格，（n－1）對（m＋1），（n－2）對（m＋2）……至$\frac{n-m}{2}+1$爲單獨者。而（n－1）與（m＋1）皆爲1^2；（n－2）與（m＋2）皆爲2^2；（n－3）與（m＋3）皆爲3^2而$\frac{n-m}{2}+1$爲單一（$\frac{n-m}{2}+1$）^{2}者

(4)如欲解（圖二十六）則爲

(a)實心正方形（8^2-2^2）＋（7^2-3^2）＋（6^2-4^2）＋（5^2-5^2）＝100個

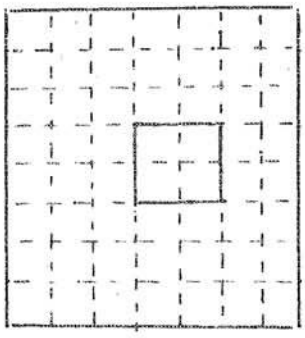
(b)非實心正方形有8格與2格者有$1^2+1^2=2$

7格與3格者　$2^2+2^2=8$

6格與4格者　$3^2+3^2=18$

5格者有　$4^2=16$

(c)此圖共有144個正方形



（圖廿六）

叁、總結論：

研究數學旨在訓練推理的能力，故研究數學問題決不可偏現一隅或故步自封，若所發覺的問題具有訓練推理的能力，也就頗有研究的價值。而數學問題的解決更不可强解硬算，最好能發現所謂的通式或公式，盡可能的找出其相同的地方。本研究主要的精神即在歸納整理問題的結果進一步發覺其公式，玆再將研究結果列舉於下，以供參考。

㈠在長方形中究竟含有多少個正方形？

(1)若長減寬＝1格　則公式爲$\frac{1}{3}(n)(n+1)(n+2)$

(2)若長減寬＝2格　則公式爲$\frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+7)$

(3)若長減寬＝3格　則公式爲$\frac{1}{3}(n)(n+1)(n+5)$

餘此類推

㈡在正方形中間挖正方形洞，究竟含有多少個實心正方形。

(1)在每邊n小格的正方形中間挖一每邊一小格的正方形則含實心正方形$n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots\cdots+(n-P)^2-1^2-2^2-3^2-\cdots\cdots-(n-P)^2$

(2)在每邊n格小格的正方形中間挖每邊二小格的正方形之公式爲$n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots\cdots+(n-P)^2-2^2-3^2-4^2-\cdots\cdots-(n-P)^2$

(3)在每邊n格小格的正方形中間挖每邊三小格的正方形之公式爲$n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots\cdots+(n-P)^2-3^2-4^2-\cdots\cdots-(n-P)^2$

㈢在每邊爲n格的正方形中央挖空每邊m格小格的正方形所含的正方形圖形爲

(1)算出實心方格數即$n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots\cdots+(n-P)^2-m^2-(m+1)^2-\cdots\cdots-(n-P)^2$

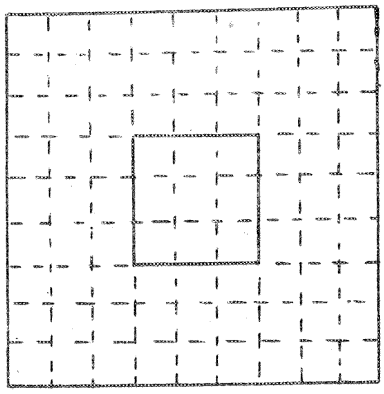
(2)算出非實心方格數即（n對m格）$=1^2+1^2$（n－1）格對（m＋1）格爲$2^2+2^2=8$（n－2）格對（m＋2）格爲$3^2+3^2=18\cdots\cdots$至$\frac{n-m}{2}+1$爲單一者，再相加。

當我們將研究結果告訴老師時，老師告訴我們在民國58年的大學聯考裏曾經考過一題這種問題（如圖），要我們利用第三種算法，算算看果然答案爲

$(9^2-3^2)+(3^2-4^2)+(7^2-5^2)+(6^2-6^2)=144$

$2\times1^2+2\times2^2+2\times3^2+4^2=44$

$144+44=188$



（圖廿七）