

變相漲價？

國中組數學第一名

台北縣立新莊國中

作 者：黃嘉銘・陳振雄

林振成

指導老師：林 保 平



壹、動機與目的：

六十六年十二月二十六日有一份報紙刊出了一篇專訪，論及自來水廠隔月抄表計費是否變相漲價的問題，而且舉出了兩個對住戶及水廠各有利弊的例子。計算水費電費在國一時便已學過，我們就想研究看看，到底在何種情況下對住戶有利，是否有公式可以立刻算出隔月抄表計費與按月抄表計費之差額。

貳、資料：

(一)自來水水費價目。

1 因我們只想討論住戶水費，故只看水表口徑 13 公厘，基本水費 20 元，基本度數 8 度，水表租金 8 元者。

2 分段計費單價：

第一段	20 度以下部分	每度 2.50 元
第二段	21 度至 30 度部分	每度 3.50 元
第三段	31 度至 50 度部分	每度 4.50 元
第四段	51 度至 200 度部分	每度 5.50 元
第五段	201 度至 2000 度部分	每度 4.50 元
第六段	2000 度以上部分	每度 3.50 元

3 隔月抄表計費方式係以每兩月抄得之用戶用水量除以 2 成爲單月用水量後，再按上列分段計費單價計算單月之水費，所得之單月水費金額之兩倍，即爲隔月抄表地區用戶水費單之「水費」。

(二)自來水廠舉例說明隔月抄表計費對住戶有利。

設某家庭七月用水 25°，八月用水 15°

1 每月抄表計費：

七月 25 度 $2.50 \times 20 + 3.50 \times 5 = 67.50$ 元

八月 15 度 $2.50 \times 15 = 37.50$ 元

合計水費 105 元，另加各月份表租及代征清潔規費。

2 隔月抄表水費：

兩月平均 20 度 $2 \times (2.50 \times 20) = 100$ 元

故水費 100 元，另加各月份表租及代征清潔規費。

3 故採用隔月抄表，住戶省 5 元。

(三)記者舉例說明隔月抄表使住戶吃虧。

設某家庭十月用水 50 度，十一月用水 312 度

1 每月抄表費用：

十月 50 度 $2.50 \times 20 + 3.50 \times 10 + 4.50 \times 20 = 175$ 元

十一月 312 度 $175 + 5.5 \times 150 + 4.5 \times 112 = 1504$ 元

合計 1679 元，另加各月份表租及代征清潔規費。

2 隔月抄表費用：

兩月平均 181 度

$$2 \times (2.50 \times 20 + 3.50 \times 10 + 4.50 \times 20 + 5.5 \times 131) = 1791 \text{ 元}$$

故水費 1791 元，另加各月份表租及代征清潔規費。

3 故採用隔月抄表住戶損失 112 元。

(四) 根據水費之分段，我們推得水費速算法：

設用水 x 度，「水費」為 $f(x)$ ，為便於計算，我們不計算其表租及清潔費等固定支出。

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} 20 & 0 \leq x \leq 8 \\ 2.5x & 8 < x \leq 20 \\ 3.5x - 20 & 20 < x \leq 30 \\ 4.5x - 50 & 30 < x \leq 50 \\ 5.5x - 100 & 50 < x \leq 200 \\ 4.5x + 100 & 200 < x \leq 2000 \\ 3.5x + 2100 & 2000 < x \end{cases}$$

由此連續兩月用水分別為 x 度及 y 度

則：1 按月抄表之水費為 $f(x) + f(y)$

$$2 \text{ 隔月抄表所計水費為 } 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

叁、研究過程：

(一) 為了解其利弊之情形，我們又舉了些例子，用速算法算出來

1. 150 度，150 度 → 按月 1550 元，隔月 1500 元
2. 48 度，42 度 → 按月 305 元，隔月 305 元
3. 28 度，34 度 → 按月 181 元，隔月 179 元
4. 24 度，32 度 → 按月 158 元，隔月 156 元
5. 80 度，10 度 → 按月 365 元，隔月 305 元
6. 2000 度，120 度 → 按月 9660 元，隔月 9140 元
7. 1000 度，10 度 → 按月 4625 元，隔月 4745 元

(二)由上述許多實例，我們猜測

- 1 按月或隔月水費之不同與每月用水之度數是否在同一計價範圍有關。
- 2 兩月份用水量相同或在同一計費範圍時，按月或隔月抄表其水費應相同。
- 3 兩月份用水度相差甚大時，按月抄表對住戶有利。
- 4 兩月份用水量相接近，但不在同一計價範圍時，隔月抄表對住戶有利。

(三)我們請教老師指導我們算出資料 4 中的水費速算函數表示法，然後用下法計算利弊。

設兩月用水分別為 x 度， y 度

- 1 兩月用水量在同一計價範圍時

$$\text{若 } 20 < x, y \leq 30, \text{ 則 } 20 < \frac{x+y}{2} \leq 30$$

$$\begin{aligned}\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= 2\left[3.5\left(\frac{x+y}{2}\right) - 20\right] \\ &= 3.5x + 3.5y - 40\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{而 } f(x) + f(y) &= (3.5x - 20) + (3.5y - 20) \\ &= 3.5x + 3.5y - 40\end{aligned}$$

$$\text{故 } 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y)$$

即隔月抄表與按月抄表費用相同

同理可算出在其他計價範圍時亦同，我們便得到

[結論一]若兩月用水分別為 x 度， y 度，而 x, y 均屬同一計價範圍時，隔月抄表之水費與按月抄表之水費相同。

- 2 兩月用水量不在同一計價範圍內

例 1 若 $20 < x \leq 30, 8 < y \leq 20$ ，則 $28 < x+y \leq 50$

$$\text{即 } 14 < \frac{x+y}{2} \leq 25$$

$$\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \begin{cases} 2.5x + 2.5y & \text{當 } 14 < \frac{x+y}{2} \leq 20 \\ 3.5x + 3.5y - 40 & \text{當 } 20 < \frac{x+y}{2} \leq 25 \end{cases}$$

$$f(x) + f(y) = 3.5x + 2.5y - 20$$

$$\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y)$$

等號只當 $y = 20$ 時成立

即隔月抄表比按月抄表便宜，至少是不貴

例 2 若 $50 < x \leq 200$, $200 < y \leq 2000$

$$\text{則 } 125 < \frac{x+y}{2} \leq 1100$$

$$\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \begin{cases} 5.5x + 5.5y - 200 & \text{當 } 125 < \frac{x+y}{2} \leq 200 \\ 4.5x + 4.5y + 200 & \text{當 } 200 < \frac{x+y}{2} \leq 2000 \end{cases}$$

$$f(x) + f(y) = 5.5x + 4.5y$$

$$\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq f(x) + f(y) \quad \text{等號只當 } x = 200 \text{ 時成立}$$

即按月抄表比隔月抄表便宜，至少是不貴

由這兩例我們發現，我們猜測的 1 2 是正確的，而 3 4 是有問題的，因所謂相差甚大與甚接近，必須有明確的界定，顯然猜測 1 “同一計價範圍” 是我們研究中必須注意的，因此我們便列了下表來討論在各種計價範圍時之情形。

	$0 \leq y \leq 8$	$8 < y \leq 20$	$20 < y \leq 30$	$30 < y \leq 50$	$50 < y \leq 200$	$200 < y \leq 2000$	$2000 < y$
$0 \leq x \leq 8$	○	+					
$8 < x \leq 20$		○					
$20 < x \leq 30$	+		○				
$30 < x \leq 50$				○			
$50 < x \leq 200$					○	—	
$200 < x \leq 2000$					—	○	
$2000 < x$							○

說明：1 ○表隔月按月水費相同。

2 +表按月抄表水費較高。

3 —表按月抄表水費較低。

(四)若依上表逐項討論可一一算出，但要做很多次，我們想找一個比較簡單的方法，當 x, y 為任意數時，可很快比較出按月抄表水費與隔月抄表水費的高低，同時能求出它們的差額。

我們再與老師研究，想出了一個與絕對值符號運算很類似，但比較簡單的符號來處理這個問題。這個符號是

$$[A] = \begin{cases} A & \text{當 } A > 0 \\ 0 & \text{當 } A \leq 0 \end{cases}$$

(註：我們學過的絕對值是 $|A| = \begin{cases} A & \text{當 } A > 0 \\ -A & \text{當 } A \leq 0 \end{cases}$)

我們令 $[x - b] = \begin{cases} x - b & \text{當 } x - b > 0 \\ 0 & \text{當 } x - b \leq 0 \end{cases}$ 時，我們算出

$$f(x) = 20 + 2.5 [x - 8] + [x - 20] + [x - 30] + [x - 50] - [x - 200] - [x - 2000]$$

$$\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2(20 + 2.5[\frac{x+y}{2} - 8] + [\frac{x+y}{2} -$$

$$20] + [\frac{x+y}{2} - 30] + [\frac{x+y}{2} - 50] - [\frac{x+y}{2}$$

$$- 200] - [\frac{x+y}{2} - 2000])$$

$$\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 40 + 2.5[x+y-16] + [x+y-40]$$

$$] + [x+y-60] + [x+y-100] - [x+y-$$

$$400] - [x+y-4000])$$

令 H 表按月抄表水費減隔月抄表水費

$$\begin{aligned} \therefore H(x, y) &= f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &= 2.5([x-8] + [y-8] - [x+y-16]) + ([x-20] + [y-20] - [x+y-40]) + \\ &\quad ([x-30] + [y-30] - [x+y-60]) + ([x-50] + [y-50] - [x+y-100]) + ([x+y- \\ &\quad 400] - [x-200] - [y-200]) + ([x+y- \\ &\quad 4000] - [x-2000] - [y-2000]) \end{aligned}$$

[結論二] 由 $H(x, y)$ ，對任意 x, y ，我們可求得按月與隔月抄表水費之差額，而判定其對住戶或水廠有利。

(註：純就水費收支而言)

(五) 我們想確定在何種情形下，隔月抄表對住戶有利，即利用 $H(x, y)$ 來繼續(三)中表之計算。

觀察 $H(x, y)$ 發現 $[x-b] + [y-b] - [x+y-2b]$ 是個關鍵。

令 $M(x, y) = [x-b] + [y-b] - [x+y-2b]$

1 $x \geq b$ 且 $y \geq b$ 時, $x + y \geq 2b$

$$M(x, y) = (x - b) + (y - b) - (x + y - 2b) = 0$$

2 $x \leq b$ 且 $y \leq b$ 時, $x + y \leq 2b$

$$M(x, y) = 0 + 0 - 0 = 0$$

3 $x < b$ 且 $y > b$ 時

$$M(x, y) = [y - b] - [x + y - 2b] = \{ \text{或} \frac{b - x}{y - b} \} > 0$$

4 $x > b$ 且 $y < b$

$$\text{同 3 知 } M(x, y) > 0$$

由上面的討論知 $M(x, y) > 0$ 等號只當 $x, y > b$

或 $x, y < b$ 或 $x = b$ 或 $y = b$ 時成立

現在我們開始研究 $H(x, y)$ 之值

1 $x \leq 200, y \leq 200$ 時

$$\begin{aligned} H(x, y) = & ([x - 8] + [y - 8] - [x + y - 16]) \times 2.5 \\ & + ([x - 20] + [y - 20] - [x + y - 40]) + ([x - 30] \\ & + [y - 30] - [x + y - 60]) + ([x - 50] \\ & + [y - 50] - [x + y - 100]) + 0 + 0 \geq 0 \end{aligned}$$

2 $x \geq 50, y \geq 50$ 時

$$\begin{aligned} H(x, y) = & 2.5 \times 0 + 0 + 0 + ([x + y - 400] - [x \\ & - 200] - [y - 200]) + ([x + y - 4000] - [x \\ & - 2000] - [y - 2000]) \leq 0 \end{aligned}$$

3 $x \geq 200, y \leq 50$ 時

(1) $x \geq 320, y \leq 50$

$$\begin{aligned} H(x, y) = & ([y - 8] - [y - 8]) \times 2.5 + ([y - \\ & 20] - [y - 20]) + ([y - 30] - [y - 30]) + \\ & (50 - y) + ([x + y - 400] - [x - 200]) + ([x \\ & + y - 4000] - [x - 2000]) \leq 8 \times 2.5 + 20 + \\ & 30 + 50 + (-120) + 0 = 0 \end{aligned}$$

(2) $200 \leq x \leq 320, y \leq 50$

$$H(x, y) = ([y - 8] - [y - 8]) \times 2.5 + ([y -$$

$$\begin{aligned}
& [20] - [y - 20] + ([y - 30] - [y - 30]) + \\
& (50 - y) - x + 200 \\
& = 320 - x - 5.5y + 2.5[y - 8] + [y - 20] \\
& \quad + [y - 30]
\end{aligned}$$

$$\therefore H(x, y) = \begin{cases} 320 - x - 5.5y & \text{當 } 0 \leq y \leq 8 \\ 300 - x - 3y & 8 \leq y \leq 20 \\ 280 - x - 2y & 20 \leq y \leq 30 \\ 250 - x - y & 30 \leq y \leq 50 \end{cases}$$

故(a) $200 \leq x \leq 276$, $0 \leq y \leq 8$ 時

$$H(x, y) \geq 320 - 276 - 44 = 0$$

(b) $200 \leq x \leq 240$, $8 \leq y \leq 20$ 時

$$H(x, y) \geq 300 - 240 - 60 = 0$$

(c) $200 \leq x \leq 220$, $20 \leq y \leq 30$ 時

$$H(x, y) \geq 280 - 220 - 60 = 0$$

(d) $220 \leq x \leq 320$, $30 \leq y \leq 50$ 時

$$H(x, y) \leq 250 - 220 - 30 = 0$$

(4) $x \leq 50$, $y \geq 200$ 時

由於 x , y 可交換與(3)相似

(v) 我們將前面所討論的繪表如下：

其中 x , y 表兩月用水量

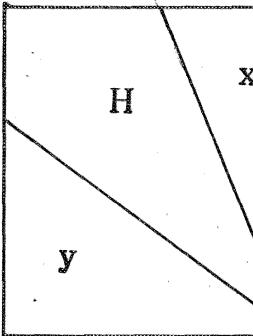
○表 $H(x, y)$ 之值為零

+ 表 $H(x, y)$ 之值為正 (包括一部分為○)

- 表 $H(x, y)$ 之值為負 (包括一部分為○)

△表 $H(x, y)$ 之值要將 x , y 代入方易知其值方加細分

(表一)

	$0 \leq x \leq 8$	$8 < x \leq 20$	$20 < x \leq 30$	$30 < x \leq 50$	$50 < x \leq 200$	$200 < x \leq 320$	$320 < x \leq 2000$	$2000 < x$
$0 \leq y \leq 8$	○	+	+	+	+	+	△	-
$8 < y \leq 20$	+	○	+	+	+	+	-	-
$20 < y \leq 30$	+	+	○	+	+	+	-	-
$30 < y \leq 50$	+	+	+	○	+	△	-	-
$50 < y \leq 200$	+	+	+	+	○	-	-	-
$200 < y \leq 320$	+	+	+	△	-	○	○	-
$320 < y \leq 2000$	-	-	-	-	-	○	○	-
$2000 < y$	-	-	-	-	-	-	-	○

說明：1 水表口徑 13 公厘，基本度 8 度。

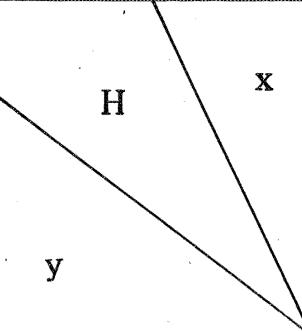
2 Δ 旁之三縱線為 $x = 276$, $x = 240$, $x = 220$

肆、同理，我們可推得水表口徑 20 公厘，基本度數 20 度，基本水費 50 元，水表租金 11 元之 $H(x, y)$ 為

$$\begin{aligned}
 & 3.5 \times ([x - 20] + [y - 20] - [x + y - 40]) + ([x - \\
 & 30] + [y - 30] - [x + y - 60]) + ([x - 50] + [y - \\
 & 50] - [x + y - 100]) + ([x + y - 400] - [x - 200] - \\
 & [y - 200]) + ([x + y - 4000] - [x - 2000] - [y - 2000])
 \end{aligned}$$

並求出其範圍，列表於下：

(表二)

	$0 \leq x \leq 20$	$20 < x \leq 30$	$30 < x \leq 50$	$50 < x \leq 200$	$200 < x \leq 350$	$350 < x \leq 2000$	$2000 < x$
$0 \leq y \leq 20$	○	+	+	+	+	-	-
$20 < y \leq 30$	+	○	+	+	+	-	-
$30 < y \leq 50$	+	+	○	+	△	-	-
$50 < y \leq 200$	+	+	+	○	-	-	-
$200 < y \leq 350$	+	+	△	-	○	○	-
$350 < y \leq 2000$	-	-	-	-	○	○	-
$2000 < y$	-	-	-	-	-	-	○

說明：1 水表口徑 20 公厘，基本度 20 度。

2 △旁之二縱線為 $x = 240$ ， $x = 220$ 。

3 記號意義同「表一」。

伍、結論：

(一)若兩月用水量均在同一計價範圍，則隔月抄表與按月抄表之水費相同。

(二)由表一與表二我們可看出在各種用水量下，隔月抄表與按月抄

表對住戶的利弊，特別的，兩表中每月用水量在 200 度或 200 度以下之住戶，隔月抄表對他而言不會多支費用，反而可能減少支出。

(三)報紙所刊水廠所舉實例，恰在我們所討論的“十”範圍內，而記者所舉實例，恰在我們的“一”範圍內，故對住戶而言，一為有利，一為有弊。

(四)就理論來說，水廠、記者均有其依據，但由於一般住戶的用水，很少有一個月超過 200 度的，因此，我們應該說

隔月抄表計水費

並非變相漲價

陸、推論與建議：

我們在老師指導下逐步完成水費的計算及討論。當我們參加台北縣科展時，有位參觀者對我們說“你們可以建議電力公司也採用隔月抄表的方法”。回到學校後，我們便再討論這個問題，根據電力公司規定

10 安培電表，基本度 20 度

100 度以下部份 每度 1.15 元

101 度到 500 度部份 每度 1.30 元

501 度以上部份 每度 1.50 元

故設兩月用電 x ， y 度， $f(x)$ 表電費（不計固定支出）

$$\text{則 } f(x) = 23 + 1.15 [x - 20] + 0.15 [x - 100] + 0.20 [x - 500]$$

若電力公司隔月抄表計費方法與自來水公司相同，則隔月抄表電費

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 46 + 1.15 [x+y-40] + 0.15 [x+y-200] + 0.20 [x+y-1000]$$

令 $H(x, y)$ 表按月抄表與隔月抄表電費之差

$$\begin{aligned} \text{則 } H(x, y) &= f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &= 1.15([x-20] + [y-20] - [x+y-40]) + \\ &\quad 0.15([x-100] + [y-100] - [x+y-200]) \\ &\quad + 0.20([x-500] + [y-500] - [x+y-1000]) \end{aligned}$$

故 $H(x, y) \geq 0$ 對任意 x, y 均成立

即隔月抄表對住戶必為有利，至少不增費用

而採隔月抄表時，電力公司必可與自來水公司一樣，在抄表、收費、印發電費單……等方面，減少一半的人力、物力，必可彌補少收的電費。

據報紙刊載，電力公司曾試辦隔月抄表，後因有些人反對而取消，由上述的討論，我們知道隔月抄表計電費較佳，因此，我們建議

“電力公司也採用隔月抄表法計電費”