整數三角形

高中教師組數學第三名

台北市立中山女子高級中學　　　　作　者：花　錦　銘

一、前言

令a，b，c，表△ABC三邊的長，△表△ABC之面積，若a，b，c，△皆爲整數，則△ABC稱爲整數三角形，此a，b，c三數稱爲Heronic triples ，當(a，b，c)＝1時，稱爲Primitive Heronic triples ，如3，4，5(△＝6)，5，5，6(△＝12)皆是，大家所熟知的畢氏三數實爲Heronic triples 的特例。由畢氏三數所形成之畢氏三角形即是有一角爲直角的整數三角形(參考資料1，Vol.8 No.3 (1975／76))。最近Mathenatical spectrum 發表了幾篇文章，皆是討論 Heronian triangles 最近發表的 John Strange，(Volumn 10, No.1 (1977／78))曾提出一個待解決的問題：「Given a natural number n determine every Heronian triangle whose area is n」筆者利用I.B.M計算機計算出729 組整數三角形的數據(參考附表一)，發覺每一個整數三角形的面積皆爲6的倍數。(目前已證得之結論爲：任何直角整數三角形(畢氏三角形)的面積必爲6的倍數)，因此我們很自然的會提出兩個問題：

(1)是否任何整數三角形的面積皆爲6的倍數？

(2)假如(1)成立的話，那麼是否每一個6的倍數皆有一個整數三角形與之對應？

本文第一個目的即在解決以上兩個問題，另一方面，本文將證明：任何等腰整數三角形與三邊成等差數列的整數三角形，必可由兩個畢氏三角形組合而成。另外本文將導出一組公式可以表示出所有等腰整數三角形的三邊，並由此導出一個有趣的結論「

所有這種等腰整數三角形必成雙出現，而且面積皆相等」，如 $\begin{matrix}5,5,6\\5,5,8\end{matrix}$（$\triangle=12$）$\begin{matrix}13,13,10\\13,13,24\end{matrix}$（$\triangle=60$） 我們不妨將這種成對出現的等腰整數三角形稱為學生等腰整數三角形，最後本文將提出一個方法，利用此方法可以導出無限多整數三角形，其三邊成等差數列，並且證明此種三角形必為 Primitive Heronian triangles。

〔定理1〕任何整數三角形（Heronian Triangles） 的面積必為6的倍數。

〔定理2〕並非每一個6的倍數皆有一整數三角形與之對應。

〔定理3〕a, b, c 為等腰整數三角形且 $a=b$，$(a, b, c)=1$

$$\leftrightarrow \begin{cases} a=b=m^2+n^2 \\ c=2(m^2-n^2) \vee 4mn \end{cases}$$ 其中 $m, n \in N$，$m>n$

$(m, n)=1$　　m, n 一奇一偶

〔推論1〕任何等腰整數三角形必可由兩個相同的畢氏三角形組合而成。

〔定理4〕若整數 $\triangle ABC$ 之三邊 a, b, c 成等差數列，則 $\triangle ABC$ 必可由兩個畢氏三角形組成。

〔定理5〕若 $2k-d$，$2k$，$2k+d$ 為整數三角形的三邊（公差為 d），$h^2=3(k^2-d^2)$

則 $4k+2h-d$，$4k+2h$，$4k+2h+d$ 亦為整數三角形的三邊（公差為 d）

〔定理6〕若 $(2k-d, 2k, 2k+d)=1$，$h^2=3(k^2-d^2)$，則 $(4k+2h-d, 4k+2h, 4k+2h+d)=1$

二、參考資料

1. Mathematical Spectrum　Volume 8 No.3 (1975/76)
Volume 9 No.2 (1976/77)
Volume 10 No.1 (1977/78)

Volume10 No.3 (1977 / 78)

2. Waclaw Sierpinski , pythagorean Triangles