寬度與周長一次愉快的結合
——等寬圖形周長的探討

高中組數學第三名

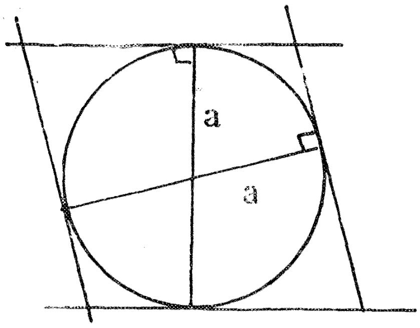
省立基隆高中

作　　者：蔡振東・鄭克傑

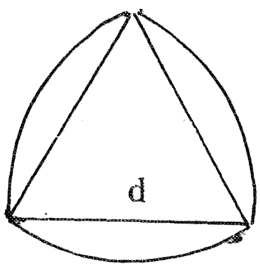
指導老師：林　豐　理

一、動機

我們都知道圓有一個性質：假如用兩條平行綫夾住它，則無論從那一個方向來夾（見圖１），其兩綫間的距離恒為一個常數（即圓的直徑），這個性質是不是圓所獨有的性質呢？換句話說，假如一個圖形具有這種性質，它是否必然是一圓呢？在課堂裡，老師偶然提到了所謂的"諾雷三角形"（見圖２）；這個"三角形"解答了上面的問題。



（圖１）



（圖２）

諾雷三角形是分別以正三角形之三頂點為圓心，邊長為半徑畫弧，由這三段圓弧所構成之圖形。

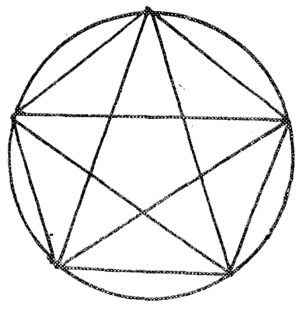
因為無論從那個方向來夾這個三角形，兩平行綫間的距離都相等（即邊長ｄ），因此上面這個問題的答案是否定的。除此之外，上面兩個圖形，假如它們的寬度（見註）相同的話，周長必相等（簡單的計算可以求出兩者的周長均為$d\pi$，當$a=d$時）這引

起了我們的興趣，我們想要知道的是：除了上述兩種圖形外，是否還有其他這種等寬（見註）的圖形？假若有，那麼在寬度相同的條件下，它們的周長是否都相等呢？這就是本文所要研究的問題。

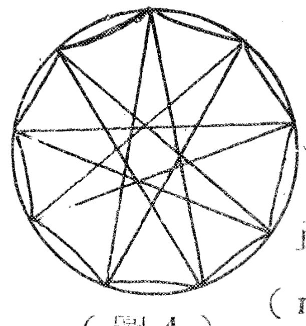
註：寬度是指二平行綫，從任一方向夾住一圖形，若其距離恒爲一常數，我們稱此圖形爲等寬圖形，此常數爲其寬度，如圖1之圓爲等寬圖形，寬度爲a，如圖2之諾雷三角形爲等寬圖形，寬度爲d。

二、正n邊形形成的正n弧形

仔細分析諾雷三角形，由於原三角形是一個正三角形，每邊長相等，是故以此邊長爲半徑，頂點爲圓心，可畫出弧端點相連接的封閉圖形，將這種觀念推展下去，我們不難想像，凡正n邊形都可作出類似的圖形，當然，爲使每一頂點恰有唯一之對邊，此時n必須取爲奇數；比如，以正五邊形爲例，以每個頂點爲圓心，頂點至其對邊端點之長d爲半徑，可畫出一弧，其兩端點恰與對邊之兩端點相合，按序一個頂點一個頂點畫下去，我們即可得出由五個等弧構成的圖形（見圖3），以此類推，對於任意正n邊形（n爲奇數），我們亦可得出由n個等弧圍成的弧形，（以下我們簡稱爲"正n弧形"）圖4是一個正九弧形的例子。



（圖3）



正n弧形

（n＝9）

（圖4）

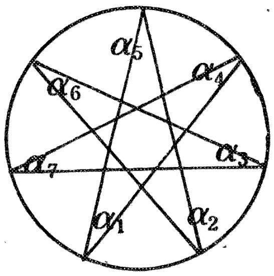
話說回來，這些正n弧形，是否都是等寬圖形呢？如果寬度相同，它們的周長又都會相等嗎？先說等寬，這點比較明顯，因爲任一對平行綫，如果夾住這個圖形，其中一平行綫必經過一頂點，而另一平行綫必與此頂點所對弧相切；由正n弧形之作法，

我們可知這個距離都等於 d 。接下來，我們研究等周的問題。

前面我們已約略提到圓與諾雷三角形的周長相等，約爲 d π ；對於一般的正 n 弧形，我們有底下的

定理 1 ：一個寬度爲 d 的正 n 弧形，其周長爲 dπ 。

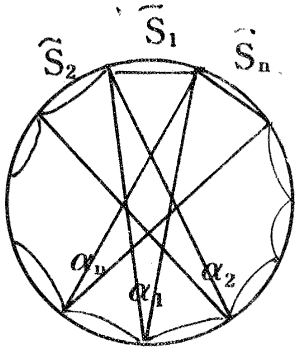
pf ：首先連接每一頂點與其對弧之兩端點形成一正 n 角星（圖 5 ）每一個角 α_1 ， α_2 ，………α_n ，我們稱它爲星角。（注意：n 爲奇數）



（圖 5 ）

n 角星與星角

（ n = 7 時）



（圖 6 ）

由正 n 弧形之等寬性質知此星形之每一綫段長均爲 d ，故正 n 弧形之周長爲 d α_1 ＋ d α_2 ＋……＋ d α_n = d（ α_1 ＋ α_2 ＋……＋ α_n ）

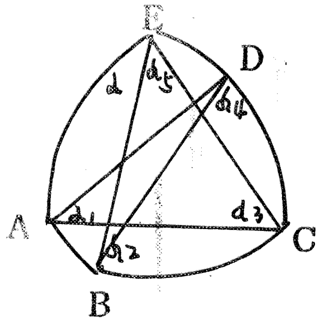
其次，因爲每一個正 n 邊形必內接於一圓，我們取一圓 C ，包含此 n 個頂點（圖 6 ），由於星角在圓 C 上所對之弧 $\widehat{S_1}$ $\widehat{S_2}$ …… $\widehat{S_n}$ 恰好構成此圓 C ，由圓周角定理知 α_1 ＋ α_2 ＋……＋ α_n = π ，亦即正 n 弧形之周長爲 dπ 。

由定理 1 我們可以得到下面的結論：

所有正 n 弧形，若其寬度相同，周長亦相等。

三、一般 n 弧形

如果一個 n 邊形不是正 n 邊形（ n 爲奇數），但所有頂點至其對邊端點的距離都相等，比如都等於 d 的話，是不是也可以做出等寬圖形來？假如可以的話，周長是否也仍爲 d π 呢？答案是肯定的。

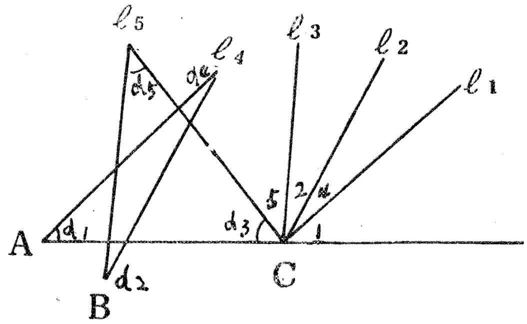


（ 圖 7 ）

（圖7）是一個不規則的五邊形，其中每一對角綫長都等於 d ，同樣的，以每一頂點爲圓心，d 爲半徑，可畫一弧，弧的兩端與對邊的兩端相接，所形成的 n 弧形；援用上面的論述可知，亦爲一等寬圖形（寬度爲 d ），以圖 7 的例子，我們來看它的周長是多少。

我們仍然以 α_1 ，$\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_5$ 表示這五角星的五個星角，則這五個弧形的周長爲 $d\alpha_1 + d\alpha_2 + \cdots\cdots + d\alpha_5 = d(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_5)$；現在我們要研究的是 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots \alpha_5$ ，是否仍等於 π 呢？

證明很簡單，我們用國中課本裡證明三角形三內角和爲 π 的方法來證明，如圖 8 ，延長 AC 綫，在 C 點作 ℓ_1 ℓ_2 ℓ_3 分別平行於 $\overleftrightarrow{AD}$ ，$\overleftrightarrow{BD}$ ，$\overleftrightarrow{BE}$ ，利用兩綫平行關係，可以得知 L_1 ，L_2 ，L_4 L_5 之度量分別等於 α_1 ，α_2 ，α_4 ，α_5 ，則五個星角和恰等於一個平角，即 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_5 = \pi$ 故得知其周長亦爲 $d\pi$ 。



（ 圖 8 ）

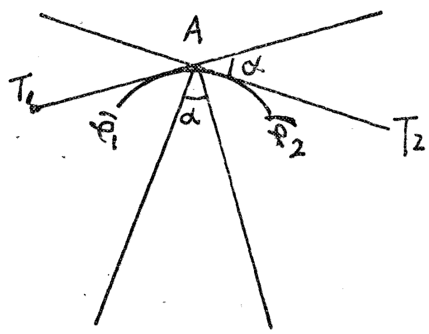
依同法可推得；任一奇 n 邊形，若每一頂點至其對邊兩端點之距離都相等（均爲 d ），可以做出由奇 n 段弧構成的等寬圖形，且其周長爲 $d\pi$ ，我們將如此做得之圖形，稱爲一般 n 弧形，述爲定理如下：

定理 2 ：一般 n 弧形，若其寬度爲 d ，則周長爲 $d\pi$（ n 爲奇數），換句話說，我們可得底下更一般化之結論：

所有 n 弧形（正 n 弧形與一般 n 弧形）若其寬度相等，則有相等的周長（ n 爲奇數）。

四、無“稜角”的等寬圖形

以上的論述，予人美中不足的感覺，因為第一，只限於奇數n弧形的探討；第二，這些n弧形都不夠平滑——亦即在n角星的頂點（或n邊形的頂點，或弧的端點）都有“稜角”出現，我們只要在這個頂點，對相鄰的兩段弧做切線，就能一目瞭然了。（見圖9）

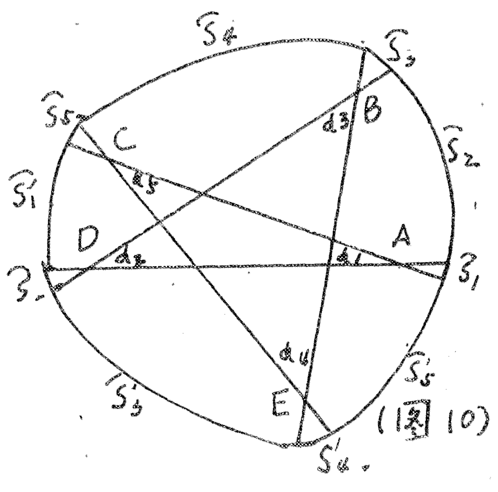


（圖9）

圖9：有“稜角”的弧形
其中T_1為$\overset{\frown}{\ell_1}$弧的切線
T_2為$\overset{\frown}{\ell_2}$弧的切線
注意：T_1與T_2之夾角，恰為A點的星角α

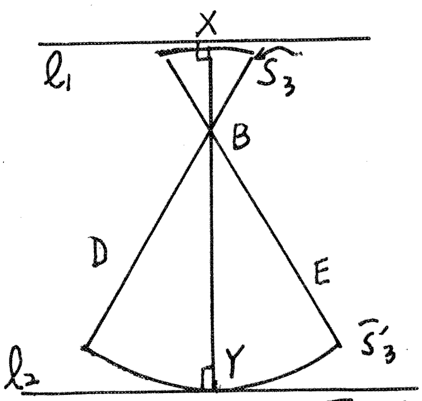
我們想進一步探討，是否可以作出一個由圓弧構成，其弧數為偶數的等寬圖形？是否能作出一個由圓弧構成，眞正平滑的等寬圖形來（除圓以外）？很幸運地，這兩個問題，我們都解決了。

首先，我們研究第一類的等寬圖形，這一類圖形仍然以n角星為基礎，將n角星的每一邊（設每邊長為r）向兩方各延長一個等距離t，在每一頂點分別以t及r＋t為半徑畫圓弧，所得的2n段圓弧即可接續成一封閉的等寬圖形。圖10是以五角星為基礎作出的例子。



我們很容易看出這類圖形為等寬圖形，我們只要以任二條平行線，如ℓ_1，ℓ_2夾住這圖形（見圖11），ℓ_1切$\overset{\frown}{S_3}$於X；ℓ_2切$\overset{\frown}{S'_3}$於Y，連$\overline{BX}$，$\overline{BY}$；

∵$BX \perp \ell_1$，$BY \perp \ell_2$，$\ell_1 \parallel \ell_2$，X，B，Y三點共



（图11）

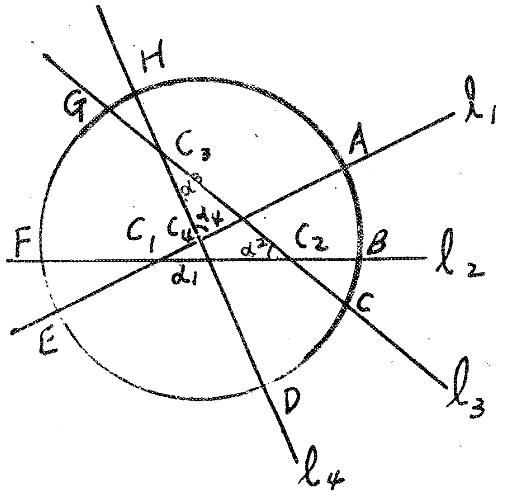
線。

由作圖知$XY = r + 2t$；即兩條平行線從任何方向夾住這圖形，其寬度恒爲一定數，所以爲等寬圖形。

現在，我們來仔細數一數這樣做出來的等寬圖形，其圓弧的數目必爲偶數——因爲圓弧必成對出現（如圖 11 中相對之兩弧）。接著，我們在每一個弧端點作相鄰兩弧的切線；因爲它們都垂直於經過該點的直線，故兩切線必重合（注意：每一個端點只有一線包含它），因此，是無稜角的等寬圖形，如果其寬度爲d，周長是否是$d\pi$？比如在圖10中，以A爲圓心畫出的弧有兩段$\widehat{S_1}$ $\widehat{S_1'}$，其長度和爲$\ell(\widehat{S_1}) + \ell(\widehat{S_1'}) = t\alpha_1 + (r+t)\alpha_1 = (r+2t)\alpha_1 = d\alpha_1$。

同理$\ell(\widehat{S_2}) + \ell(\widehat{S_2'}) = d\alpha_2$；………；$\ell(\widehat{S_5}) + \ell(\widehat{S_5'}) = d\alpha_5$；而$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_5 = \pi$，故此圖形周長爲$d\pi$。上面的證明是$n = 5$時的情形，至於任意奇數$n$，因爲在㈢中我們已證得$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_5 = \pi$，故其周長爲$d\pi$，顯然成立。

其次，我們來研究第二類的極具普遍性的等寬圖形。以一組任意相交的直線爲基礎（其中任二線相交於一點，任三線不共點），如圖12中有四條相交的直線，$\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4$，在$\ell_1$上取一點A，找一條與$\ell_1$“相鄰”的線$\ell_2$，以$\ell_1$ ℓ_2之交點C_1爲圓心，C_1A爲半徑作弧，交ℓ_2於B，接著找與ℓ_2相鄰的另一線ℓ_3，以ℓ_2 ℓ_3的交點C_2爲圓心，C_2B爲半徑畫弧交ℓ_3於C；如此繼續作圖，可得弧$\widehat{CD}$，$\widehat{DE}$，……，$\widehat{GH}$；最後以C_4爲圓心，C_4H爲半徑作的弧，剛好與A連接而成一個封閉的曲線；圖形會恰好連接成一個封閉的曲線，確實有點奇怪。不過，只要我們注意底下的事實就不難看出它勢必如此；關鍵在於：相鄰的兩線段



（ 圖 12 ）

必等長。比如在圖 12 中。

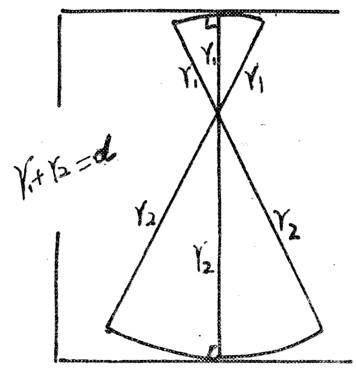
$\because C_1A = C_1B$ ，

$C_1E = C_1F$

$\therefore AE = BF$

以此類推， $AE = BF = CG = DH$。 所以當 $C_4D = C_4E$ 時， 顯然 $C_4H = C_4A$，而圖形恰好可接合在一起了。

至於它是等寬圖形，我們可以從圖 13 中看出，夾在兩個相對的弧上的兩平行綫間的距離爲 $r_1 + r_2$ ，恰爲兩綫段中任一綫段的長 d ，而前面我們已說明此圖形中所有的綫段等長，因此等寬的性質也就顯而易見了。我們發現它的弧數也是偶數，而且爲一無稜角的眞正平滑曲綫，（證明與第一類同）至於它的周長呢？設其寬度爲 d ，我們也不難發現它的周長仍然爲 $d\pi$ ；我們以圖 12 爲例，證明如下：



（ 圖 13 ）

以 C_1 爲圓心，所作的兩弧 $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{FE}$ ，其長度和 $\ell(\overset{\frown}{AB}) + \ell(\overset{\frown}{FE}) = \alpha_1(C_1A + C_1E) = \alpha_1 AE = \alpha_1 d$

同理 $\ell(\overset{\frown}{BC}) + \ell(\overset{\frown}{GE}) = \alpha_2 d$

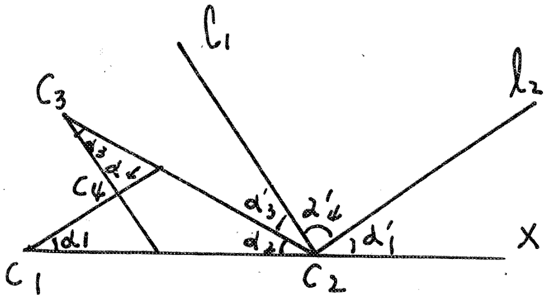
$\ell(\overset{\frown}{CD}) + \ell(\overset{\frown}{HG}) = \alpha_3 d$

$\ell(\overset{\frown}{ED}) + \ell(\overset{\frown}{AH}) = \alpha_4 d$

延長綫 C_1C_2 至 X（圖 14）分別過 C_2 作 $\ell_1 \parallel \overline{C_3C_4}$ ，$\ell_2 \parallel \overline{C_1C_4}$

知 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1' + \alpha_2 + \alpha_3' + \alpha_4' = \pi$

$\therefore$ 周長亦爲 $d\pi$



（圖 14）

雖然上面的證明只證明了以四條綫為基礎作出的等寬圖形，但從證明的過程來看，無疑地，我們可以同樣的方法，推廣至任意 n 條綫的情形。

綜觀上述兩類等寬圖形的作法和結果，我們可以發現由圓弧所構成的等寬圖形，有弧數為奇數帶有稜角的圖形，也有弧數為偶數而無稜角，且寬度為 d 時，周長為 d π 的等寬圖形了。

五、由圓弧構成之任意等寬圖形

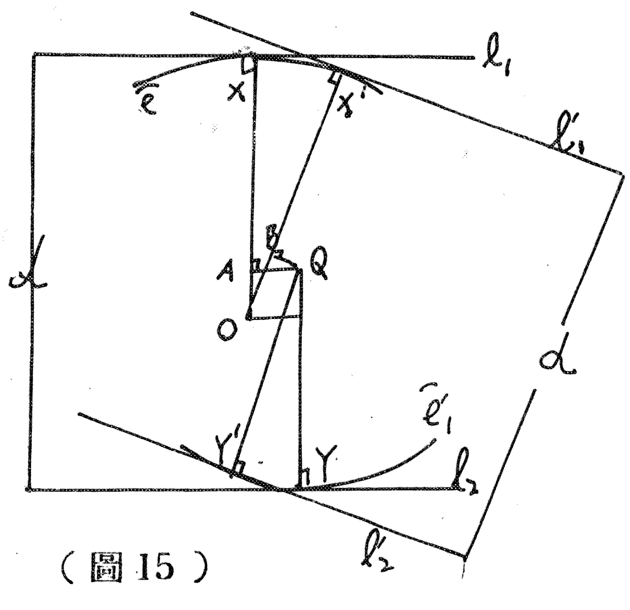
我們現在考慮一個更普遍的情況：任一個等寬圖形若由圓弧構成，其周長是否與前述的圖形一樣，僅與寬度有關？為處理這個問題，我們先引介兩個名詞：①圓弧所在圓之圓心，稱為此弧之曲率中心，②弧上端點以外之點稱為此弧之內點。現在我們分兩種情形來考慮：

給予二平行綫夾住圖形：

(一)當兩平行綫切兩對弧於其內點時

1. 這兩個圓弧之曲率中心必重合

pf：設兩個曲率中心不一樣（見圖15）



（圖 15）

弧 $\widehat{\ell_1}$ 與 $\widehat{\ell_1'}$ 之曲率中心，分別為 O 及 Q，且半徑分別為 r_1 與 r_2。

首先，任作二平行綫 ℓ_1，ℓ_2 分別切兩弧 $\widehat{\ell_1}$ $\widehat{\ell_1'}$ 於 X 與 Y，若寬度仍然為 d，我們過 Q 作 $\overline{QA} \perp \overline{OX}$，令 $\overline{OA} = a$，則 d =

$r_1 + r_2 - a$。

其次，又作另二平行線ℓ_1'與ℓ_2'分別切兩弧$\widehat{\ell_1}$與$\widehat{\ell_1'}$於 X′與Y′，再過Q作$\overline{QB} \perp \overline{OX'}$；令$\overline{OB} = b$，則$d = r_1 + r_2 - b$（等寬性質）。

但$a \neq b$，顯然矛盾　　∴O與Q必重合

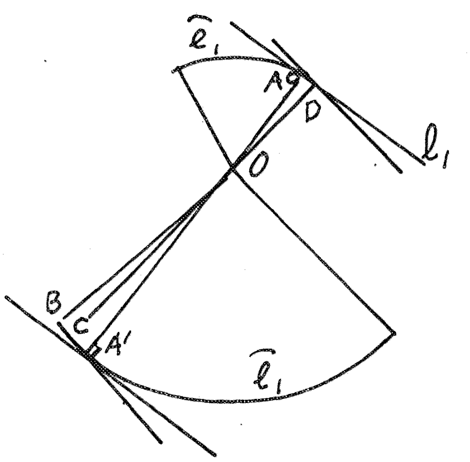
2. 兩弧必須端點對端點

由 1. 已經知道兩對弧必須共一曲率中心，但是當兩平行線之一到達一弧之端點時，第一平行線是否必經另一弧之端點？答案是肯定的。

底下的討論，我們採用反證法：

假若兩平行線中的一線ℓ_1包含$\widehat{\ell_1}$中之一端點A，而另一線ℓ_2切$\widehat{\ell_1'}$中之內點A′時（見圖 16），此時端點A有兩種可能的情形：

(1)若A為非稜角點：



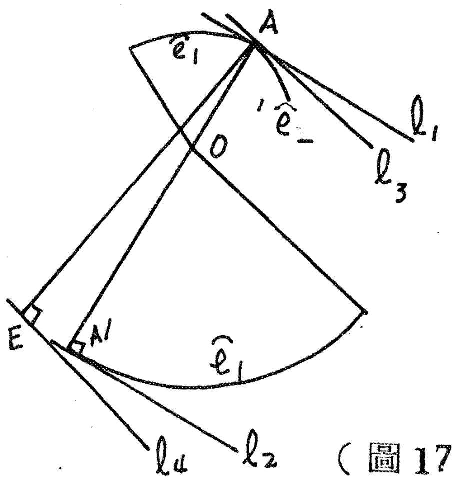
（圖 16）

則我們將ℓ_2向“左移”再切$\widehat{\ell_1'}$於C時，由於等寬性質及A點非稜角點的關係，ℓ_1將不可能再過A而與“左移”後的ℓ_2平行，ℓ_1勢必要切$\widehat{\ell_2}$於某一內點D，此時$\widehat{AD}$弧與$\widehat{AC}$弧將共曲率中心，且曲率中心仍為O，此時D在以OA為半徑的弧上，A不是端點，矛盾。

(2)若A為稜角點（見圖17）

則ℓ_1線（過A，垂直$\overline{OA}$）與過A點而切$\widehat{\ell_2}$之切線ℓ_3之間，有一夾角（即A之稜角）

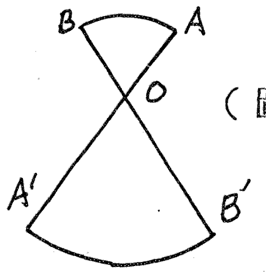
取$\widehat{\ell_1'}$弧上A′之“左鄰”一點E，使過E之切線ℓ_4之斜率介於ℓ_1與ℓ_3間（亦即，若過A點，做ℓ_4之平行線，則此線介於ℓ_1，ℓ_3之間）



（圖17）

由圖形之等寬性和A應爲$\widehat{A'E}$弧之曲率中心，即A爲$\widehat{\ell_1'}$之曲率中心（∵$\widehat{A'E}$在$\widehat{\ell_1'}$上），此顯然矛盾。

由(1)(2)我們得證“端點必須對端點”，也就是兩對弧必如圖18的情況：



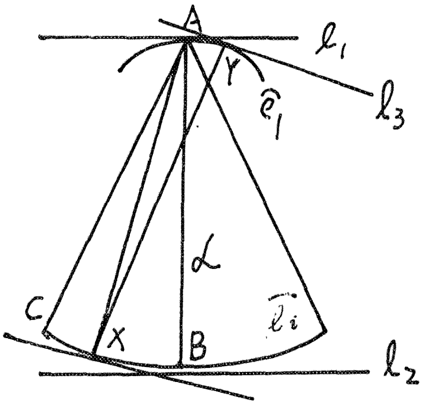
（圖18）

AOA′ 共綫　BOB′ 共綫

於是整個圖形可以歸結回(四)中的第二類等寬圖形。由(四)中的討論知此等寬圖形之弧數爲偶數，無稜角，且當寬度爲d時，周長爲d π 。

(二)當兩平行綫中之一綫過端點，而另一綫切其對弧於內點時（如圖19），設兩平行綫中之ℓ_1過A，而ℓ_2切$\widehat{\ell_1'}$弧於內點B則

1. A必爲稜角點，其理由如下：



（圖19）

若A不是稜角點，則當ℓ_2往“左移”切$\widehat{\ell_i}$於B之鄰點X，則ℓ_1必“右移”切$\widehat{\ell_j}$於一內點Y，則$\widehat{AY}$與$\widehat{BX}$成爲一對弧。

由(一)之討論知：$\widehat{\ell_i}$與$\widehat{\ell_j}$成兩相對弧，此兩弧之端點須相對，也就是A必須對

$\widehat{\ell_i}$ 之端點，但已知B爲 $\widehat{\ell_i}$ 之內點，此爲矛盾。

2. A必爲 $\widehat{\ell_i}$ 弧之曲率中心：

在 $\widehat{\ell_i}$ 上，B之左鄰取一點X，使過X點之切綫斜率介於 ℓ_1 與 ℓ_3（過A，切 $\widehat{\ell_j}$ 之直綫）之間，由圖形之等寬性知 $AG = AX$，故A爲BX之曲率中心，即A爲 $\widehat{\ell_i}$ 之曲率中心。

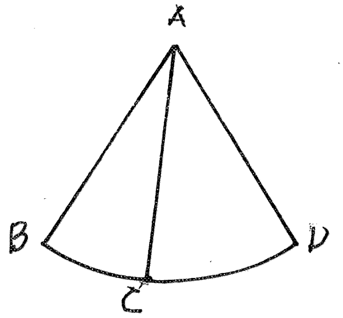
除1. 2.外，我們尚可得兩個結果：

3. 當過A之直綫由 ℓ_1 變化至 ℓ_3 時，其相對之平行綫，恰由 $\widehat{\ell_i}$ 弧之一端點移至另一端點。

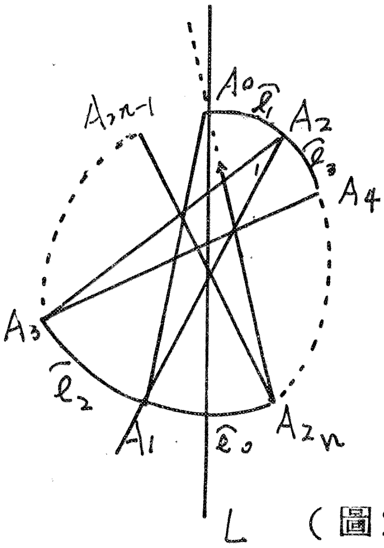
4. $\widehat{\ell_i}$ 之兩端點又爲A點兩相鄰之曲率中心（如圖19中，C爲 ℓ_j 之曲率中心），因討論法與1. 2.同，此處從略。

最後，我們看看在(二)之情形下，圖形的弧數問題：

首先，我們將每一頂點至其對弧之兩端點之綫段連出，注意：此時經過每一頂點恰有二條綫，（一頂點有三條直綫經過是什麼樣子？）如圖 20；由前面的討論及作圖法，知A同爲 $\widehat{BC}$ 及 $\widehat{CD}$ 之曲率中心，故 $\widehat{BC}$ $\widehat{CD}$ 實際上代表一弧 $\widehat{BD}$；四條以上直綫之說法亦同）標出這些頂點與弧，如圖 21，第一點標爲A，其對弧爲 $\widehat{\ell_0}$，令 $\widehat{\ell_0}$ 順時針方向旋轉之端點爲 A_1，連出 $\overline{A_0A_1}$，再令 A_1 之對弧爲 $\widehat{\ell_1}$（注意：$\widehat{\ell_1}$ 是 A_0 點的鄰弧）$\widehat{\ell_1}$ 之順時針方向終點爲 A_2，連 $\overline{A_1A_2}$，如此繼續，假如我們以圖 21 中之L綫（過 A_0 及 $\widehat{\ell_0}$ 之一內點）爲準，將 A_0 以外之點分爲左右



（圖20）



（圖21）

兩側，我們可以看出來，先有左邊一點A_1，後有右邊一點A_2，然後又左邊的A_3，右邊的A_4………；現假設左邊的A_{2n-1}點連一綫到右邊ℓ_0的端點A_{2n}，則因爲每一點只過兩條綫，A_{2n}點勢必連回A_0點，數一數頂點之個數A_0，A_1……A_{2n}，故知頂點之個數必爲奇數而弧數亦爲奇數，更重要的是，我們此時已連出一個等邊的n角星了，也就是說：我們已可將此圖形帶回（三）中有關n角星的討論了。於是在㈡的條件下，我們得到下面的結論：

此等寬圖形有奇數個弧，每個頂點都有稜角，而當其寬度爲d時，周長爲$d\pi$。

由於每一個由圓弧構成的圖形，用兩平行綫來夾時，均可歸結爲㈠㈡的情形之一，我們已得到本文最終的結論：

> 任一由圓弧構成的等寬圖形，
>
> 若寬度爲d，則周長爲$d\pi$。

六、參考資料

科學月刊　第一卷第九期